ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLV

1948

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

(2° semestre 1948)

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1948

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1948 - Luglio-agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Matematica (Geometria). — *Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche.* Nota IV (*) del Corrisp. B. SEGRE.

17. Consideriamo ora la forma cubica di S_{r-2} ($r \geqq 3$) rappresentata dalle equazioni

(50) $\quad x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_r^3 = 0, \qquad$ (51) $\quad x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 0.$

In un suo punto doppio i primi membri delle (50), (51) debbono avere derivate parziali prime fra loro proporzionali, onde dev'essere

(52) $$x_1^2 = x_2^2 = \cdots = x_r^2;$$

queste condizioni sono compatibili colle (50), (51) se, e soltanto se,

(53) $$r = 2n + 2$$

è pari, nel qual caso la forma cubica ha dimensione dispari $r-3 = 2n-1$ e *verrà denotata con* Φ_{2n-1}. Questa forma ammette precisamente come doppi i

(54) $$d_{2n-1} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n+1}{n}$$

punti P aventi $n+1$ delle coordinate uguali a $+1$ e le altre $n+1$ uguali a -1. Per $n = 1$ ed $n = 2$ essa è rispettivamente una cubica piana spezzata nei tre lati di un triangolo, e la ben nota forma cubica di S_4 con 10 nodi studiata per primo da Corrado Segre (23).

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948. - Continuazione delle Note I, II, III, apparse in questo volume dei « Rendiconti », pp. 346-352, pp. 509-515 e pp. 629-632.

(23) Vedasi C. SEGRE, *loc. cit.* in (12), nn. 24-27, e *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*, « Atti Acc. Sc. Torino », *22*, 547-557 (1886-1887); cfr. altresì G. CASTELNUOVO, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, « Atti Ist. Veneto » (2), *7*, 855-901 (1891), nn. 10, 11.

18. Qualunque sia r, l'hessiana della forma definita dalle (50), (51) si rappresenta colle equazioni (51) e

$$x_2 x_3 \cdots x_r + x_3 \cdots x_r x_1 + \cdots + x_1 x_2 \cdots x_{r-1} = 0 \tag{55}$$

Queste mostrano che tale hessiana ammette come p u n t i $(r-3)$-p l i ciascuno degli $\binom{r}{2}$ punti $Q_{ij} = Q_{ji}$ aventi nulle tutte le coordinate tranne $x_i = +1$, $x_j = -1$ $(i \neq j\,;\, i, j = 1, 2, \cdots, r)$. Notiamo che,

per $r \geq 5$, *questi sono i soli punti* $(r-3)$*-pli della suddetta hessiana.*

Ciò è intanto manifesto quando ci si restringa a punti aventi almeno una coordinata nulla, per esempio aventi $x_1 = 0$. Infatti, segando l'hessiana coll'iperpiano $x_1 = 0$ si ottiene la varietà

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 + x_3 + \cdots + x_r = 0 \quad , \quad x_2 x_3 \cdots x_r = 0\,;$$

ora è chiaro che i punti richiesti aventi $x_1 = 0$ debbono essere $(r-3)$-pli per questa sezione, sicchè in ciascuno di essi debbono simultaneamente annullarsi altre $r-3$ coordinate e la somma delle rimanenti due. Supposto invece

$$x_1 x_2 \cdots x_r \neq 0, \tag{56}$$

si può dividere la (55) per il primo membro della (56), e sostituire ad essa la

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_r} = 0\,;$$

esprimendo allora che il primo membro di questa equazione e quello della (51) hanno derivate parziali prime proporzionali, si ricade nelle (52), le quali implicano la (53). Se questa relazione sussiste, l'hessiana possiede dei punti multipli soddisfacenti alla (56), dati precisamente dai punti P definiti nel n. 17; ciascuno di questi è però soltanto d o p p i o per l'hessiana, mentre la molteplicità dei punti cercati vale $r-3 > 2$, essendo $r \geq 5$ per ipotesi ed r pari (e quindi $\neq 5$) in base alla (53).

19. Mostreremo che

Per $r \geq 5$, *la* V^3_{r-3} di S_{r-2} *definita dalle* (50), (51) *ammette l'*r*-edro* $x_1 x_2 \cdots x_r = 0$ *come covariante proiettivo.*

Ciò risulterà, dopo aver notato che ciascuna delle facce $x_i = 0$ di questo r-edro contiene $\binom{r-1}{2}$ punti Q, provando che questi sono i s o l i iperpiani di S_{r-2} soddisfacenti a tale condizione. Ed invero, in base al n. 18, affinchè l'iperpiano

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r = 0 \tag{57}$$

contenga il punto Q_{ij} occorre e basta che sia $a_i = a_j$: dunque, se nella (57) compaiono p_1 (≥ 1) coefficienti uguali fra loro, p_2 (≥ 1) coefficienti uguali

fra loro ma distinti dai precedenti, $\cdots$, p_h ($\geqq 1$) coefficienti uguali fra loro e distinti dai precedenti, con

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_h = r, \tag{58}$$

il numero dei punti Q soddisfacenti alla (57) vale

$$\binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} + \cdots + \binom{p_h}{2}. \tag{59}$$

Ora non può essere $h = 1$, in quanto le (51), (57) debbono essere fra loro indipendenti. L'espressione (59), tenuto conto della (58), assume dunque il suo massimo valore $\binom{r-1}{2}$ per $h = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = r - 1$; e si vede subito che, corrispondentemente, la (57) riducesi mediante la (51) alla forma $x_i = 0$.

Come corollario immediato si ha che:

Per $r \geqq 5$, si ottengono t u t t e le omografie trasformanti in sè la varietà (50), (51) *operando le varie sostituzioni sulle r lettere $x_1, x_2, \cdots, x_r$.*

Si verifica direttamente senza difficoltà che le precedenti proprietà valgono ancora per $r = 3$, ma non sono valide per $r = 4$. Osserviamo inoltre che, ordinando in modo decrescente i valori inferiori ad $\binom{r-1}{2}$ raggiunti dall'espressione (59) quando valga la (58), si ottengono dapprima quelli che corrispondono ad $h = 2$ e

$$(p_1, p_2) = (2, r-2), (3, r-3), \cdots, \left(\left[\frac{r}{2}\right], \left[\frac{r+1}{2}\right]\right).$$

Un'argomentazione simile a quella svolta poc'anzi prova allora che:

Per $r \geqq 5$, alla V_{r-3}^3 di S_{r-2} definita dalle (50), (51) *è associato proiettivamente il gruppo di $\binom{r}{k}$ iperpiani*

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} = 0,$$

dove k è uno qualunque fissato dei numeri $2, 3, \cdots, [r/2]$ ed $i_1, i_2, \cdots, i_k$ denota una combinazione k-pla arbitraria degli indici $1, 2, \cdots, r$. Più precisamente, tali iperpiani godono della proprietà caratteristica di contenere $\binom{k}{2} + \binom{r-k}{2}$ punti Q.

20. Un semplice calcolo, analogo ad uno svolto nel n. 17, mostra che la (50) viene segata da un iperpiano del tipo

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{r-1} + \lambda x_r = 0 \tag{60}$$

secondo una varietà possedente qualche punto multiplo se, e soltanto se, risulta

$$\lambda = \sqrt[3]{(r - 2n - 1)^2}, \tag{61}$$

dove n è un intero tale che

$$0 \leq n \leq \left[\frac{r-1}{2}\right]. \tag{62}$$

Allora la suddetta varietà possiede precisamente

$$d_{r,n} = \binom{r-1}{n}$$

punti doppi, che sono quelli per cui n delle $x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}$ valgono $+1$, le altre $r-n-1$ uguagliano -1 ed inoltre $x_r = \sqrt{\lambda} = \sqrt[3]{r-2n-1}$ (ove qui, come nella (61), si possono scegliere senza restrizione le determinazioni reali non negative dei radicali), coll'avvertenza che l'espressione data per $d_{r,n}$ va dimezzata se $\lambda = 0$ (ossia per $r = 2n+1$).

In base alla (62), fissato r pari, il massimo di $d_{r,n}$ è raggiunto per $r = 2n+2$; allora la (61) fornisce $\lambda^3 = 1$, e si ricade nelle varietà Φ_{2n-1} ottenute nel n. 17. Se r è dispari, in virtù di quanto si è detto alla fine del capoverso precedente il massimo di $d_{r,n}$ si ottiene per

$$r = 2n+3 \quad , \quad \lambda = \sqrt[3]{4}, \tag{63}$$

e proviene da una varietà di dimensione $r-3 = 2n$ pari, che *denoteremo con* Φ_{2n}, dotata di

$$d_{2n} = \binom{2n+2}{n} \tag{64}$$

punti doppi. In forza delle (50), (60), (63), si può definire Φ_{2n} coll'unica equazione

$$4 \sum_{i=1}^{2n+2} x_i^3 - \left(\sum_{i=1}^{2n+2} x_i\right)^3 = 0. \tag{65}$$

Per $n=1$ ed $n=2$, la (65) rappresenta rispettivamente una superficie cubica con quattro nodi dello spazio ordinario, ed una forma cubica di S_5 con 15 nodi studiata dal Veneroni [10].

21. Riferiamoci ancora alla V^3_{r-3} definita dalle (50), (60), ove r e λ siano arbitrari purchè

$$r \geq 5 \quad , \quad \lambda^3 \neq 1. \tag{66}$$

Mediante argomentazione analoga ad una svolta nel n. 18, si vede che l'hessiana H di V^3_{r-3} ammette esattamente $\binom{r-1}{2}$ punti $(r-3)$-pli giacenti su V^3_{r-3}, dati dai punti Q_{ij}, già considerati nel n. 18, presi soltanto per $i, j = 1, 2, \cdots, r-1$. Poichè tali punti appartengono all'iperpiano

$$x_r = 0,$$

ne consegue che *quest'ultimo è proiettivamente legato alla* V^3_{r-3}.

La H possiede altri punti $(r-3)$–pli, non situati su V^3_{r-3}, aventi tutte le coordinate nulle tranne $x_r = -1$ ed una delle restanti uguale a λ. La considerazione di questi punti e degli anzidetti punti Q_{ij} fornisce ora, in luogo del teorema finale del n. 19, che

Se valgono le (66), *alla* V^3_{r-3} *di* S_{r-2} *definita dalle* (50), (60) *è associato proiettivamente il gruppo di* $\binom{r-1}{k}$ *iperpiani*

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} = 0,$$

dove k *è uno qualunque fissato dei numeri* $1, 2, \cdots, r-1$ *ed* $i_1, i_2, \cdots, i_k$ *denota una combinazione* k*–pla di questi.*

Come corollario si ha che:

Si ottengono tutte le omografie trasformanti quella V^3_{r-3} *in sè operando le varie sostituzioni sulle lettere* $x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}$, *e lasciando fissa* x_r.

22. Le forme cubiche Φ_m, definite nei nn. 17, 20 rispettivamente per m dispari e per m pari, godono di varie notevoli proprietà. Anzitutto è noto che, per $m = 1, 2, 3, 4$, esse sono *forme cubiche* m*–dimensionali aventi il massimo numero (finito) di nodi compatibili col loro ordine e colla loro dimensione* [24]; ed è presumibile – dato il modo come le Φ_m sono state introdotte – che tale proprietà sussista anche per $m \geqq 5$.

Può inoltre esser utile rilevare che, avuto riguardo alle (54), (64), *per* $m \geqq 7$ *il numero*

$$d_m = \binom{m+2}{\left[\frac{m+1}{2}\right]}$$

dei punti doppi di Φ_m *supera quello che un conto di costanti assegnerebbe come limite superiore per il numero dei nodi di una forma cubica* m*–dimensionale*; invero tale presunto limite superiore vale soltanto $\binom{m+2}{3}$ [25].

Mostriamo quindi che:

I d_m *nodi di una* Φ_m *di dimensione* $m = 2n$ *pari si distribuiscono a* d_{m-1} *a* d_{m-1} *sopra* $2n+2$ *iperpiani, di guisa che ogni nodo sta su* $n+2$ *iperpiani ed ogni iperpiano sega* Φ_m *secondo una* Φ_{m-1}. *I* d_m *nodi di una* Φ_m

(24) Il risultato si stabilisce subito per $m = 1, 2, 3$, con un ben noto ragionamento facente intervenire la classe di Φ_m. Esso è assai più riposto nel caso $m = 4$, per il quale ved. E. G. TOGLIATTI, *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi*, « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari » (Pavia, Università, 1936), pp. 577–593.

(25) Cfr. F. SEVERI, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario o di una forma di un iperspazio*, « Annali di Mat. » (4), *25*, 1–41 (1946), n. 19, Osservazione 2ª. Anche il presunto massimo numero di nodi di una superficie dello spazio ordinario, di dato ordine n, può di fatto venire superato per $n \geq 10$: ved. B. SEGRE, *Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3), *2*, 204–212 (1947).

di dimensione $m = 2n-1$ *dispari* $(n \geqq 2)$ *si distribuiscono a* d_{m-1} *a* d_{m-2} *sopra* $\binom{2n+2}{2}$ *iperpiani, di guisa che ogni nodo sta su* $2\binom{n+1}{2}$ *iperpiani ed ogni iperpiano sega* Φ_m *secondo una* Φ_{m-1}.

Consideriamo dapprima la Φ_{2n} definita dalla (65), e rammentiamo le espressioni (64), (54) per d_{2n}, d_{2n-1}. In base al n. 20 la Φ_{2n} ha d_{2n} nodi, che sono i punti per cui n delle coordinate $x_1, x_2, \cdots, x_{2n+2}$ uguagliano $+1$, le restanti $n+2$ coordinate valendo -1. Tali nodi stanno pertanto a d_{2n-2} a d_{2n-1} sopra i $2n+2$ iperpiani rappresentati dall'equazione

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+2} - 2x_i = 0 \tag{67}$$

per $i = 1, 2, \cdots, 2n+2$; più precisamente, l'iperpiano (67) contiene uno di quei nodi se, e soltanto se, per questo si ha $x_i = -1$, talchè per ogni nodo passano $n+2$ di quegli iperpiani [26].

Per completare la prima parte del teorema da dimostrare, occorre soltanto più provare che la (65) viene effettivamente segata secondo una Φ_{2n-1} da ciascuno degli iperpiani (67), ad esempio da

$$-x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+2} = 0. \tag{68}$$

A tal uopo basta operare il cambiamento di coordinate

$$x_1 = -2y_1 - \sum_{i=2}^{2n+2} y_i \quad , \quad x_i = y_i \qquad (i = 2, 3, \cdots, 2n+2),$$

il quale muta le (68), (65) rispettivamente nelle

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n+2} = 0, \tag{69}$$

$$-4\left(y_1 + \sum_{i=1}^{2n+2} y_i\right)^3 + 4\sum_{i=2}^{2n+2} y_i^3 - (-2y_1)^3 = 0; \tag{70}$$

osservato che, in virtù della (69), la (70) equivale alla

$$y_1^3 + y_2^3 + \cdots + y_{2n+2}^3 = 0,$$

l'asserto segue subito dal n. 17. Aggiungiamo che l'insieme dei $2n+2$ iperpiani (67) costituisce un covariante proiettivo di Φ_{2n}, e che l'iperpiano

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n+2} = 0,$$

preso a sè, è pure proiettivamente legato a Φ_{2n} (n. 21); in base alla (65), anche quest'ultimo iperpiano sega Φ_{2n} secondo una Φ_{2n-1}, ma i d_{2n-1} nodi della sezione sono ora punti semplici di Φ_{2n}, sicchè detto iperpiano t o c c a Φ_{2n} in ciascuno di essi.

Consideriamo in secondo luogo la Φ_{2n-1} definita dalle (50), (51), dove r si esprima colla (53) e sia $n \geqq 2$. In base al n. 17 ed alla (64), ognuno dei $\binom{2n+2}{2}$ iperpiani

$$x_i = x_j \qquad (i \neq j \; ; \; i, j = 1, 2, \cdots, 2n+2)$$

(26) A riprova di ciò si ha che, in base alle (54), (64), risulta $(2n+2)d_{2n-1} = (n+2)d_{2n}$.

contiene d_{2n-2} nodi di Φ_{2n-1}, e ciascuno di tali nodi sta in $2\binom{n+1}{2}$ di quegli iperpiani[27]. La sezione di Φ_{2n-1} con uno qualunque di questi ultimi, ad esempio con $x_{2n+1} = x_{2n+2}$, è poi proprio una Φ_{2n-2}; essa invero è data dalle

$$x_{2n+1} = x_{2n+2} \quad , \quad x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2n}^3 + 2x_{2n+1}^3 = 0 \quad ,$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} + 2x_{2n+1} = 0 ,$$

ed eliminando x_{2n+1} fra le ultime due si ottiene l'equazione fornita dalla (65) collo scrivervi $n-1$ in luogo di n.

Si è visto nei nn. 19, 21 che i $\binom{2n+2}{2}$ iperpiani

$$x_i + x_j = 0 \qquad (i \neq j \; ; \; i, j = 1, 2, \cdots, 2n+2)$$

formano un gruppo covariante tanto per Φ_{2n-1} [rappresentata dalle (50), (51), dove r venga fornito dalla (53) e sia $n \geqq 2$] quanto per Φ_{2n} [rappresentata dalla (65)]. Esaminando il comportamento di tali iperpiani nei confronti di Φ_{2n-1}, Φ_{2n}, e tenendo presenti i nn. 17, 18, 20, 21, si constata senza difficoltà che:

I d_m nodi di Φ_m ($m > 2$ arbitrario) stanno a $2d_{m-2}$ a $2d_{m-2}$ sopra i suddetti

$$\binom{2\left[\frac{m+3}{2}\right]}{2}$$

iperpiani, di guisa che ogni nodo sta su

$$\left[\frac{m+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{m+7}{2}\right] - \left[\frac{m}{2}\right]$$

di essi[28]. *I $2d_{m-2}$ nodi situati su un medesimo iperpiano giacciono a coppie su d_{m-2} rette uscenti da uno stesso punto, e la sezione di Φ_m coll'iperpiano risulta un cono, di vertice questo punto, che passa doppiamente per quelle d_{m-2} rette e che viene segato secondo delle Φ_{m-2} dagli iperpiani non passanti per il vertice. I vertici di detti coni sono precisamente i punti di Φ_m che riescono m-pli per la relativa hessiana.*

23. Risolviamo da ultimo il problema di *trovare soluzioni complete dell'equazione* (65), *e del sistema* (50), (51), *nel campo razionale.*

(27) A conferma di ciò si ha che, in base alle (54), (64), risulta

$$\binom{2n+2}{2} d_{2n-2} = 2\binom{n+1}{2} d_{2n-1} .$$

(28) A riprova di ciò, e tenuto conto delle (54), (64), si verifica che:

$$2\binom{2\left[\frac{m+3}{2}\right]}{2} d_{m-2} = \left(\left[\frac{m+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{m+7}{2}\right] - \left[\frac{m}{2}\right]\right) d_m .$$

I punti razionali della (65) si hanno tutti a partire da un punto doppio di questa forma, ad esempio (n. 20)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = +1 \quad , \quad x_{n+1} = \cdots = x_{2n+1} = x_{2n+2} = -1 ,$$

considerando le ulteriori intersezioni della (65) colle rette razionali uscenti da esso. Si ottiene così la soluzione cubica completa della (65):

$$(71) \qquad x_i = \alpha + \beta y_i \quad , \quad x_j = -\alpha + \beta y_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n \; ; \; j = n+1, \cdots, 2n+2),$$

dove $y_1, y_2, \cdots, y_{2n+2}$ sono parametri omogenei fra cui può porsi senza restrizione una relazione lineare (per esempio $y_{2n+2} = 0$), ed α, β si esprimono colle

$$\alpha = \left(\sum_{h=1}^{2n+2} y_h\right)^3 - 4 \sum_{h=1}^{2n+2} y_h^3 \quad , \quad \beta = 6\left(\sum_{h=1}^{2n+2} y_h\right)^2 + 12 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 12 \sum_{j=n+1}^{2n+2} y_j^2 ,$$

coll'avvertenza che, corrispondentemente ai valori delle y che annullano entrambe queste espressioni, conviene nelle (71) lasciare α e β arbitrari. Quest'ultima eventualità può però sempre evitarsi, se nella (65) si prescinde dall'ordine delle incognite.

Procedendo in modo analogo, si può ottenere una soluzione cubica completa per il sistema (50), (51) nel caso in cui $r = 2n+2$ sia pari, in quanto allora (n. 17) la corrispondente varietà cubica possiede dei punti doppi razionali. Non ci soffermiamo su ciò; segnaliamo soltanto il caso $r = 6$, in cui quel sistema – conformemente ad una proprietà geometrica della varietà di C. Segre che risale al Castelnuovo [29] – ammette la soluzione quadratica completa

$$\begin{aligned}
x_1 &= -y_2(y_0 - y_3) + y_3(y_0 - y_1) + y_1(y_0 - y_2) \\
x_2 &= y_2(y_0 - y_3) - y_3(y_0 - y_1) + y_1(y_0 - y_2) \\
x_3 &= y_2(y_0 - y_3) + y_3(y_0 - y_1) - y_1(y_0 - y_2) \\
x_4 &= -y_3(y_2 - y_0) + y_1(y_3 - y_0) + y_2(y_1 - y_0) \\
x_5 &= y_3(y_2 - y_0) - y_1(y_3 - y_0) + y_2(y_1 - y_0) \\
x_6 &= y_3(y_2 - y_0) + y_1(y_3 - y_0) - y_2(y_1 - y_0) \text{ [30]}.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui $r = 2n+1$ sia dispari, il sistema (50), (51) rappresenta una V^3_{2n-2} di S_{2n-1} priva di punti multipli (n. 17), per la quale il procedimento suddetto più non si applica. Attualmente, però, V^3_{2n-2} contiene esattamente $(2n+1)(2n)\cdots(n+1)/2^n$ S_{n-1} razionali (Nota III, n. 14), coi quali si possono formare coppie sghembe, quali ad esempio

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \cdots = x_{2n-1} + x_{2n} = x_{2n+1} = 0$$

(29) Cfr. G. Castelnuovo, *loc. cit.* in (23), n. 10.

(30) Per $r = 6$, alcune soluzioni assai particolari di quel sistema eran già note: cfr. « L'Interm. des Math. », *16*, 43 e 112 (1909).

ed

$$x_1 = x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = \cdots = x_{2n} + x_{2n+1} = 0.$$

Poggiando sull'osservazione esposta al principio del n. 4 (Nota I), ed utilizzando una coppia siffatta, si ricava senza difficoltà una soluzione biquadratica completa del sistema proposto. Per $n = 2$ si può anche ottenere una soluzione cubica completa, procedendo in modo analogo a quello indicato alla fine del n. 6 [31].

Geologia. — *La Serpentinizzazione.* Nota [*] del Socio F. SACCO.

Le questioni riguardanti le cosidette *Pietre Verdi*, tanto comuni in Italia, sono state in gran parte risolte in questi ultimi anni [1]: infatti:

1° Circa la loro età, i fossili (rari ma caratteristici) ed i dati stratigrafici hanno provato che, mentre la cosidetta zona delle P. V. delle Alpi appartiene essenzialmente al Lias (l. s.) invece le argille scagliose e gli argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino, delle Antille, ecc. sono riferibili al Cretaceo (l. s.).

2° Quanto all'origine delle P. V. è ormai ammesso che in generale esse derivano dalle Rocce Peridotiche (forse rappresentanti solidificati del Sima primitivo) non tanto per un'alterazione esogenica, quanto per una intima speciale idratazione (si potrebbe dire serpentinizzazione). È noto che le masse magmiche basaltico-oliviche nel loro lento consolidamento per raffreddamento e relativa contrazione, presentano spesso profonde fratture subverticali che originano le caratteristiche colonne basaltiche; ma nelle loro connesse masse oliviniche si deve pure verificare una vasta microfratturazione reticolare analoga a quella che si vede al microscopio nei cristalli di Olivina in via di serpentinizzazione.

Ciò premesso, siccome le formazioni con P. V. sono di tipo abissale, esse dovettero soggiacere per lungo tempo alle masse acquee delle fosse oceaniche o di analoghe regioni abissali degli antichi oceani. Quindi tali acque, forse ancora un po' calde per residuo Simico, sottoposte a potenti pressioni (per causa batimetrica) poterono abbastanza facilmente penetrare profondamente nelle sottogiacenti rocce peridotiche microfratturate e serpentinizzarle.

Le tante varietà (di forme, di costituzione, di colore, ecc.) che presentano le serpentine attuali possono essere in relazione colle varie condizioni

(31) La questione generale di sapere sotto quali condizioni esistono soluzioni complete cubiche o biquadratiche, per una data equazione diofantea cubica in quattro variabili omogenee, è trattata in B. SEGRE, *A note on arithmetical properties of cubic surfaces*, « Journ. London Math. Soc. », *18*, 24-31 (1943), e B. SEGRE, *On arithmetical properties of singular cubic surfaces*, « Journ. London Math. Soc. », *19*, 84-91 (1944).

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1948.

(1) Vedi *I problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e dell'Appennino.* (« Boll. Uff. Geol. Ital. », 1934).

termiche–bariche–chimiche, ecc. in cui si trovarono le diverse zone durante il loro lento metamorfismo. Il cosidetto *Gruppo di Voltri* nell'Appennino savonese costituisce un magnifico museo litologico di queste numerose varietà di P. V. Lo studio fisico–litologico dello speciale vulcanismo basico delle Hawai potrà gettare luce su tali questioni.

3° Riguardo alla forma e posizione delle masse di P. V. esse si spiegano coi fenomeni e col meccanismo del Laccolitismo, tanto più considerando la fluidità del Sima e la plasticità delle argille abissali; donde i notevoli corrugamenti, carreggiamenti, ecc. che caratterizzano queste formazioni.

4° Quanto all'epoca di tale serpentinizzazione essa fu certamente molto antica ma complessivamente posteriore a quella della incrostazione sialica del globo terrestre. (Vedi rughe seleniche).

Zoologia. — *Prima notizia sull'esistenza di una specie di «Embia» (Insecta Embioptera), a maschio alato, nel Comune di Roma, nuova per l'Italia.* Nota (*) del Socio F. Silvestri.

Nella primavera del 1946 trovandomi a Roma espressi il desiderio al signor Omero Castellani, appassionato entomologo residente in Acilia, di vedere la sua collezione d'insetti. Egli gentilmente acconsentì e mi fece vedere prima la collezione dei Ditteri Asilidi, dei quali si occupa in modo speciale, e poi quanto aveva raccolto nei dintorni di Acilia. Fra questo materiale vidi un esemplare alato di *Embia* disposto a secco su cartellino e domandai al Castellani dove lo aveva raccolto. Rispose di averlo preso lungo il marciapiede della strada conducente alla sua casa. Ciò fu per me una sorpresa perchè già mi ero occupato di raccolta di *Embiidae* nella campagna romana nel 1897-98 quando ero assistente del prof. G. B. Grassi e avevo sempre trovato forme attere anche di maschi, come già lo stesso Grassi in Sicilia quando studiò questi insetti (1).

Dal 1898 al 1946 io raccolsi *Embiidae* in buon numero di località della Italia centro meridionale e insulare e trovai sempre esemplari di due specie a maschi atteri (*Embia, Monotylota, Ramburi* Rimsky-Korsakow e *Haploembia Solieri* Rambur), come altrettanto fecero conoscere entomologi stranieri che avevano avuto occasione di raccogliere *Embiidae* in Italia. Alla vista di un maschio alato raccolto in località poco lontana da Roma restai pertanto sorpreso e pregai il Castellani di farmelo portare a Portici per esaminarlo.

Trattandosi di una raccolta così nuova, ne parlai con altri entomologi romani, tra questi il dott. Saccà disse di aver raccolto un esemplare sul mar-

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) *Contribuzione allo studio delle Embidine.* «Atti Acc. Gioenia Sci. nat. Catania», ser. 4ª, vol. VI e VII, pp. 133-150 (1880), tav. IV, metà destra (Appendice II, a *Costituzione e sviluppo della Società dei Termitidi*).

ciapiede del Viale Regina Margherita e me lo regalò, anche il signor C. Illuminati visitando la sua collezione mi dette un esemplare che aveva raccolto il 1° luglio del 1939 in Roma (non potè precisarmi la località).

In base a queste notizie e agli esemplari avuti desideravo io stesso raccoglierne altri, perciò visitai per due volte la campagna presso Cine-città, ma vi raccolsi soltanto esemplari di *Embia Ramburi*.

Il 7 giugno dell'anno corrente cercai Embiidi sotto sassi presso Via dei Cerchi in Roma e potei trovare un maschio alato; ripetei la ricerca il pomeriggio dell'8 e ne raccolsi altri due e un altro la sera del 9.

Il 17 giugno mi recai a Centocelle e potei raccogliere sotto sassi un maschio alato, una femmina e ova deposte da questa nel caratteristico tubo di seta.

Con questo materiale ho potuto fare i preparati necessari e ho concluso che la specie comparsa a Roma e dintorni fin dal 1939 è l'*Embia Savignyi* Latreille fino ad ora ricordata per l'Egitto, per la Grecia e per la Russia meridionale occidentale.

Non ritengo che essa sia potuto sfuggire al Grassi, al suo bravo cercatore d'insetti, a Paoli Luigioni che fu un abilissimo raccoglitore di Coleotteri, ma che non trascurava anche altri insetti, a me stesso, che continuai a raccogliere artropodi terricoli per un cinquantennio e che fino al giugno dell'anno corrente non avevo mai trovato in Italia una *Embia* a maschio alato; perciò credo di potere affermare che l'*Embia Savignyi* è per l'Italia una importazione recente, forse dell'ultimo ventennio. Poichè la specie (come del resto tutte quelle finora conosciute dell'ordine *Embioptera*) ha femmine attere e maschi alati, deve essere stata importata probabilmente con qualche sostanza vegetale (specialmente fieno o paglia) da qualche luogo dell'Africa settentrionale orientale (è probabile dalla Libia, dove la specie certamente esiste quantunque non sia stata ancora segnalata).

Sarà importante ora seguirne la diffusione da Roma e dintorni ad altre località.

La specie allo stato di maschio adulto si distingue subito dalle altre due sopra ricordate, perchè esso è alato; anche la femmina può essere riconosciuta facilmente perchè a completo sviluppo ha tutto il corpo (comprese le zampe e le antenne) di colore bruno nerastro, mentre la femmina della *Embia Ramburi* è al dorso di colore rosso mattone più o meno scuro eccettuato il pronoto che è di colore testaceo, quella dell'*Haoploembia solieri* è di colore castagno più o meno chiaro.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Fisica Matematica. — *Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato* (*). Nota I (**) di T. Manacorda, presentata dal Corrisp. G. Sansone.

È ben noto il comportamento del potenziale gravitazionale di strato semplice e in particolare la discontinuità del suo gradiente attraverso lo strato. Questa discontinuità fu messa in evidenza per la prima volta da Lagrange nel caso dello strato sferico. La formulazione della legge secondo cui le derivate prime tangenziali del potenziale sono continue, mentre quella normale subisce attraverso lo strato la discontinuità $-4\pi f\rho$ (ρ densità materiale, f costante di gravitazione) risale a Poisson, la sua dimostrazione rigorosa a Cauchy, e la sua definitiva formulazione a Green.

Le discontinuità delle derivate seconde furono invece determinate per la prima volta da Green, nel caso in cui la superficie che genera il campo è di livello, poi da P. Paci. La forma più generale fu loro data da Poincaré, e recentemente sono state ritrovate per via omografica da P. Burgatti.

P. Paci ha anche determinato i valori delle derivate seconde e terze del potenziale di strato semplice nelle direzioni tangenti e normale ad una superficie di livello [1]. Questi valori, nel caso molto particolare in cui lo strato è chiuso e equipotenziale, dànno direttamente le discontinuità delle derivate seconde e terze attraverso la superficie, dato che nell'interno esse sono identicamente nulle.

In questa Nota invece per il caso più generale di una superficie qualsiasi, anche non di livello, e seguendo il metodo già adoperato dal prof. B. Caldonazzo in un suo recente lavoro destinato alla determinazione delle discontinuità delle derivate terze del potenziale gravitazionale ordinario e della loro influenza sugli elementi geometrici del campo [2], si trovano le discontinuità delle derivate terze del potenziale di strato semplice attraverso la superficie che genera il campo. Tali derivate risultano in generale tutte discontinue, e le loro discontinuità sono legate, non solo agli elementi geometrici e materiali dello strato, ma anche alle loro derivate.

La Nota termina con la ricerca di come si riducano le discontinuità delle derivate di qualsiasi ordine del potenziale di strato semplice attraverso i punti del contorno della superficie supposta non chiusa, siano essi regolari o angolosi.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1948.

1 P. Paci. *Sopra le derivate terze della funzione potenziale di una superficie.* «Rend. Circ. Mat. Palermo», *8*, pp. 33–40.

2 B. Caldonazzo. *Considerazioni geometriche sul potenziale gravitazionale.* «Rend. Ist. Lombardo», *75*, pp. 239–259 (1942).

1. Sia Σ una superficie regolare materiale finita la cui densità ρ sia funzione continua e derivabile almeno due volte su Σ, ed U il potenziale gravitazionale del campo di forza generato da essa.

Come è ben noto U risulta funzione continua in tutti i punti dello spazio, anche attraverso Σ, mentre già grad U subisce nell'attraversare Σ la discontinuità

$$[\operatorname{grad} U] = -4\pi f \rho \boldsymbol{n}, \tag{1}$$

($\boldsymbol{n}$ versore normale alla superficie con verso prefissato, f costante di gravitazione).

Le discontinuità di grad U si concentrano dunque tutte nella sola derivata normale, mentre le derivate seconde di U sono in generale tutte discontinue e legate alla densità e alla natura geometrica di Σ. Tali discontinuità, calcolate da Poincarè, poi ritrovate con altri metodi da Somigliana, Burgatti e altri [3] sono compendiate nella relazione omografica

$$\left[\frac{d}{dP}\operatorname{grad} U\right] = -4\pi f \rho\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\right)_{\Sigma} + 2\,\mathrm{DH}(\operatorname{grad}_{\Sigma}\rho, \boldsymbol{n}) - \rho \operatorname{div}\boldsymbol{n}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})\,{}^{1}. \tag{2}$$

In questa l'indice Σ apposto alla prima derivata del secondo membro sta ad indicare che si tratta della derivata superficiale dell'ente in questione. Come è noto, se α è un qualsiasi ente funzione derivabile del posto in una regione contenente Σ, la sua derivata superficiale è definita dall'uguaglianza

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}\right)_{\Sigma} = \frac{d\alpha}{dP}(1 - \mathrm{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})) \text{ [4]}, \tag{3}$$

cosicchè $\left(\frac{d\alpha}{dP}\right)_{\Sigma}\boldsymbol{n} = 0$.

A noi occorrerà di considerare anche derivate di enti definiti unicamente su Σ. Seguendo il metodo di Burgatti, sui cui risultati si basa tutto questo lavoro, si converrà di definire l'ente in questione anche nei punti infinitamente vicini a Σ prendendolo costante sulla normale a Σ da ambo i lati ed uguale al valore assunto nel punto corrispondente di Σ [5]. Se Φ indica tale ente avremo dunque $\frac{d\Phi}{dP}\boldsymbol{n} = 0$, e quindi la derivata di Φ e da ritenersi superficiale.

La (2) si deduce dalla applicazione al caso del potenziale di strato semplice di una formula per le discontinuità di vettori e omografie data da Bur-

[3] H. POINCARÉ, *Théorie du potentiel newtonien*. Paris, p. 251 (1889); G. SOMIGLIANA; *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie*. «Atti Acc. Sc. Torino», *51*, pp. 501-508 (1915); P. BURGATTI, *Teoria matematica della elasticità*, vol. III di *Analisi vettoriale generale*, Bologna, p. 16 (1931).

[4] C. BURALI FORTI R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, vol. I di *Analisi vettoriale generale*, Bologna, p. 225 (1929).

[5] P. BURGATTI, *Sulle discontinuità degli scalari, vettori e omografie vettoriali*. «Atti Acc. Sc. Bologna», *40*, pp. 93-106 (1936).

gatti. Se $\boldsymbol{v}$ è un vettore e α una omografia funzioni derivabili dei punti di una regione S contenente Σ e con le loro derivate discontinue attraverso Σ, si ha

$$(1) \qquad \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{d\mathrm{P}}\right] = \left(\frac{d[\boldsymbol{v}]}{d\mathrm{P}}\right)_\Sigma + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}) \quad ; \quad \left[\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\right] = \left(\frac{d[\alpha]}{d\mathrm{P}}\right)_\Sigma + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \varphi),$$

in cui, essendo $[\boldsymbol{v}]$ e $[\alpha]$ definite unicamente su Σ, le loro derivate vanno intese nel senso dianzi indicato. Nelle (4) $\boldsymbol{w}$ e φ sono un vettore e una omografia che vanno opportunamente determinati e rappresentano la discontinuità della derivata normale rispettivamente di $\boldsymbol{v}$ e di α.

In ogni punto di Σ (o per lo meno in quella sua regione, a cui intendiamo limitarci, in cu Σ è regolare e bilatera), risulta definito come funzione continua e derivabile il versore normale $\boldsymbol{n}$, scelto con verso arbitrario. Risulta quindi definita su tutta Σ assieme ad $\boldsymbol{n}$ l'omografia

$$(5) \qquad \sigma = \frac{d\boldsymbol{n}}{d\mathrm{P}}.$$

Si può estendere il campo di esistenza di σ con la seguente considerazione. Il versore $\boldsymbol{n}$ definisce nello spazio una congruenza rettilinea ed esiste una regione S contenente Σ tale che in ogni punto di S passa una ed una sola retta della congruenza. Definiremo σ nei punti di S ponendo

$$(6) \qquad \sigma \boldsymbol{n} = 0.$$

Con ciò, essendo rot $\boldsymbol{n} = 0$, l'omografia σ risulta una dilatazione, e se σ_Σ indica la derivata superficiale di $\boldsymbol{n}$, si ottiene $\sigma_\Sigma = \sigma$. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due versori tangenti a Σ e tali che la terna $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sia ortogonale e sinistrorsa, risulta

$$(7) \qquad \sigma \boldsymbol{u} = \mathrm{A}_u \boldsymbol{u} + \mathrm{T}_u \boldsymbol{v} \quad , \quad \sigma \boldsymbol{v} = \mathrm{A}_v \boldsymbol{v} + \mathrm{T}_v \boldsymbol{u}\ ^{(6)},$$

in cui $\mathrm{A}_u, \mathrm{A}_v$ sono le curvature normali nelle direzioni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e $\mathrm{T}_u = -\mathrm{T}$ la torsione geodetica di Σ secondo $\boldsymbol{u}$.

È utile introdurre anche l'omografia

$$(8) \qquad \xi = \frac{d}{d\mathrm{P}} \operatorname{grad} \mathrm{U}$$

definita come funzione continua e derivabile in tutti i punti dello spazio, e che subisce attraverso Σ la discontinuità (2).

2. Le discontinuità delle derivate terze del potenziale U si possono ottenere applicando alla ξ la formula di Burgatti (4), che nel nostro caso si scrive

$$(9) \qquad \left[\frac{d\xi}{d\mathrm{P}}\right] = \left(\frac{d[\xi]}{d\mathrm{P}}\right)_\Sigma + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \varphi),$$

e tutta la difficoltà è ricondotta alla determinazione di φ.

(6) P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali Forti, *Geometria differenziale*, vol. II di *Analisi vettoriale generale*, Bologna, p. 35 sg. (1930).

Ora si ha

$$\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n} = \operatorname{grad}\{\operatorname{grad} U \times \boldsymbol{n}\} = \xi \boldsymbol{n} + \sigma \operatorname{grad} U$$

quindi, per la continuità di $\boldsymbol{n}$ e di σ attraverso Σ,

$$(10)\qquad \left[\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right] = [\xi]\,\boldsymbol{n} + \sigma\,[\operatorname{grad} U] = -4\pi f\{\operatorname{grad}_\Sigma \rho - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\},$$

tenuto conto della (1) e (6).

Si ha ancora

$$(11)\qquad \frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{d\xi}{dP}\boldsymbol{n} + \xi\sigma + \frac{d\sigma}{dP}\operatorname{grad} U + \sigma\xi,$$

dalla quale per la (9) si deduce la discontinuità

$$(12)\qquad \varphi = \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{n} = \left[\frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right] - [\xi]\sigma - \sigma[\xi] - \frac{d\sigma}{dP}[\operatorname{grad} U]\ (7).$$

D'altronde

$$\frac{d\sigma}{dP}[\operatorname{grad} U] = -4\pi f\rho\frac{d\sigma}{dP}\boldsymbol{n} = -4\pi f\rho\left(\frac{d\sigma\boldsymbol{n}}{dP} - \sigma^2\right) = 4\pi f\rho\sigma^2,$$

mentre per la (2) è

$$(13_1)\qquad [\xi]\sigma = -4\pi f\{\rho\sigma^2 + 2\,\mathrm{DH}(\operatorname{grad}_\Sigma\rho, \boldsymbol{n})\sigma - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}\,\mathrm{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})\sigma\} =$$
$$= -4\pi f\{\rho\sigma^2 + \mathrm{H}(\sigma\operatorname{grad}_\Sigma\rho, \boldsymbol{n})\},$$

essendo, come si è già rilevato $\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{dP}\right)_\Sigma = \sigma$.

È ancora, sempre per la (2)

$$(13_2)\qquad \sigma[\xi] = -4\pi f\{\rho\sigma^2 + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \sigma\operatorname{grad}_\Sigma\rho),$$

mentre, per la prima delle (4), si ha

$$(14)\qquad \left[\frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right] = \left(\frac{d}{dP}\left[\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right]\right)_\Sigma + \mathrm{H}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}),$$

in cui $\boldsymbol{w}$ è un vettore che verrà ora determinato. A questo scopo prendiamo l'invariante primo di ambo i membri. Otteniamo così

$$\left[\mathrm{I}_1\frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right] = \mathrm{I}_1\left(\frac{d}{dP}\left[\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right]\right)_\Sigma + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}.$$

(7) Effettivamente, se α è una omografia, vale la relazione $\frac{d\alpha\boldsymbol{u}}{dP} = \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + k\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}$, e la formula adoperata nel testo è valida allora e allora soltanto quando α è la derivata di un vettore, come nel nostro caso. Cfr. C. BURALI FORTI, R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, vol. I di *Analisi vettoriale generale*, Bologna, p. 267 (1929). Nel seguito questa opera verrà indicata semplicemente con *A. V. G.* I.

Per calcolare l'invariante primo del primo membro e del primo termine al secondo membro, osserviamo che dalla (10) si ha

$$(15)\qquad \left(\frac{d}{dP}\left[\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right]\right)_\Sigma =$$

$$= -4\pi f\left\{\left(\frac{d}{dP}\operatorname{grad}_\Sigma \rho\right)_\Sigma - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{n}\cdot\sigma - H(\operatorname{grad}_\Sigma(\rho \operatorname{div} \boldsymbol{n}), \boldsymbol{n})\right\},$$

da cui

$$I_1\left(\frac{d}{dP}\left[\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right]\right)_\Sigma = -4\pi f\{\operatorname{div}_\Sigma \operatorname{grad}_\Sigma \rho - \rho(\operatorname{div} \boldsymbol{n})^2\}\ (8).$$

Per la (11) si ha poi

$$I_1 \frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n} = 2 I_1(\xi\sigma) + \operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{n}\ (9),$$

da cui, tenendo presente la (13_2),

$$(16)\qquad \left[I_1 \frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right] = 2 I_1([\xi]\sigma) - 4\pi f\rho\, \boldsymbol{n}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{n} =$$

$$- 4\pi f\rho\{2 I_1\sigma^2 + \boldsymbol{n}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{n}\}.$$

Sostituendo nella relazione sopra trovata

$$(17)\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w} = -4\pi f\rho\{2 I_1\sigma^2 + \boldsymbol{n}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{n}\} - 4\pi f\rho\{\Delta_2\rho - \rho(\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2\}$$

con $I_1\sigma^2 = A_u^2 + A_v^2 - 2 T_u T_v$.

Operando invece sulla (14) con $2V$ si ottiene

$$0 = 2V\left[\frac{d}{dP}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial n}\right] = 4\pi f \operatorname{grad}_\Sigma(\rho \operatorname{div}\boldsymbol{n}) \wedge \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{w},$$

e perciò

$$(18)\qquad \boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n}\wedge 4\pi f \operatorname{grad}_\Sigma(\rho \operatorname{div}\boldsymbol{n}).$$

Le (17) e (18) definiscono il richiesto vettore $\boldsymbol{w}$:

$$(19)\quad \boldsymbol{w} = -4\pi f\{2\rho I_1\sigma^2 + \boldsymbol{n}\times\operatorname{grad}(\rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}) - \Delta_2\rho + \rho(\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2\}\boldsymbol{n} +$$

$$+ 4\pi f \operatorname{grad}_\Sigma(\rho \operatorname{div}\boldsymbol{n})$$

e con $\boldsymbol{w}$ risulta pure definita la φ, che, tenendo presenti le formule (12), (13), (14), (15), e (19), può scriversi:

$$\varphi = -4\pi f\left\{\left(\frac{d}{dP}\operatorname{grad}_\Sigma\rho\right)_\Sigma - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}\cdot\sigma - H(\operatorname{grad}_\Sigma(\rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}), \boldsymbol{n}) - \rho\sigma^2 -\right.$$

$$\left. - 2DH(\sigma \operatorname{grad}_\Sigma\rho, \boldsymbol{n})\right\} + H(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{w}).$$

(8) *A. V. G.*, I, p. 225.
(9) *A. V. G.*, I, p. 183 e 213.

Introducendo in questa la (19) al posto di $\boldsymbol{w}$ e osservando che

$$\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{n}) = -\mathrm{I}_1\sigma^2 \text{ (10)}$$

si ha per φ l'espressione

$$(20)\quad \varphi = -4\pi f\left\{\left(\frac{d}{dP}\operatorname{grad}_\Sigma\rho\right)_\Sigma - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}\cdot\sigma - \rho\sigma^2 - 2\,\mathrm{DH}(\boldsymbol{n},\operatorname{grad}_\Sigma(\rho\operatorname{div}\boldsymbol{n})) - \right.$$
$$\left. - 2\,\mathrm{DH}(\boldsymbol{n},\sigma\operatorname{grad}_\Sigma\rho) + (\rho\,\mathrm{I}_1\sigma^2 - \Delta_2\rho + \rho(\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2)\,\mathrm{H}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})\right.$$

Geometria. — *Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi-asintotiche.* Nota (*) di C. LONGO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. Se si vuole approfondire lo studio di una varietà nell'intorno di un suo punto è naturale estendere il concetto di curva asintotica di una superficie in S_3. A questo scopo il Bompiani (1) ha introdotto il concetto di varietà quasi-asintotica subordinata ad una data varietà.

Una varietà V_h, *subordinata ad una varietà* V_k $(k > h)$ *si dice quasi-asintotica* $\sigma_{r,s}$ $(0 < r < s)$ *per* V_k, *quando* l'S (r)-*osculatore* (2) *a* V_k *in un punto della* V_h *e* l'S (s)-*osculatore ivi alla* V_h *hanno uno spazio congiungente di dimensione inferiore a quella che si avrebbe per una* V_h *generica di* V_k.

Mentre la teoria delle curve quasi-asintotiche $(h = 1)$ ha già raggiunto un notevole sviluppo, si conoscono finora pochi esempi di varietà V_k che posseggono V_h quasi-asintotiche con $h > 1$. Un esempio, che può considerarsi il primo lavoro sull'argomento, di V_3 che posseggono superficie quasi-asintotiche è stato dato dal Bogdan (3).

(10) Ciò discende immediatamente dalla applicazione al caso nostro di una formula generale, cfr. *A. V. G.*, I, p. 174 e 203. Osserviamo che la formula del testo esprime in una congruenza rettilinea normale la derivata normale della curvatura media della superficie della congruenza che passa per il punto considerato. Siccome è $\mathrm{I}_1\sigma^2 = (\mathrm{I}_1\sigma)^2 - 2\,\mathrm{I}_2\sigma$ (*A. V. G.*, I, p. 114) e $\mathrm{I}_2\sigma$ è la curvatura totale della superficie, la formula del testo esprime la derivata normale della curvatura media mediante il quadrato di questa curvatura e la curvatura totale.

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1948.

1) E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* « Atti Acc. Torino », *48*, n. 5 1912 13; *Recenti progressi nella gometria proiettiva differenziale degli iperspazi* «Proceed. of the Fifth Int. Congr. of. Mathem.» Cambridge 1912, vol. II; *Alcune proprietà proiettivo differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi.* « Rend. Circ. Mat. di Palermo » *37* (1914).

2) Si dice spazio S (r) osculatore in un punto di una varietà V_k, lo spazio contenente gli S_r osculatori alle curve di V uscenti dal punto considerato. Confronta la seconda delle Note citate in (1).

3) Un altro interessante esempio di V_4 che possiede superficie quasi-asintotiche è stato dato da M. VILLA. *Sulle superficie quasi-asintotiche della* V_4^6 *di* S_8 *che rappresenta le coppie di punti di due piani.* « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I (1940).

Nel precedente lavoro il VILLA introduce per le varietà quasi asintotiche un carattere

Nella presente Nota, generalizzando il risultato del Bogdan, determino una classe di varietà V_{k+1} che ammettono varietà quasi-asintotiche di tutte le dimensioni h con $2 \leq h \leq k$. Ritengo l'esempio interessante poichè credo sia il primo al riguardo.

2. Richiamo dapprima il risultato ottenuto dal Bogdan.

Considerata la $F_2^{n^2}$ di Veronese, che rappresenta le C^n piane, il piano tangente in un punto fisso A e l'S $(n-1)$-osculatore in un punto P, hanno in comune un punto Q. Al variare del punto P, si ottiene una varietà V_3 luogo delle rette PQ.

Indicato con R un punto della V_3, si ha:

$$R(x_1, x_2, \rho) = P(x_1, x_2) + \rho\, Q(x_1, x_2).$$

Se si pone $\rho = \rho(x_1, x_2)$, il punto R descrive una superficie (non rigata) della V_3. Il Bogdan ha determinato che la *condizione perchè la superficie sia quasi-asintotica è che la funzione* $\rho(x_1, x_2)$ *sia una funzione omogenea di grado* $n-1$.

3. Consideriamo ora la varietà di Veronese $\Phi_k^{n^k}$ di S_N con $N = \binom{n+k}{n} - 1$ che rappresenta le forme F_{k-1}^n di un S_k.

La Φ_k contiene $\infty^{2(k-1)}$ C^n (normali) corrispondenti alle $\infty^{2(k-1)}$ rette di S_k: per due punti di Φ_k passa una C^n. Ne segue che l'S_k' tangente in un punto A di Φ_k e l'S $(n-1)$-osculatore in un suo punto, P, hanno un punto Q comune. Tenuto fisso il punto A al variare di P, le rette PQ descrivono una V_{k+1}.

Se s'indicano con $x_1, x_2, \cdots, x_k$ le coordinate non omogenee dell'S_k, la V_{k+1} è descritta dal punto

$$R(x_1, \cdots, x_k, \rho) = P(x_1, \cdots, x_k) + \rho\, Q(x_1, \cdots, x_k).$$

Se $A(1, 0, \cdots, 0)$ è il punto fisso, per le coordinate di Q si ha: $Q(n, x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$. Il fatto che le coordinate del punto Q dipendono linearmente dai parametri x_i, fa si che si estende senz'altro alla V_{k+1} il risultato di Bogdan, ossia se si pone $\rho = \rho(x_1, \cdots, x_k)$ il punto R descrive una V_k della V_{k+1} e la condizione affinchè la V_k sia quasi-asintotica è che la funzione ρ sia omogenea di grado $n-1$.

Posto ora:

$$x_{k+j} = v_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k-h)$$

proiettivo, la *specie*, che dipende dalla dimensione d dello spazio congiungente l'S (r) e l'S (s) osculatori considerati nella definizione di varietà quasi-asintotica.

Per altri lavori confronta quelli citati nella Memoria di M. Villa, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*. «Memorie Acc. Sc. di Bologna», ser. IX, vol. X (1943).

le equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho = \rho(x_1, \cdots, x_h) \\ y_j = y_j(x_1, \cdots, x_h) \end{cases}$$

determinano una varietà V_h della V_{k+1}.

Se si esprime la condizione affinchè la V_h con $2 \leq h \leq k$ sia quasi-asintotica per la V_{k+1} si ha che:

Considerata la $\Phi_k^{n^k}$ *rappresentante le forme* $F_{k\ \ 1}^n$ *di un* S_k, *lo* $S\,(n-1)$-*osculatore in un suo punto variabile* P *interseca in un punto* Q *l'*S_k *tangente in un punto fisso* A *di* Φ: *condizione necessaria e sufficiente perchè la* V_h *definita dalle equazioni* (1) *sia quasi-asintotica per la* V_{k+1} *luogo delle rette* PQ, *è che la* $\rho(x_1, \cdots, x_h)$ *sia una funzione omogenea di grado* $n-1$ *e che le* $y_j(x_1, \cdots, x_h)$ *siano funzioni omogenee di primo grado* (4).

Nel caso che le y_j siano funzioni lineari delle x_i $(i = 1, 2, \cdots, h)$ il risultato è geometricamente evidente.

Matematica. — *Sur quelques inégalités pour les dérivées des fonctions et les différences des suites.* Nota (*) di N. OBRECHKOFF, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Dans cette Note nous démontrons quelques inégalités pour les dérivées des fonctions réelles et pour les différences des suites de nombres réels.

I. *Soit* $f(x)$ *une fonction reélle qui pour* $x > a$ *admet la dérivée* $f^{(n)}(x)$ *non négative pour* $x > a$. *Supposons qu'il existe une suite de nombres*

$$(1) \qquad y_1, y_2, y_3, \cdots$$

indéfiniment croissants et un nombre entier m, $0 \leq m < n$, *tels que l'on a*

$$(2) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = 0.$$

Alors pour $x > a$ *on a*

$$(3) \qquad (-1)^{n-m} f^{(m)}(x) \geq 0.$$

De plus si pour un $x = b > a$ $f^{(m)}(x)$ *s'annulle cette fonction sera égale à zero pour tous les* $x > b$.

Supposons que le théorème est démontré pour $n-1$. Parce que $f^{(n)}(x) \geq 0$ la fonction $f^{(n-1)}(x)$ est non décroissante pour $x > a$. Soit pour un α $f^{(n-1)}(\alpha) = C > 0$. Donc pour $x \geq \alpha$ on aura $f^{(n-1)}(x) \geq C$. En intégrant $(n-1)$ de fois on obtient d'ici

$$(4) \qquad f(x) \geq C \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + P(x),$$

(4) I calcoli per la dimostrazione analitica nel caso $k = 3$, $n = 3$ si trovano sviluppati nella tesi di laurea (Università di Roma) della sig.na G. NICOLETTI.

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1948.

où $P(x)$ est un polynome de degré $\leqq n-2$. Donc

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}\geqq\frac{C}{(n-1)!}>0\,, \tag{5}$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses du théorème. Cela nous montre que $f^{(n-1)}(x)\leqq 0$ pour $x>a$. Si $m=n-1$ l'inégalité (3) est démontrée. Si $m<n-1$ on a

$$(-1)^{n-1-m}f^{(m)}(x)\leqq 0\quad,\quad x>a\,,$$

d'où il suit que $(-1)^{n-m}f^{(m)}(x)\geqq 0$. La première partie du théorème énoncé est ainsi démontrée.

Soit maintenant $f^{(m)}(b)=0$, $b>a$. Dans le cas où $m=n-1$ la fonction $f^{(n-1)}(x)$ étant non décroissante et non positive de $f^{(n-1)}(b)=0$ il suit évidemment que $f^{(n-1)}(x)=0$, $x\geqq b$. Si $m<n-1$ du théorème il suit que

$$(-1)^{n-m-1}f^{(m+1)}(x)\geqq 0\,,$$

ce qui nous montre que la fonction $(-1)^{n-m-1}f^{(m)}(x)$ est non décroissante et non positive pour $x\geqq b$, c'est-à-dire $f^{(m)}(x)=0$ pour tour les $x\geqq b$.

Soient maintenant $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions réelles qui admèttent pour $x>a$ les dérivées $\varphi^{(n)}(x)$ et $\psi^{(n)}(x)$ et supposons que pour une suite (1) et pour un nombre entier m , $0\leqq m<n$ les limites

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\varphi(y_\lambda)}{y_\lambda^m}=B\quad,\quad\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\psi(y_\lambda)}{y_\lambda^m}=C \tag{6}$$

existent. Si

$$\psi^{(n)}(x)\leqq\varphi^{(n)}(x) \tag{7}$$

pour $x>a$, on aura

$$(-1)^{n-m}[\psi^{(m)}(x)-m!\,C]\leqq(-1)^{n-m}[\varphi^{(m)}(x)-m!\,B] \tag{8}$$

pour tous les $x>a$.

Cette proposition découle immédiatement du théorème I, en considérant la fonction auxiliaire

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x)-x^m(B-C) \tag{9}$$

pour laquelle on a $f^{(n)}(x)\geqq 0$ et (2). La remarque pour le signe d'égalité dans (8) reste naturellement valable.

Si au lieu de (7) on a

$$|\psi^{(n)}(x)|\leqq|\varphi^{(n)}(x)| \tag{10}$$

la fonction $\varphi^{(n)}(x)$ ne changeant pas son signe pour $x>a$ on aura au lieu de (8) l'inégalité suivante:

$$|\psi^{(m)}(x)-m!\,C|\leqq|\varphi^{(m)}(x)-m!\,B|\,. \tag{11}$$

En effet si $\varphi^{(n)}(x)\geqq 0$ pour $x>a$ l'inégalité (10) est équivalente à

$$-\varphi^{(n)}(x)\leqq\psi^{(n)}(x)\leqq\varphi^{(n)}(x)$$

d'où il suit que

$$(-1)^{n-m-1}[\varphi^{(m)}(x) - m!\,B] \leqq (-1)^{n-m}[\psi^{(m)}(x) - m!\,C] \leqq$$
$$\leqq (-1)^{n-m}[\varphi^{(m)}(x) - m!\,B]$$

c'est-à-dire l'inégalité (11). Si pour une valeur $b > a$ de x on a le signe d'égalité dans (11) le même signe reste valable dans (11) pour tous les $x \geqq b$.

On a de plus: Dans le théorème I on peut ajouter les égalités

$$(12)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m} = 0\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}} = 0\ ,\cdots,\ \lim_{x\to\infty} f^{(m)}(x) = 0\ ,\quad \lim_{x\to\infty} f^{(i)}(x) = 0\ ,$$
$$m+1 \leqq i \leqq n-1\ ,\quad (-1)^{n-i} f^{(i)}(x) \geqq 0\ ,\quad m+1 \leqq i \leqq n\ ,\quad x > a\ .$$

En effet de (3) on a, $x > a$,

$$(-1)^{n-m-1} f^{(m+1)}(x) \geqq 0\ .$$

Donc si $n-m$ est pair, la fonction $f^{(m)}(x)$ doit être non croissante et par conséquence elle doit tendre vers une limite B lorsque $x \to \infty$. D'après la régle d'Hospital on aura alors $\lim_{x\to\infty} f(x)/x^m = m!\,B$, d'où et de (2) il suit que $B = 0$. Si $n-m$ est impair $f^{(m)}(x)$ sera non décroissante et on obtient analogiquement le même résultat. Les autres égalités de (12) se démontrent de la même manière. Par la même méthode [1] on peut démontrer des autres inégalités. Par exemple citons le théorème suivant:

II. *Soit* $f(x)$ *une fonction réelle qui pour* $x > a$ *admet la dérivée* $f^{(n+1)}(x)$ *et supposons que pour un nombre positif* α *on a* $\alpha f^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x) \geqq 0$ *pour* $x > a$ *et qu'ils existent une suite* (1) *et un nombre entier* m, $0 \leqq m < n$, *tels que l'on a l'inégalité* (2). *Alors pour* $x > a$ *on a*

$$(13)\qquad (-1)^{n-m}[\alpha f^{(m)}(x) + f^{(m+1)}(x)] \geqq 0\ .$$

En effet la fonction $\varphi(x) = \alpha f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x)$ sera non décroissante pour $x > a$. Si pour un c, $\varphi(c) = C > 0$ on aura $\varphi(x) \geqq C$ pour $x > c$, d'où l'on tire que

$$f(x) \geqq \frac{C}{\alpha}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + P(x) + (-1)^n\frac{C}{\alpha^n}e^{-\alpha(x-c)}\ ,$$

ou $P(x)$ est un polynome de degré $\leqq n-2$. Mais alors on aura

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}} > 0\ ,$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Donc on a $\varphi(x) \leqq 0$ pour $x > a$ et la démonstration s'achève comme chez le théorème précédent. On a la même remarque pour le signe d'égalité dans (13) et des inégalités analogues aux (8) et (11).

Par la même méthode de démonstration on obtient des inégalités pour les différences des suites. Citons, par exemple, le théoreme:

(1) Pour une autre méthode on peut voir ma Note de «Comptes Rendus», *223*, p. 370 (1946).

III. *Soit* $\{a_n\}_1^\infty$ *une suite infinie de nombres réels et supposons qu'ils existent une suite de nombres réels et entiers* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ *indéfiniment croissants et un nombre entier* $m \geqq 0$ *tels que* $a_{\lambda_i}/\lambda_i^m$ *tend vers* A *lorsque* $\lambda_i \to \infty$. *Désignons par*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \quad ; \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n, \cdots,$$

les différences de la suite $\{a_n\}$ *et supposons que pour un* $p > m$ *les différences* $\Delta^p a_n$ *sont non négatives pour* $n > N$. *Alors on a*

$$(14) \qquad (-1)^{p-m}(\Delta^m a_n - m!\,A) \geqq 0$$

pour $n > N$. *Si pour un* q $\Delta^m a_q = m!\,A$ *on aura* $\Delta^m a_n = m!\,A$ *pour tous les* $n > q$. *Comme consequence on aura encore*

$$\lim \frac{a_n}{n^m} = A \quad , \quad \lim \frac{\Delta a_n}{n^{m-1}} = mA, \cdots, \lim \Delta^m a_n = m!\,A \quad , \quad (n \to \infty)$$

$$\lim \Delta^i a_n = 0 \quad , \quad m+1 \leqq i < p \,(n \to \infty) \quad , \quad (-1)^{p-i}\Delta^i a_n \geqq 0 \quad ,$$

$$m+1 \leqq i \leqq n \quad , \quad n > N.$$

Naturéllement au moyen d'une suite auxiliaire on peut tirer de ce théorème des inégalités analogues aux (8) et (11) concernant deux suites de nombres.

Matematica (Geometria). — *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate.* Nota(*) di G. Saban, presentata dal Corrisp. B. Segre.

1. In una Nota recente(1) il Segre, facendo uso d'un lemma a lui pure dovuto(2) e che qui anch'io utilizzerò, ha dimostrato che la torsione integrale d'un curva chiusa sghemba, cioè l'integrale $\oint |\tau|\, ds$, ove s e τ sono rispettivamente l'arco e la torsione della curva, è sempre maggiore d'una costante positiva definita in funzione della curva mediante considerazioni geometriche assai semplici. Il lemma del Segre dice che: *Una qualunque linea chiusa di Jordan giacente su di una sfera, che sia rettificabile e di lunghezza* L *non superiore a quella di un circolo massimo, e che non consti di due archi (distinti o sovrapposti) di circolo massimo cogli estremi in comune, appartiene sempre per intero a qualche calotta sferica di raggio sferico* $r < L/4$. Il risultato di Segre per la torsione integrale può raffrontarsi ad

(*) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1948.

(1) B. Segre, *Sulla torsione integrale delle curve chiuse sghembe.* « Rend. Accad. Naz. Lincei », *3*, pp. 422-426 (nov. 1947).

(2) B. Segre, *Sui circoli geodetici di una superficie a curvatura totale costante che contengono nell'interno una linea assegnata.* « Boll. Un. Mat. Ital. », *13*, pp. 279-283 (1934).

uno del Fenchel [3] sulla curvatura integrale: $\oint \rho \, ds \geqq 2\pi$, ove ρ è la curvatura della curva chiusa.

In questa Nota pervengo a teoremi analoghi per alcuni invarianti fondamentali, che intervengono nello studio delle superficie rigate col metodo dualistico [4]. Richiamati dapprima brevemente i risultati di tale teoria dei quali intendo valermi (n. 2), nei nn. 3, 4 e 5 definisco il *primo orientamento* di una superficie rigata, giungendo ad un teorema integrale del tipo di quelli dianzi indicati: nel fare ciò seguo passo passo i ragionamenti di Segre, conservando anche per quanto possibile le notazioni e le diciture di questo Autore, onde meglio far risaltare l'analogia. Nel n. 6, definito il *secondo orientamento* di una rigata, giungo similmente ad un secondo teorema integrale. Tratto infine delle classi di superficie per le quali l'uno o l'altro di due integrali particolari della teoria delle rigate si annulla.

2. È noto che, nello spazio ordinario, una retta R può venir rappresentata da un vettore dualistico unitario [5]

$$\vec{R} = \vec{r} + \varepsilon \vec{\bar{r}} \qquad (\varepsilon^2 = 0),$$

dove $\vec{r}$ è il versore di R ed $\vec{\bar{r}}$ denota il momento di tale versore rispetto alla origine. Se la retta G_1, definita mediante $\vec{G_1} = \vec{g_1} + \varepsilon \vec{\bar{g}_1}$, è funzione d'un parametro reale u, G_1 genera una superficie rigata, $\mathfrak{R}_1$, avente $G_1 = G_1(u)$ come equazione. Ad ogni generatrice $\vec{G_1}$ di $\mathfrak{R}_1$ si può associare una terna ortogonale positiva $(\vec{G_1}, \vec{G_2}, \vec{G_3})$ così definita: $\vec{G_1}$ è la generatrice medesima, $\vec{G_2}$ denota la normale alla rigata $\mathfrak{R}_1$ nel punto centrale di $\vec{G_1}$, $\vec{G_3}$ è la retta che completa la terna. La rigata $\mathfrak{R}_3$ generata dalla retta $\vec{G_3}$ riceve il nome di *rigata aggiunta* della $\mathfrak{R}_1$, ed ha in comune con questa la linea di strizione.

Per la terna mobile così definita il Blaschke ha dimostrato le seguenti formule, analoghe a quelle di Frenet per le curve sghembe:

(3) W. FENCHEL, *Ueber Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*. «Math. Ann.», *101*, pp. 238–252 (1929).

(4) W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. 1, J. Springer, Berlin, pp. 267 e sg. (1930).

(5) Per la teoria di cui qui si fa uso ved. specialmente BLASCHKE, loc. cit. Cfr. pure i lavori di L. BIRAN, K. ERIM e G. SABAN nella «Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul», vol. VI, VIII, X, XI e XIII, quelli di W. HAAK sulle congruenze in «Math. Zeitschr.», Bd. *40*, *41*, *43* ed in «Monatsch. für Math. und. Phys.», Bd. *44*, nonchè le tesi (dell'Università di Leida) di N. H. KUIPER e Ph. DWINGER.

$$(1)\qquad \begin{cases} \vec{G}_1' = \quad * \quad P\vec{G}_2 \quad * \\ \vec{G}_2' = -P\vec{G}_1 \quad * \quad + Q\vec{G}_3 \\ \vec{G}_3' = \quad * \quad -Q\vec{G}_2 \quad * \end{cases}.$$

Qui

$$P = p + \varepsilon\bar{p} \qquad \text{e} \qquad Q = q + \varepsilon\bar{q}\,,$$

i parametri di distribuzione di $\mathfrak{R}_1$ ed $\mathfrak{R}_3$ essendo rispettivamente

$$(2)\qquad \delta_1 = \bar{p}/p \qquad \text{e} \qquad (3)\qquad \delta_3 = \bar{q}/q\,;$$

se, come noi supporremo, il parametro u di G_1 uguaglia l'arco s della linea di strizione, le P e Q denominansi rispettivamente la *curvatura* e la *torsione dualistica* di $\mathfrak{R}_1$. Va rilevato che la superficie $\mathfrak{R}_1$ è un cilindro se $p = 0$, è sviluppabile se $\bar{p} = 0$, ammette un piano direttore se $q = 0$, ed ha una superficie aggiunta sviluppabile se $\bar{q} = 0$.

Dirò *superficie rigata « ordinaria »* una rigata per cui q si annulli in al più un numero discreto di punti, e definirò poi (n. 7) le *superficie rigate « generali »*; chiamerò inoltre *superficie rigata « aperta »* o *« chiusa »* una superficie rigata la cui linea di strizione sia rispettivamente aperta o chiusa.

3. Sia G_1 una retta descrivente una rigata ordinaria $\mathfrak{R}_1$, aperta o chiusa, dotata di curvatura dualistica continua: $P = p + \varepsilon\bar{p}$. Fissato nello spazio un punto O, e definito nel modo usuale il versore $\vec{g}_1$ della generatrice $\vec{G}_1$, consideriamo il punto

$$Q = O + \vec{g}_1\,;$$

quando la generatrice G_1 si muove descrivendo la superficie $\mathfrak{R}_1$, il punto Q varia con continuità sulla sfera unitaria S di centro O, descrivendo una curva $\mathfrak{D}_1$. Servendosi della parte reale della prima delle formule (1) si dimostra facilmente che l'elemento d'arco di tale curva, nota col nome di « indicatrice sferica delle generatrici », è $d\sigma_1 = p\,ds$; è chiaro che $\mathfrak{D}_1$ risulta chiusa se tale ha la superficie $\mathfrak{R}_1$.

Notiamo che *l'indicatrice sferica delle generatrici* $\mathfrak{D}_1$ *di una superficie rigata ordinaria* $\mathfrak{R}_1$ *non può contenere nessun arco di curva piana*, nè tanto meno ridursi ad un punto. Invero, se un arco di $\mathfrak{D}_1$ giacesse in un piano sarebbe

$$\vec{g}_1 \times \vec{v} = 0\,,$$

ove $\vec{v} \neq 0$ denoti un vettore costante normale a quel piano. Per la porzione della linea di strizione corrispondente a tale arco le generatrici della superficie rigata sarebbero parallele ad un piano: ciò implicherebbe $q = 0$ in tutti i punti di quella porzione, contrariamente al supposto. D'altronde, poichè la $\mathfrak{D}_1$ non può ridursi ad un punto, così dev'essere $d\sigma_1 = p\,ds \neq 0$, e cioè

$p \neq 0$, sicchè la superficie $\mathfrak{R}_1$ non può essere cilindrica (d'accordo col fatto ch'essa non può nemmeno avere un piano direttore).

Può darsi che la curva $\mathfrak{D}_1$ venga incontrata da tutti i circoli massimi di S, od altrimenti su S esiste qualche circolo massimo privo di punti a comune con $\mathfrak{D}_1$. Il primo caso ha luogo se, e soltanto se, ogni piano dello spazio risulta parallelo ad una generatrice di $\mathfrak{R}_1$, cioè se ogni direzione dello spazio è ortogonale a qualche generatrice di $\mathfrak{R}_1$: diremo allora che la rigata ordinaria $\mathfrak{R}_1$ ha per *primo orientamento*

$$o_1 = 2\pi .$$

Nel secondo caso vi è un emisfero di S non avente punti interni od al contorno in comune con $\mathfrak{D}_1$: possiamo allora considerare il minimo r dei raggi sferici delle calotte di S contenenti $\mathfrak{D}_1$, ed assumere

$$o_1 = 4r$$

come primo orientamento di $\mathfrak{R}_1$; è chiaro che attualmente risulta

$$0 < o_1 \leq 2\pi .$$

4. Diremo col Segre, per brevità, che *una direzione appartiene ad un diedro*, quando questo contiene una semiretta parallela ad essa ed avente l'origine in un punto del suo spigolo. Usando tale locuzione, e conservando le notazioni e le ipotesi del n. 3, proveremo che:

Se esiste un diedro tale che ogni direzione che gli appartenga sia ortogonale a qualche generatrice di $\mathfrak{R}_1$, *allora risulta*

$$o_1 \geq 2\alpha , \tag{4}$$

dove o_1 *denoti il primo orientamento di* $\mathfrak{R}_1$ *ed* α *sia la misura del diedro in radianti.*

Ammettiamo per assurdo che non valga la (4), e cioè che sia $o_1 < 2\alpha$. Sarà dunque $o_1 < 2\pi$, in quanto è $\alpha < \pi$, onde (n. 3) la curva $\mathfrak{D}_1$ appartiene ad una calotta Σ di S avente raggio sferico $r = o_1/4 < \pi/2$. La calotta sferica supplementare di Σ avrà il diametro sferico

$$d = \pi - 2r = \pi - o_1/2 > \pi - \alpha ;$$

potremo dunque considerare una calotta sferica Σ_1, ad essa completamente interna, il cui diametro d_1 soddisfi alle

$$d > d_1 > \pi - \alpha . \tag{5}$$

Ogni punto di Σ_1 sta sopra un diametro di S, tale che il piano diametrale a questo ortogonale non ha punti in comune con Σ, e quindi neppure con $\mathfrak{D}_1$. Ne consegue che la direzione di quel diametro non appartiene al diedro considerato nel precedente enunciato, e quindi appartiene al diedro a questo supplementare, di ampiezza $\pi - \alpha$. Ciò significa che la calotta Σ_1, di diametro sferico d_1, è contenuta in uno spicchio sferico determinato da due

piani diametrali di S formanti fra loro l'angolo $\pi - \alpha$, il che implica la limitazione $d_1 \leq \pi - \alpha$. Questa contraddizione colle (5) prova la (4).

5. Supponiamo ora, più particolarmente, che la rigata ordinaria $\mathfrak{R}_1$ sia chiusa: allora (in virtù del n. 3) pure $\mathfrak{D}_1$ risulta chiusa, e di lunghezza L_1 uguale alla parte reale della curvatura dualistica integrale della rigata $\mathfrak{R}_1$:

$$L_1 = \oint p \, ds , \tag{6}$$

dove l'integrale va esteso alla linea di strizione della rigata $\mathfrak{R}_1$ percorsa una sola volta nel verso positivo. Dimostreremo che

La parte reale della curvatura dualistica integrale della rigata ordinaria $\mathfrak{R}_1$ *è sempre maggiore del primo orientamento* o_1 *di* $\mathfrak{R}_1$ $(0 < o_1 \leq 2\pi)$, ossia in simboli

$$\oint p \, ds > o_1 . \tag{7}$$

Combinando le (4) e (6) seguirà che, *nelle ipotesi del n. 4, risulta altresì*

$$\oint p \, ds > 2\alpha . \tag{8}$$

Ammettiamo per assurdo che non sussista la (7), e cioè, in forza della (6), che sia

$$L_1 \leq o_1 \leq 2\pi .$$

In virtù del n. 1, la curva $\mathfrak{D}_1$ appartiene conseguentemente per intero a qualche calotta sferica di raggio $r < L_1/4$; questo raggio soddisfa pertanto alla $r < o_1/4$, il che è in disaccordo colla definizione del primo orientamento o_1 data del n. 4. Questa contraddizione prova la (7).

6. Supponiamo che la rigata ordinaria $\mathfrak{R}_1$, precedentemente considerata, abbia anche la torsione dualistica $Q = q + \varepsilon \bar{q}$ continua. Consideriamo allora l'indicatrice sferica delle generatrici, $\mathfrak{D}_3$, della rigata aggiunta $\mathfrak{R}_3$, ossia il luogo, tracciato sulla sfera unitaria S′ di centro O′, del punto

$$Q' = O' + \vec{g}_3 ;$$

l'elemento d'arco di questa curva vale $d\sigma_3 = q \, ds$. Chiameremo *secondo orientamento* o_2 della rigata $\mathfrak{R}_1$ il primo orientamento della sua rigata aggiunta $\mathfrak{R}_3$, così utilizzando la curva $\mathfrak{D}_3$; questa non ha nessun arco giacente in un piano poichè, la torsione dualistica di $\mathfrak{R}_3$ essendo $-P$, ciò implicherebbe $p = 0$, relazione da escludersi in base al n. 3. Si deduce dunque subito dal teorema precedente la limitazione

$$L_2 = \oint q \, ds > o_2 , \tag{9}$$

dove l'integrale va esteso alla linea di strizione della rigata $\mathfrak{R}_3$, ossia (n. 2) alla linea di strizione della $\mathfrak{R}_1$, percorsa una sola volta nel verso positivo. Si ha pertanto che:

La parte reale della torsione dualistica integrale della rigata $\mathfrak{R}_1$ *è sempre maggiore del secondo orientamento* o_2 *di* $\mathfrak{R}_1$ $(0 < o_2 \leq 2\pi)$, ossia in simboli.

$$\oint q\, ds > o_2 .$$

7. Consideriamo da ultimo le superficie rigate chiuse per cui o

$$\oint \bar{p}\, ds = 0 , \quad \text{oppure} \quad \oint \bar{q}\, ds = 0 .$$

Se $\vec{G}_1$ e $\vec{G}_1 + d\vec{G}_1$ (risp. $\vec{G}_3$ e $\vec{G}_3 + d\vec{G}_3$) sono generatrici infinitamente vicine di $\mathfrak{R}_1$ (risp. $\mathfrak{R}_3$), si ha che la distanza fra esse, $d\bar{\varphi}$ (risp. $d\psi$), misurata lungo la perpendicolare comune è [6]

$$d\bar{\varphi} = \bar{p}\, ds \qquad (\text{risp. } d\psi = \bar{q}\, ds) .$$

La linea di strizione di $\mathfrak{R}_1$ (e cioè di $\mathfrak{R}_3$) passa per le intersezioni della perpendicolare comune con le generatrici considerate; dunque:

$$\bar{p}\, ds \leq ds \qquad (\text{risp. } \bar{q}\, ds \leq ds) ,$$

eppertanto

$$\oint \bar{p}\, ds \leq L \qquad (\text{risp. } \oint \bar{q}\, ds \leq L) ,$$

dove L denota la lunghezza della linea di strizione di $\mathfrak{R}_1$ (ed $\mathfrak{R}_3$), gli integrali curvilinei essendo estesi alla linea di strizione (la quale è chiusa) percorsa una sola volta in verso positivo.

Si vede facilmente che esistono varie classi di rigate per le quali l'uno o l'altro degli integrali considerati si annulla. Così, ad esempio, poichè le espressioni (2) e (3) per i parametri di distribuzione delle rigate $\mathfrak{R}_1$ ed $\mathfrak{R}_3$ hanno rispettivamente al numeratore $\bar{p}$ e $\bar{q}$, risulta che, se $\mathfrak{R}_1$ o $\mathfrak{R}_3$ è una rigata sviluppabile, il primo o risp. il secondo degli integrali dianzi considerati è nullo. D'altra parte, scelto comunque un numero η positivo, si può sempre trovare una superficie a parametro di distribuzione costante per la quale uno dei due integrali precedentemente considerati abbia η per limite inferiore: basta infatti scegliere δ_1 (risp. δ_3) in modo che

$$\bar{p} = \varepsilon_1 p \qquad (\text{risp. } \bar{q} = \varepsilon_2 q)$$

e

$$\varepsilon_1 o_1 \geq \eta \qquad (\text{risp. } \varepsilon_2 o_2 \geq \eta) .$$

(6) N. H. KUIPER, *Onderzoekingen over lijnenmeetkunde*. Amsterdam, 1946.

Rammentiamo infine che (7)

$$\int \bar{p}\, ds = \int \vec{t} \cdot \vec{g}_3\, ds = \int \vec{g}_3 \cdot \vec{dr}\,,$$

$$\int \bar{q}\, ds = \int \vec{t} \cdot \vec{g}_1\, ds = \int \vec{g}_1 \cdot \vec{dr}\,,$$

dove $\vec{t}$ denota il versore tangente e $\vec{dr}$ l'elemento tangente alla linea di strizione. Segue, che gli integrali di sopra uguagliano risp. la circolazione di $\vec{g}_3$ e di $\vec{g}_1$ lungo la linea di strizione, ond'essi si annullano se $\vec{g}_3$ e $\vec{g}_1$ possono considerarsi come derivanti da un potenziale.

Diremo *generali* quelle superficie rigate che non rientrano in nessuna delle sette classi seguenti: *a*) Superficie a piano direttore, *b*) superficie sviluppabili, *c*) superficie ad aggiunte sviluppabili, *d*) superficie a parametro di distribuzione costante, *e*) superficie ad aggiunte aventi parametro di distribuzione costante, *f*) superficie le cui generatrici sono tangenti lungo la linea di strizione ad un tubo di forza in un campo potenziale, *g*) superficie le cui aggiunte sono tangenti lungo la linea di strizione ad un tubo di forza in un campo potenziale. In base a ciò che precede, *per ogni rigata generale valgono le ineguaglianze*

$$0 < \oint \bar{p}\, ds \leq L \quad , \quad 0 < \oint \bar{q}\, ds \leq L\,,$$

ossia *la parte dualistica della curvatura dualistica integrale e la parte dualistica della torsione dualistica integrale sono sempre comprese fra zero e la lunghezza* L *della linea di strizione della rigata* (8).

(7) Ved. BLASCHKE, loc. cit.

(8) Ricordando che col metodo dualistico una rigata appare come una curva tracciata sulla sfera dualistica unitaria, saremmo condotti ad introdurre la curvatura sferica dualistica integrale:

$$\oint \sigma\, dS\,,$$

ove $\sigma = Q/P$ è la curvatura dualistica sferica e $dS = P\, ds$ denota l'elemento d'arco dualistico; ma poichè

$$\oint \sigma\, dS = \oint Q\, ds\,,$$

tale nozione non presenta interesse.

Meccanica. — *Su una proprietà della meccanica dei corpi continui e una deduzione geometrica della legge di Hooke.* Nota (*) di G. B. PACELLA, presentata dal Socio G. ABETTI.

In questa Nota (1) ci si occupa di una particolare questione relativa alla distribuzione degli sforzi e della deformazione infinitesima dei mezzi continui isotropi.

Nella prima parte si mette in particolare rilievo l'esistenza di quartiche sferiche indicatrici di elementi piani soggetti ad uno stesso sforzo normale, ed in particolare della quartica degenere fra queste costituita dalla coppia di sezioni circolari centrali di certa quadrica di pressione; si accenna poi alle proprietà analoghe che si hanno trattando le deformazioni infinitesime in luogo degli sforzi, e si mostra che, in caso di validità della legge di Hooke, le stesse quartiche sferiche sono anche indicatrici di direzioni secondo cui è costante l'allungamento unitario.

Nella seconda parte si mostra che, in base all'isotropia del mezzo, ammettendo la coincidenza delle quartiche degli sforzi normali e di quelle di deformazione, si può dedurre una relazione tra deformazione e sforzi formalmente coincidente con la legge di Hooke e che a questa si riduce come caso particolare.

1. Com'è noto, in un mezzo continuo la componente normale dello sforzo specifico $\mathbf{\Phi}_n \times \boldsymbol{n}$ che si esercita sull'elemento piano di normale $\boldsymbol{n}$ per punto O è:

$$\mathbf{\Phi}_n \times \boldsymbol{n} = \Phi_1 \alpha^2 + \Phi_2 \beta^2 + \Phi_3 \gamma^2 \tag{1}$$

dove α, β, γ sono i coseni direttori di $\boldsymbol{n}$ e $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$ sono gli sforzi principali per O.

Lasciando costante il valore del primo membro e facendo variare $\boldsymbol{n}$, l'estremo di questo descrive una quartica sferica giusta quanto si rileva dal secondo membro: rimane quindi definita sulla sfera unitaria una quartica luogo degli estremi della normale agli elementi piani per O sui quali lo sforzo normale assume quel valore prefissato. Può dirsi anche che gli elementi piani per O, in dipendenza dello sforzo normale cui sono assoggettati, inviluppano una semplice infinità di coni, ciascuno coordinato ad una quartica, nel senso che il cono che proietta questa ed il cono degli elementi piani sono supplementari.

Consideriamo ora la famiglia di quadriche di pressione (v. ad esempio Marcolongo, *Mecc. Raz.*, II)

$$\Phi_1 x^2 + \Phi_2 y^2 + \Phi_3 z^2 = \text{cost.} \tag{2}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 giugno 1948.

(1) Redatta in captività a Jinja (Uganda) salvo la parte dell'inversione alla quale fui interessato dal prof. B. Caldonazzo, che qui mi è grato ringraziare.

Preso su una di esse un punto che individua un raggio vettore R orientato secondo $\alpha\,\beta\,\gamma$, la (2) può scriversi

$$R^2 (\Phi_1 \alpha^2 + \Phi_2 \beta^2 + \Phi_3 \gamma^2) = \text{cost.}$$

Posto qui R = 1, vale a dire tagliando la (2) con la sfera unitaria, si ottiene la quartica

$$\Phi_1 \alpha^2 + \Phi_2 \beta^2 + \Phi_3 \gamma^2 = \text{cost.} \tag{3}$$

e se la costante vale $\boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{n}$, questa quartica coincide con la (1). Ad ognuna delle quadriche (2) appartiene dunque quella delle quartiche (1) che corrisponde allo stesso valore della costante e che si ottiene appunto segando la quadrica con la sfera unitaria.

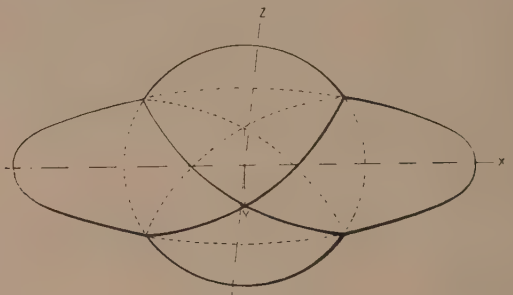


Fig. 1. – Sfera unitaria ed ellissoide si toccano agli estremi dell'asse Y: la quartica si spezza in due cerchi.

È noto che, a seconda del caso fisico presentato, le quadriche (2) sono tutte ellissoidi oppure due serie distinte di iperboloidi, rispettivamente ad una e a due falde. In seguito alla loro generazione, le quadriche omologhe sono omotetiche ed hanno gli stessi assi. $\boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{n}$ assume tutti e soli i valori compresi tra il minore e il maggiore degli sforzi principali $\Phi_1 \gtrless \Phi_2 \gtrless \Phi_3$. Riferendosi al caso degli ellissoidi, nella serie ve ne sono tre con un semiasse unitario, ed è unitario il maggiore per l'ellissoide minimo, il minore per l'ellissoide massimo, il mediano per certo ellissoide intermedio. L'ellissoide minimo è tutto interno alla sfera, il massimo è tutto esterno, l'inter-

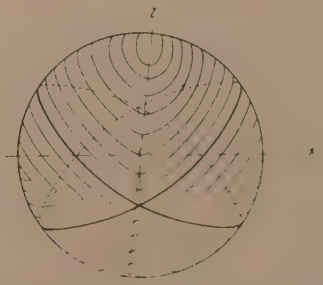


Fig. 2. – Le varie quartiche di pressione.

medio è tagliato dalla sfera secondo due cerchi appartenenti a due piani diametrali dell'ellissoide: secondo due sezioni circolari dunque. In ogni coppia di punti antipodi, in cui la sfera è tagliata dagli assi principali, la sfera tocca uno dei tre ellissoidi: la tangenza agli estremi dell'asse mediano si ha con l'ellissoide intermedio detto sopra, ed avviene allorchè, col crescere dell'ellissoide nella serie, i due rami di quartica intersezione con la sfera si tagliano in due punti antipodi: da quel momento, coll'ulteriore variare dello ellissoide, i rami di quartica mutano orientazione, cioè, fino alla tangenza questi ultimi intorniano un asse, e di poi intorniano l'altro asse. Fatti del genere avvengono nel caso degl'iperboloidi. A ciascun ramo di quartica corrisponde un inviluppo di elementi piani luogo effettivo del fatto. Fra questi inviluppi ve ne sono due degeneri; infatti a ciascuno dei cerchi

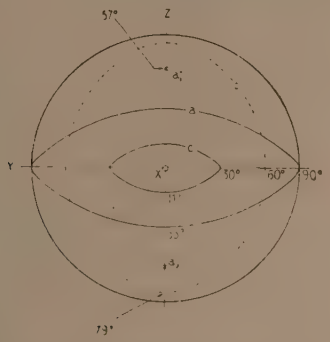


Fig. 3. – Una quartica di pressione c, ed i due semicerchi a (la quartica a è presente col solo ramo prossimo al semiasse X). La tratteggiata c' rappresenta sulla sfera il cono inviluppo luogo degli elementi piani per il centro della sfera sui quali si esercita uno sforzo normale costante. Allorchè la quartica di pressione è la a, il cono inviluppo corrispondente degenera nei due fasci a_1'' e a_2''.

– sezioni circolari – in cui si spezza la quartica ricordata prima, corrisponde tutto un fascio di elementi piani a_1'', o a_2'' sui quali lo sforzo normale è costante. I sostegni dei due fasci sono gli assi delle due sezioni circolari. Dunque la quartica dei due cerchi è limite, separatrice ed a corrispondenza singolare.

Vale la pena di stabilire direttamente l'esistenza di questi due fasci di elementi piani.

Sia $\boldsymbol{u}$ il vettore unitario parallelo al sostegno di uno dei fasci; esso è da determinarsi in modo che, detto $\boldsymbol{v}$ un vettore arbitrario ed unitario, si abbia (dopo aver sostituito Φ_1, Φ_2, Φ_3, con a, b, c per brevità di scrittura)

$$\boldsymbol{\Phi}_u \times \boldsymbol{n} = a\frac{(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2}{I_{23}^2 + I_{31}^2 + I_{12}^2} + b\frac{(u_3 v_1 - u_1 v_3)^2}{I_{23}^2 + I_{31}^2 + I_{12}^2} + c\frac{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}{I_{23}^2 + I_{31}^2 + I_{12}^2} = h$$

dove h è costante e ΣI^2 è la somma dei quadrati a numeratore. Perciò in questa equazione a, b, c, h, sono assegnate, v_i sono arbitrarie, u_i sono le incognite.

Poniamo successivamente nella (3) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$bu_3^2 + cu_2^2 = h(u_3^2 + u_2^2)$$
$$au_3^2 + cu_1^2 = h(u_3^2 + u_1^2)$$
$$au_2^2 + bu_1^2 = h(u_2^2 + u_1^2)$$

da cui

$$(c - h)u_2^2 + (b - h)u_3^2 = 0$$
$$(c - h)u_1^2 + (a - h)u_3^2 = 0$$
$$(b - h)u_1^2 + (a - h)u_2^2 = 0.$$

Ne discende la condizione:

$$\begin{vmatrix} 0 & c-h & b-h \\ c-h & 0 & a-h \\ b-h & a-h & 0 \end{vmatrix} = 2(a-h)(b-h)(c-h) = 0.$$

In base a ciò si hanno tre soluzioni possibili:

$$(4) \qquad \begin{cases} h = a & u_1 = 0 & (c-a)u_2^2 + (b-a)u_3^2 = 0 \\ h = b & u_2 = 0 & (c-b)u_1^2 + (a-b)u_3^2 = 0 \\ h = c & u_3 = 0 & (b-c)u_1^2 + (a-c)u_2^2 = 0 \end{cases}$$

di cui una sola accettabile dipendente dal modo di schierarsi di a, b, c; e se è $a \gtrless b \gtrless c$, riesce $h = b$ e $u_2 = 0$. Il sostegno $\boldsymbol{u}$ quindi giace nel piano X Z, e la componente normale è $\boldsymbol{b}$.

Circa l'orientazione di $\boldsymbol{u}$, il quale è da localizzarsi ormai nel piano XZ, è da utilizzarsi la seconda delle (4) e, detto θ l'angolo di $\boldsymbol{u}$ con Z e ripresi i simboli Φ, risulta

$$(5) \qquad \operatorname{tg}^2\theta = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_3 - \Phi_2}.$$

Si hanno dunque due valori utili θ e $-\theta$, in corrispondenza due assi, e però due fasci di elementi piani.

Così conducendo la ricerca, non è stata particolarizzata la quadrica in un ellissoide, ed è confermato che esistono due fasci di faccette con gli assi a_1'', a_2'' perpendicolari alla pressione mediana principale, sulle quali la componente normale di pressione è costantemente uguale alla pressione principale mediana.

3. Passando alle deformazioni ricordiamo che l'allungamento unitario e_r secondo la direzione α, β, γ, quando ci si riferisca alla terna delle dilatazioni principali e_1, e_2, e_3 per il punto, è

$$(6) \qquad e_r = e_1\alpha^2 + e_2\beta^2 + e_3\gamma^2.$$

Ad ogni direzione è associata una e_r ed una quadrica di deformazione. La e_r tuttavia, si addice ad una quartica sferica luogo degli indici delle direzioni lungo le quali è costante e_r.

È evidente che si potrebbe ripetere punto per punto quanto si è detto per le quartiche di pressione; ma è facile notare che oltre ad essere superflua la ripetizione, le stesse quartiche ottenute quale luogo di costante componente normale di pressione sono anche luogo di costante allungamento unitario supposto che valga la legge di Hooke, e però un'unica terna principale per gli sforzi e per le deformazioni. Riportiamo infatti le relazioni che traducono la legge di Hooke per i mezzi isotropi

$$e_1 = \frac{1}{E}[\Phi_1 - \varkappa(\Phi_2 + \Phi_3)]$$

$$e_2 = \frac{1}{E}[\Phi_2 - \varkappa(\Phi_3 + \Phi_1)]$$

$$e_3 = \frac{1}{E}[\Phi_3 - \varkappa(\Phi_1 + \Phi_2)]$$

moltiplichiamole rispettivamente per α^2, β^2, γ^2 e sommiamole dopo aver posto $\Sigma\Phi = s$; ne discende:

$$(7) \qquad e_r = \frac{1}{E}[(\varkappa + 1)(\Phi_1 \alpha^2 + \Phi_2 \beta^2 + \Phi_3 \gamma^2) - \varkappa s]$$

e da qui è chiaro che lungo la quartica sferica caratterizzata da

$$\Phi_1 \alpha^2 + \Phi_2 \beta^2 + \Phi_3 \gamma^2 = \text{cost.}$$

riesce costante anche e_r e viceversa.

Le quartiche sferiche di pressione coincidono con le quartiche di dilatazione; lungo ognuna di esse, nel senso specificato, è costante l'allungamento unitario e la componente normale dello sforzo.

Questo è un aspetto più generale di una verità già nota (Appell, *Mec. Rat.*, III, 1921, p. 615): La quadrica direttrice degli sforzi e l'ellissoide delle dilatazioni relativi ad un punto d'un mezzo continuo omogeneo, isotropo, elastico hanno gli stessi piani principali e le stesse sezioni circolari.

Un risultato complementare che interessa notare è che la costante K $(= e_r)$ della quartica (e) riesce legata alla costante h $(= \boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{n})$ della corrispondente e identica quartica (Φ) della relazione

$$(7 \text{ bis}) \qquad k = \frac{\varkappa + 1}{E} h - \frac{\varkappa}{E}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)$$

come infatti si deduce dalla (5).

4. Da quanto precede si può rilevare – com'è già noto – che la legge di Hooke per i mezzi isotropi importa per ogni punto, almeno nel caso statico, che direzioni principali e sezioni circolari – o più generalmente, come si è mostrato, le quartiche sopra specificate – sia degli sforzi, sia delle deformazioni coincidano.

Si può dimostrare, come ora faremo, che reciprocamente la coincidenza delle terne principali e delle sezioni circolari – o più generalmente delle quartiche di cui sopra – porta ad una legge che contiene come caso particolare

quella di Hooke. Cosicchè questa legge si può far discendere da fatti prevalentemente geometrici e relativi alla distribuzione degli sforzi e della deformazione in quanto a sforzo maggiore corrisponde allungamento unitario maggiore ed analogamente per il minore. Conduce altresì a postulare la coincidenza delle sezioni circolari – e più in generale delle quartiche di cui sopra si è trattato – in quanto a sforzi normali uguali debbono corrispondere allungamenti unitari uguali.

Indichiamo dunque con $\Phi_1\,\Phi_2\,\Phi_3$ ed $e_1\,e_2\,e_3$ gli sforzi principali e gli allungamenti unitari corrispondenti rispettivamente, con α, β, γ i coseni direttori d'un generico versore. Siano h e k i corrispondenti valori dello sforzo normale e dell'allungamento unitario. Si ha

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi_1\,\alpha^2 + \Phi_2\,\beta^2 + \Phi_3\,\gamma^2 = h \\ e_1\,\alpha^2 + e_2\,\beta^2 + e_3\,\gamma^2 = k \end{cases}$$

ed al variare del versore, cioè di α, β, γ, queste definiscono le quadriche che tagliate dalla superficie sferica unitaria dànno luogo a due quartiche corrispondenti ad uno sforzo normale costante e ad uno allungamento unitario costante. Imponiamo per l'ipotesi fatta che coincidano. Ciò esige che una delle equazioni del sistema lineare in α^2, β^2, γ^2

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \Phi_1\,\alpha^2 + \Phi_2\,\beta^2 + \Phi_3\,\gamma^2 &= h \\ e_1\,\alpha^2 + e_2\,\beta^2 + e_3\,\gamma^2 &= k \end{aligned}$$

sia conseguenza delle altre. Per questo occorre e basta che si abbia simultaneamente

$$(9)\qquad k = l\,h + m$$

e

$$(10)\qquad \begin{cases} e_1 = l\,\Phi_1 + m \\ e_2 = l\,\Phi_2 + m \\ e_3 = l\,\Phi_3 + m \end{cases}$$

con l ed m *indipendenti* da α, β, γ.

Ciò mette in evidenza che l'allungamento unitario è funzione lineare del corrispondente sforzo normale, ciò che deve verificarsi – data l'indipendenza di $\alpha\ \beta\ \gamma$ – per qualunque versore.

La coincidenza delle due sole quartiche (8) porta alla legge (9) e (10) e da questa, si deduce che la quartica generica indicatrice di sforzo normale h' coinciderà con quella indicatrice di allungamento unitario k', purchè h' e k' siano legate da (9): basta moltiplicare le (10) per α'^2, β'^2, γ'^2 rispettivamente e sommare. In particolare coincideranno le note sezioni cicliche come, del resto, può dedursi direttamente dalle (9), dalle quali si trae l'ugualianza dei rapporti

$$\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_2} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_3 - \Phi_2},$$

pur di tener presente il significato di essi che risulta dall'equazione (5).

Abbiamo già rilevato che l ed m sono invarianti (indipendenti da α, β, γ), perciò essi sono in generale funzioni del posto e degli sforzi attraverso i loro invarianti.

La legge espressa dalle (9) è manifestamente più generale della legge di Hooke, in quanto non è lineare in generale. Se s'impone quest'ultima circostanza, l deve risultare indipendente dagli sforzi ed m deve essere funzione lineare ed omogenea dell'invariante primo degli sforzi stessi, l'omogeneità essendo richiesta dal volere che a sforzi nulli corrisponda deformazione nulla. In tal caso possiamo porre

$$m = -n(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)$$

con n funzione soltanto del punto, e le (10) assumono la forma

$$e_1 = (l - n)\left[\Phi_1 - \frac{n}{l - n}(\Phi_2 + \Phi_3)\right]$$

$$e_2 = (l - n)\left[\Phi_2 - \frac{n}{l - n}(\Phi_3 + \Phi_1)\right]$$

$$e_3 = (l - n)\left[\Phi_3 - \frac{n}{l - n}(\Phi_1 + \Phi_2)\right].$$

Se infine l ed n sono costanti, queste ultime relazioni coincidono con la legge di Hooke e per l ed n si ha

$$l - n = \frac{1}{E} \quad ; \quad n = \frac{\varkappa}{E}.$$

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di Urano effettuate nel 1946-1947.* Nota di A. M. VERGNANO, presentata(*) dal Socio G. CECCHINI.

Questa Nota inizia una raccolta di determinazioni sistematiche della Ascensione retta dei grandi Pianeti, cominciate nel 1946 per incarico del Direttore dell'Osservatorio astronomico di Torino, prof. G. Cecchini. In essa vengono riferiti i risultati delle osservazioni di Urano nei mesi intorno alla data delle opposizioni del 1946 e del 1947.

Lo strumento adoperato è il piccolo Cerchio meridiano di Bamberg, usato come strumento dei passaggi, situato nella prima sala meridiana. Le osservazioni sono state eseguite usando un micrometro a fili fissi e i passaggi sono stati registrati su di un cronografo connesso con il pendolo Mioni, controllato con il pendolo fondamentale Riefler.

Gli intervalli filari del micrometro sono stati accuratamente determinati con l'osservazione dei passaggi di 412 stelle per ognuno dei 15 fili. I valori conclusi per la distanza equatoriale di ciascun filo dal filo centrale

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

sono indicati nella tabella I, dove i numeri romani distinguono i successivi fili nell'ordine secondo cui sono attraversati da una stella in culminazione superiore, con lo strumento ad Est.

TABELLA I.

I	$30^s.333$	$\pm 0^s.0026$ e. m.	IX	$3^s.824$	$\pm 0^s,0017$ e. m.
II	26 ,351	24	X	7 .398	20
III	22 ,689	23			
IV	18 .910	21	XI	15 ,164	18
V	15 ,116	17	XII	9 ,124	21
			XIII	22 ,738	24
VI	7 ,545	21	XIV	26 .440	22
VII	3 ,699	21	XV	30 .201	25

Il metodo impiegato della determinazione nella Ascensione retta di Urano è quello differenziale.

La scelta delle stelle di riferimento da osservare insieme ad Urano è stata fatta in modo da soddisfare alle seguenti condizioni:

1° che il pianeta si trovasse approssimativamente nel baricentro del sistema di stelle osservate in ciascuna sera;

2° che la differenza fra le declinazioni delle stelle e quella del pianeta non superasse un grado e mezzo;

3° che la differenza di grandezza del pianeta e delle stelle non eccedesse le due grandezze.

Con tali criteri di scelta sono stati realizzati i seguenti vantaggi:

1° non era necessario apportare alcuna correzione agli istanti dei passaggi per tener conto dell'andamento dell'orologio, poichè tali correzioni risultavano uguali e contrarie per le stelle precedenti e seguenti il passaggio in meridiano di Urano. La costanza dell'andamento dei Mioni veniva verificata quotidianamente o per confronto con il Riefler o, direttamente, mediante determinazioni di tempo.

2° Le correzioni per l'azimut strumentale, inclinazione, collimazione e aberrazione diurna risultavano praticamente uguali per tutte le stelle e per il pianeta come facilmente si ricava differenziando rispetto alla declinazione la formola del Mayer, e ponendo $d\delta$ uguale a 90 primi di arco.

Il valore dell'azimut ricavato da alcune determinazioni complete del tempo t di $-0^s.15$; verifiche eseguite in ogni giorno di osservazione, mediante collimazione ad una mira lontana, hanno dimostrato l'assoluta stabilità dello strumento.

TABELLA II.

Data	AR di Urano	O—C	Stelle di confronto
	Opposizione 1946–1947.		
1946 dicembre 5	$5^h\,16^m\,37^s,13$	$-0^s,05$	1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13
9	15 53 ,12	00	1, 4, 5, 6, 7, 9, 13
10	15 42 ,03	— 03	1, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13
11	15 30 ,98	— 03	1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13
21	13 41 ,03	+ 03	1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13
23	13 19 ,39	— 01	1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13
28	12 26 49	00	1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13
29	12 16 ,11	— 03	1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13
1947 gennaio 2	11 35 .64	+ 01	1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 13
3	11 25 ,81	+ 05	2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13
4	11 16 01	+ 02	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13
7	10 47 37	00	2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13
10	10 19 .85	00	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13
11	10 10 .95	00	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10
12	10 2 .25	+ 06	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
14	9 45 ,15	+ 05	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
16	9 28 .65	+ 03	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10
18	9 12 .84	+ 07	2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13
19	9 5 ,13	+ 05	2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13
febbraio 6	7 18 ,70	+ 01	2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13
11	7 0 .89	00	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13
12	6 57 .95	— 03	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13
13	6 55 ,37	+ 07	2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13
15	6 50 ,60	00	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13
	Opposizione 1947–1948.		
novembre 16	5 39 47 ,17	.02	4, 7, 9, 10, 14, 15, 17
21	39 1 ,16	00	4, 5, 9, 10, 15, 16, 17
22	38 51 57	— 01	4, 5, 7, 9, 10, 15, 16, 17

Segue: TABELLA II.

Data	AR di Urano	O—C	Stelle di confronto
Continua: *Opposizione 1947–1948.*			
1947 novembre 24	$5^h 38^m 32^s,03$	$-0^s,05$	4, 5, 7, 9, 10, 15, 16, 17
25	38 22 ,10	— 06	4, 5, 7, 9, 10, 15, 16, 17
26	38 12 ,14	00	4, 5, 7, 10, 15
27	38 2 ,03	+ 01	4, 5, 7, 9, 10, 15, 16, 17
dicembre 5	36 37 ,96	— 02	4, 5, 7, 9, 10, 15, 16, 17
7	36 16 ,22	— 05	4, 5, 7, 10, 11, 15
10	35 32 ,25	— 02	4, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17
11	35 21 ,21	+ 02	4, 5, 7, 10, 11, 15, 16, 17
13	34 58 ,96	+ 03	4, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17
21	33 29 ,80	+ 01	4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 17
22	33 18 ,74	+ 02	4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 17
27	32 23 ,87	00	2, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 17
31	31 40 ,96	+ 01	2, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 17
1948 gennaio 1	31 30 ,40	+ 02	2, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 17
3	31 9 ,53	+ 03	2, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 17
10	29 59 ,47	+ 06	2, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 17
12	29 40 ,43	+ 04	2, 4, 5, 6, 14, 15, 16, 17
30	27 15 ,92	+ 01	2, 4, 5, 6, 14, 15, 17
febbraio 1	27 3 ,36	+ 04	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
2	26 57 ,31	00	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
3	26 51 ,50	— 01	2, 4, 5, 6, 14, 15, 17
5	26 40 ,50	— 01	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
7	26 30 ,31	— 03	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
8	26 25 ,50	00	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
10	26 16 ,58	— 02	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
12	26 8 ,49	— 07	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
13	26 4 ,78	01	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17
17	25 52 ,16	— 01	2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 17

Corrispondenza con i numeri N. G. C. del Boss:

1 = 5957	7 = 6458	13 = 7148
2 6044	8 6506	14 7283
3 6158	9 6807	15 7483
4 6213	10 6916	16 7610
5 6267	11 7107	17 7827
6 6413	12 7113	

Il valore della inclinazione, sebbene variabile entro certi limiti nel corso dei mesi per cui si estesero le osservazioni, rimaneva però costante in ogni singola sera, come verificavo controllando le letture della bolla orizzontale dello strumento, che, d'altra parte, non subiva altri movimenti che la piccola rotazione per le successive puntate.

La collimazione è di $+ 0^s,23$ secondi di tempo.

Le stelle di confronto furono tutte desunte dal *General Catalogue* del Boss. Dalle posizioni apparenti calcolate di 4 in 4 giorni deducevo la posizione apparente per la data dell'osservazione; con esse formavo un sistema di 6-8 stelle cercando, quanto mi fosse possibile, di variare di sera in sera il sistema per diminuire al massimo l'effetto di un eventuale errore nella posizione per effetto dei moti propri.

La tabella II riassume i risultati delle osservazioni: nella prima colonna è la data della osservazione, nella seconda la Ascensione retta ricavata, nella terza la differenza O—C tra il risultato della osservazione e quello del calcolo in base alle effemeridi di Urano contenute nel *Nautical Almanac*. I numeri dell'ultima colonna, infine, richiamano il numero del catalogo del Boss secondo lo specchietto in calce alla tabella II.

Prendendo le medie dei valori degli O—C sopra riportati e riferendoli all'epoca media dei passaggi osservati si ottengono i valori del seguente quadro in cui N è il numero di osservazioni ed e. m. l'errore medio del risultato.

Epoca media	N	O—C	e. m.
1947,02	24	$+ 0^s,010$	$0^s,007$
1948,05	31	+ 0 ,008	0 ,005

Come si vede, le correzioni in Ascensione retta sono sempre positive, in accordo colle correzioni ottenute dal Morgan [1] e con quelle ottenute

[1] R. MORGAN, *On the positions of Neptune and Uranus* in «Astronomical Journal», vol. XXXIII, n. 772.

nell'Osservatorio di Monte Mario [2]. Anche la loro entità è, come ordine di grandezza, in buon accordo [3] con le determinazioni sopra citate (in media $+0^s.055$).

Mi è gradito ringraziare il prof. Cecchini per la cura con la quale seguì il mio lavoro, impartendomi consigli e suggerimenti.

Astronomia. — *Le osservazioni delle stelle doppie con micrometri a birifrangenza e un tipo di micrometro progettato e costruito all'Osservatorio di Collurania.* Nota di G. Peisino, presentata [*] dal Socio L. Carnera.

Gli astronomi osservatori sono generalmente concordi nell'affermare che il micrometro filare non risolve che parzialmente il difficile problema della misura delle piccole distanze angolari sulla sfera celeste. Lasciando da parte il caso delle misure delle piccolissime distanze, per le quali il metodo micrometrico è al limite delle sue possibilità e cede perciò il posto a metodi vari [1], fra i quali primeggiano quelli interferenziali, e prendendo in considerazione solo il caso delle normali misure di stelle doppie, è noto come le osservazioni micrometriche siano affette da errori relativamente grandi, che per di più seguono leggi assai complicate, specialmente per quanto riguarda la determinazione della distanza fra le due componenti. Si può dire che l'insieme dei dati ottenuti dalle osservazioni eseguite in corrispondenza di una data epoca su di una doppia, ci consenta appena di situare la stella satellite nel centro di un'ellisse, allungata nella direzione del raggio vettore, il cui diametro minore rimane press'a poco costante mentre quello maggiore varia piuttosto irregolarmente al variare della distanza delle due componenti.

Ciò è dovuto essenzialmente all'influenza dell'agitazione atmosferica ed alle inevitabili oscillazioni strumentali, che spostano le immagini rispetto ai fili.

Il tentativo di ridurre al minimo queste cause di errore risale, come è noto, a molti anni addietro, ma si afferma e si concreta solamente verso il 1780 ad opera dell'abate Rochon, che per primo realizzava la possibilità di determinare piccole distanze angolari sfruttando il principio della biri-

(2) G. Armellini, *Osservazioni meridiane dei grandi pianeti nel 1945, 1946, 1947*, in « Memorie della Società astronomica italiana », Nuova serie, vol. XIX, n. 2.

(3) Nel confronto fra gli O—C ottenuti dalle presenti osservazioni e quelli ottenuti dalle osservazioni di M. Mario, devesi, naturalmente, tenere conto della differenza G. C.–FK3, fra i due sistemi G. C. ed FK3 impiegati a Pino Torinese e a M. Mario. Dal vol. I del G. C. (Appendice III), risulta: $G.C. - FK3 = +0^s.011$.

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) Nel N. 12 delle « Publications de l'Observatoire du Houga » è descritto un metodo di misura per le stelle doppie strette, ideato da G. De Vaucouleurs, che consente di determinare distanze da $0''{,}1$ a $1''$, con l'approssimazione di circa $0''.01$.

frangenza, ottenuta applicando dinanzi all'oculare del cannocchiale un prisma di quarzo, che veniva spostato lungo l'asse ottico del cannocchiale.

L'ingegnosa innovazione era ottenuta allora con mezzi assai imperfetti e costosi ed è forse questa la ragione per cui essa cedette subito il posto ai primi perfezionamenti che intanto erano stati introdotti al micrometro filare. Ma fu con questo nuovo mezzo di osservazione che vennero eseguite, dallo stesso autore, numerose determinazioni dei diametri di Venere, Marte, Giove e Saturno e lo stesso Arago impiegò per molto tempo il micrometro di Rochon ed anzi vi introdusse qualche modificazione in vista di ottenere una migliore definizione delle immagini.

Accanto ai pregi, gravi inconvenienti si erano notati in questo nuovo mezzo di osservazione: i prismi non erano acromatici ed erano imperfettamente lavorati; spostamenti sensibili introducevano in una delle due immagini fenomeni di astigmatismo, dovuti al fatto che sezioni variabili del fascio di luce venivano a cadere sulla faccia anteriore del prisma.

Recentemente all'Osservatorio di Strasburgo, ad opera di Danjon e di Müller, veniva riconosciuto il vantaggio che si può ricavare dall'uso del micrometro a doppia immagine nella misura delle stelle doppie, qualora fossero eliminati gli inconvenienti che si lamentavano in passato.

Müller realizzava così un nuovo tipo di micrometro a doppia immagine nel quale è completamente eliminato l'inconveniente dell'astigmatismo delle immagini, per il fatto che la separazione delle immagini stesse (ordinaria e straordinaria) è ottenuta spostando il prisma non nella direzione dell'asse ottico, ma bensì normalmente, parallelamente cioè al piano focale. Il prisma è fissato rigidamente all'interno del carrello destinato a spostare il filo mobile, che viene così, come tutti gli altri fili, abolito dal nuovo micrometro. La separazione delle due immagini viene letta in funzione degli spostamenti del prisma, ottenuti per mezzo della solita vite micrometrica.

Il prisma birifrangente posto dinanzi all'oculare fornisce una doppia immagine del sistema binario: facendo ruotare, mediante il congegno del cerchio di posizione, il micrometro in modo che le quattro immagini si dispongano *allineate*, la lettura al cerchio fornirà, a meno di una costante, l'angolo di posizione della coppia. Spostando poi il prisma per mezzo della vite micrometrica, le immagini ordinaria e straordinaria si sposteranno, si separeranno in modo da raggiungere in un certo istante l'*equidistanza* delle quattro immagini stellari e la distanza ρ sarà quindi immediatamente nota in funzione della lettura al tamburo della vite.

Müller ha ottenuto con questo metodo interessanti risultati [2] nella misura di stelle doppie. Questo nuovo metodo, oltre a rendere le osservazioni assai più agevoli, ne aumenta notevolmente la precisione, sopratutto per quanto riguarda la determinazione della distanza fra le due componenti, in modo che le misure secondo le due coordinate vengono ad avere all'incirca un uguale errore medio.

(2) « Journal des Observateurs », vol. XXI, n. 8 (1938).

È infatti evidente che su questo genere di osservazioni pochissima influenza possono avere le agitazioni atmosferiche e le oscillazioni strumentali: l'occhio esercitato riesce, anche se l'immagine è lievemente agitata, ad individuare con molta approssimazione quelle particolari configurazioni delle quattro immagini (allineamento ed equidistanza, oppure quadrato o losanga) in corrispondenza delle quali si leggono, sul cerchio di posizione e sul tamburo della vite, rispettivamente l'angolo di posizione e la distanza ρ.

Il micrometro di Collurania. – La bontà dei risultati ottenuti altrove col micrometro a doppia immagine mi ha così indotto a realizzare per Collurania un mezzo analogo che consentisse tuttavia l'osservazione anche col classico metodo micrometrico. L'osservazione delle stelle doppie fa parte del programma di attività dell'Osservatorio; l'equatoriale di Cooke è dotato di un micrometro filare di Troughton, col quale vennero eseguite, e tuttora continuano, osservazioni dalle quali si sarebbero potuti trarre interessanti dati di confronto qualora allo stesso strumento fosse stato applicato un micrometro a birifrangenza.

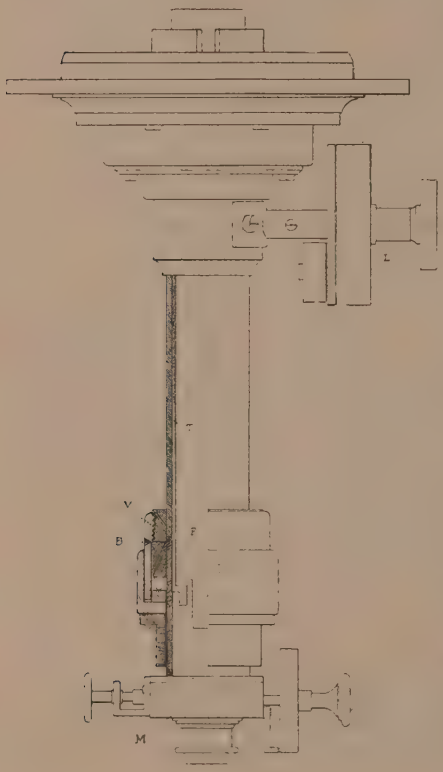


Fig. 1.

Non avendo a disposizione un prisma del tipo Müller e d'altra parte desiderando avere la possibilità di osservare il programma, fissato sera per sera, *anche col classico metodo micrometrico*, ho progettato un apparecchio basato sul dispositivo di Rochon, ma con prisma di Wollaston, che, a differenza del prisma di Rochon, fa deviare tanto il raggio ordinario quanto quello straordinario simmetricamente rispetto all'asse ottico. Le due immagini che ne risultano hanno così la stessa luminosità.

Il micrometro consta di una comune scatola micrometrica (M), munita di fili fissi e di filo mobile, posta all'estremità di un manicotto cilindrico entro il quale scorre a leggero attrito, azionato dal tamburo (L), un tubo (T) cui è fissato, dalla parte rivolta all'oculare, il prisma di Wollaston (P). La parte opposta del tubo stesso, lungo 18 cm., porta un diaframma variabile che ha il compito di limitare opportunamente la sezione del pennello di luce fornito dall'obbiettivo, allo scopo di ottenere sia una migliore definizione

delle immagini sia l'attenuazione del fenomeno di astigmatismo di cui si è parlato e che costituiva l'inconveniente più grave del micrometro di Rochon. Praticamente si riesce così ad evitare completamente questo fenomeno anche perchè lo spostamento del prisma lungo l'asse ottico è limitato ad una breve escursione che non supera mai i tre cm., escursione che consente tuttavia uno sdoppiamento atto alla misura della quasi totalità delle comuni coppie. La perdita in luminosità dovuta al prisma non è neppure sensibile, data la limpidezza del cristallo, l'eccellente sua lavorazione e le sue limitatissime dimensioni.

Il manicotto entro il quale si sposta il tubo porta–prisma e munito di una giunzione le cui due basi (B), perfettamente aderenti, possono scorrere l'una sull'altra a frizione, in modo che la scatola micrometrica e quindi il filo fisso può assumere qualunque orientamento. Un congegno a vite (V) consente di togliere dalla sua sede il prisma allorquando il micrometro deve servire come semplice micrometro filare.

L'angolo di posizione risulterà ancora individuato dalla condizione di *allineamento* delle quattro immagini.

Quanto alla distanza, se O è il centro del prisma e P il punto in cui l'asse ottico incontra il piano focale, il segmento OP rappresenterà lo spostamento del prisma lungo l'asse ottico; indicando allora con ω l'angolo formato dai due raggi (ordinario e straordinario) uscenti dal prisma e con f la distanza focale del telescopio, la distanza, in corrispondenza della posizione di *equidistanza esterna* (○○●●) fra le due coppie di immagini, sarà data da

$$\rho'' = \frac{OP \operatorname{tang} \omega}{2f} \cdot 206265$$

Determinato sperimentalmente il valore di ω (costante del prisma), le distanze ρ risulteranno conosciute in funzione degli spostamenti del prisma lungo l'asse ottico. Queste distanze saranno contate a partire dalla posizione del prisma che corrisponde alla *coincidenza* delle due immagini. A questa condizione corrisponde la posizione del prisma tale che il piano focale passi per il centro del prisma stesso; condizione che in un primo tempo nel micrometro nostro non si è potuta realizzare, appunto perchè si è voluto mantenere la possibilità di applicare il metodo micrometrico, conservando i fili sul telaio.

Ciò porta alla esclusione, in un primo tempo, delle misure, col metodo a doppia immagine, delle doppie strette. D'altra parte questo non grave inconveniente (dato il compito assegnato in questa prima fase al nuovo micrometro) viene compensato dalla possibilità di determinare in base a numerose misure micrometriche, eseguite direttamente sulle immagini sdoppiate, con tutta l'approssimazione richiesta, i valori della scala sulla quale vengono letti gli spostamenti del prisma e quindi i valori delle distanze ρ. Il micrometro filare contribuisce pertanto direttamente anche alle operazioni di taratura del micrometro, accanto alle misure eseguite su coppie campione.

Nel prisma di Wollaston impiegato a Collurania si ha:

$$\omega = 2^{\circ}\ 8',6; \quad \text{ossia in radianti:} \quad \omega = 0{,}03741 = \frac{1}{27}$$

quindi la separazione delle immagini sul piano focale di mm. 0.1 si ottiene mediante uno spostamento del prisma lungo l'asse ottico di mm. 2,7. Ora, per la vite micrometrica si ha, nel piano focale del telescopio:

$$R = \text{mm. } 0{,}21352 = 7'',446$$

e quindi lo spostamento di mm. 2,7 del prisma, corrispondente ad una notevole rotazione del tamburo, equivale ad uno *sdoppiamento angolare* di 3″,49. *Questo valore, nel caso della equidistanza esterna, equivale, come è facile verificare, a due volte la distanza* ρ *della doppia misurata.*

Ecco qui di seguito elencati, quali risultano dai dati costruttivi, i valori della *scala di corrispondenza fra i decimi di rotazione del tamburo, gli spostamenti del prisma ed i conseguenti sdoppiamenti angolari*:

rotazioni	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
				0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
OP mm.	2.0	3.5	5.0	6.5	8.0	9.5	11.0	12.5
				14.0	15.5	17.0	18.5	20.0
sdoppiamenti angolari	2″.59	4″.52	6″.46	8″.40	10″.34	12″.28	14″.22	16″.16
				18″.10	20″.04	21″.97	23″.91	25″.85

Praticamente, come già si è detto, l'osservazione di coppie campione e le misure eseguite col micrometro filare permetteranno di fissare, con sempre maggiore approssimazione, le eventuali correzioni sistematiche ai valori della scala e di costruire opportuni grafici, sempre maggiormente esatti.

Per le coppie nelle quali la distanza fra le componenti supera un certo limite, l'equidistanza è di solito ottenuta disponendo l'immagine straordinaria in modo che essa risulti in parte sovrapposta all'immagine ordinaria. Le componenti ordinarie e straordinarie risulteranno così alternate e la misura consisterà nel far sì che i due intervalli vengano divisi esattamente per metà (○ • ○ •). Si ha qui il vantaggio di evitare un eccessivo spostamento del prisma e quindi l'apparizione del difetto di astigmatismo, ma questa disposizione non è consigliabile nel caso di coppie le cui componenti abbiano grandezza sensibilmente diversa.

Nel caso invece della equidistanza esterna la misura risulta favorevole anche per coppie aventi grandezza diversissima, poichè le singole componenti vengono a disporsi sempre fra due componenti *uguali* e quindi in modo tale che all'occhio esercitato riesce facile notare anche la più lieve dissimmetria.

La speditezza con cui si possono compiere le varie operazioni consente di moltiplicare le misure, e perciò ogni osservazione si compone, di solito, di N. 5 misure in distanza, in corrispondenza di ciascuna delle due opposte configurazioni, corrispondenti alla differenza di 180° nell'angolo di posizione (• ○ • ○ ; ○ • ○ •), e di altrettante misure dei due corrispondenti angoli

di posizione. Di alcune stelle vennero eseguite misure sovrabbondanti, al fine di ottenere dati relativi alla precisione delle misure stesse. Ecco un esempio di osservazione completa e dei calcoli relativi:

Aitken 4928-3 marzo 1948

○ ○ ● ●		● ● ○ ○	
$0^R.907$	$314°.6$	$0^R.939$	$134°.5$
930	313 .0	900	131 .4
904	314 .3	900	133 .4
920	311 .8	885	132 .6
936	312 .7	906	133 .8
882	313 .5	878	133 .9
911	314 .8	924	135 .6
947	313 .2	892	133 .5
912	315 .1	890	134 .0
942	313 .8	881	133 .3
0 .919	313 .68	0 .899	133 .60

$R = 0.909$; tang $\omega = 0.03741$ — e. m. distanza $= \pm 0^R.0063$

$OP = 14.20$ mm. ; $f = 5915$ mm. $= \pm 0''.062$

$\rho = 9''.26$ $\quad \vartheta° = 46°.52$ — e. m. ang. pos. $= \pm 0°.34$

$\vartheta = 223°.64 + 46°.52 = \mathbf{270°.16}$ — ρ. tg $\Delta\vartheta = \pm 0''.056$

ed ecco altri risultati ottenuti da analoghe osservazioni eseguite in base ad ugual numero di misure:

N.	Aitken	Data	ϑ	ρ	$\Delta\vartheta$	ρ tg $\Delta\vartheta$	$\Delta\rho$	
1	5191	1948.177	133°.20	3".20	± 0°.45	± 0".025	± 0".029	equid. esterna
2	5208	.202	25 .00	6 .13	0 .24	0 .027	0 .032	»
3	5509	.221	77 .63	8 .70	0 .34	0 .051	0 .060	»
4	5245	.202	293 .82	11 .48	0 .31	0 .064	0 .083	»

Questi risultati ci possono indubbiamente suggerire le seguenti considerazioni:

il metodo di misura col micrometro a doppia immagine nell'osservazione delle stelle doppie *rende più omogenee le misure secondo le due coordinate;* ed infatti l'errore medio sulla determinazione di una distanza risulta dello stesso ordine dell'errore medio che affetta all'altra coordinata.

Se si tiene conto del senso di sicurezza che si ha nelle misure e della speditezza con cui queste vengono eseguite, si deve concludere che la precisione che si ottiene dalle osservazioni col micrometro a doppia immagine è di certo superiore a quella che è propria delle osservazioni micrometriche comuni.

Se una tale conclusione non è lecito confermare ancora in modo sufficientemente preciso, dato il modesto numero di osservazioni correnti sinora eseguito col nuovo metodo (numero non sufficiente a fornire dati statistici sicuri) i risultati ottenuti sono tuttavia così incoraggianti da consigliare la prosecuzione nel programma tracciato.

Per quanto riguarda le possibilità di impiego del micrometro a birifrangenza qui descritto si deve tenere presente la limitazione temporaneamente imposta allo scopo di potere usufruire all'occorrenza dell'impiego del micrometro filare; tale limitazione fissa per ora il limite inferiore delle distanze misurabili a 2″,26. Il limite superiore, nel caso dell'equidistanza esterna, è fissato dalla consigliabile condizione di non superare nello spostamento del prisma i 20 mm. e quindi risulta di 13″ circa. Nel caso dell'equidistanza sovrapposta si possono invece agevolmente misurare distanze anche dell'ordine di 40″.

Non ultimo fra i vantaggi dell'impiego del micrometro a birifrangenza è quello che durante la vera e propria osservazione si può benissimo fare a meno dell'illuminazione del campo, tanto più quando si abbia la garanzia che un regolare movimento d'orologeria mantenga l'immagine entro quella determinata regione del campo in cui non sono temibili errori sensibili, che possono prodursi invece quando varia troppo irregolarmente il punto di incidenza del raggio luminoso sulla faccia del prisma.

Questo primo modello subirà certamente in seguito alcune modificazioni suggerite dalla pratica dell'osservazione e dalla possibilità di poter disporre di mezzi più idonei.

Fisica (Ottica). — *Sulla forma intrinseca della trasformazione dell'interferenza inversa.* Nota di G. Toraldo di Francia, presentata(*) dal Socio G. Abetti.

§ 1. – L'interferenza inversa, pur essendo un fenomeno di carattere prettamente ondulatorio, si presta ad essere interpretata come una trasformazione di una congruenza di raggi in più congruenze di raggi(1). Anzi ho dimostrato che questa trasformazione non è che una generalizzazione di quelle dell'ottica geometrica, in quanto conserva la normalità delle congruenze. Per la dimostrazione ho fatto uso di un sistema di assi di riferimento cartesiani ortoganali x, y, z di cui x, y giacenti sul piano del diaframma diffran-

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) G. Toraldo di Francia, *Il teorema di Malus Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », II, p. 787 (1947).

gente e z orientato nel senso di propagazione della luce. Ma ci si può svincolare da questi riferimenti e dare alla trasformazione una forma vettoriale, che è molto opportuna per togliere qualsiasi dubbio sulle sue proprietà intrinseche. Applicheremo per questo il noto metodo di Sommerfeld e Runge [2].

§ 2. – Quando un'onda piana monocromatica incide su una superficie piana Σ diffrangente (che altera cioè l'ampiezza e la fase in funzione del posto), hanno origine dalla faccia di emergenza un sistema di onde piane e un sistema di onde evanescenti. Ciascuna di queste onde diffratte viene individuata per mezzo di due parametri numerici a, b. Si dice brevemente che l'onda ha l'ordine (a, b). Se indichiamo con α, β, γ i coseni direttori della normale all'onda incidente e con α', β', γ' quelli della normale all'onda diffratta di ordine (a, b), si ha

$$(1) \qquad \begin{cases} n'\alpha' = n\alpha + a \\ n'\beta' = n\beta + b \end{cases}$$

essendo n e n' gl'indici di rifrazione (che supponiamo costanti) rispettivamente del mezzo che precede e di quello che segue la superficie diffrangente Σ. Per le onde piane ordinarie è $\alpha'^2 + \beta'^2 \leq 1$ e quindi tutti e tre i coseni direttori sono reali, mentre per le onde evanescenti è $\alpha'^2 + \beta'^2 > 1$ e il terzo coseno direttore γ' è immaginario puro.

Limitandoci a considerare le onde piane ordinarie, chiamiamo $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{s}'$ rispettivamente i versori della normale all'onda incidente e all'onda diffratta di ordine (a, b). Indichiamo poi con $\boldsymbol{k}$ un vettore costante, parallelo a Σ e avente per componenti a e b. Le (1) possono allora scriversi.

$$(2) \qquad n'\boldsymbol{s}' - n\boldsymbol{s} = \mathbf{N} + \boldsymbol{k}$$

essendo $\mathbf{N}$ un vettore normale a Σ, il cui modulo è in generale funzione di $\boldsymbol{s}$.

La (2) rappresenta la trasformazione generale dell'interferenza inversa per le onde piane. Il caso particolare $\boldsymbol{k} = 0$ corrisponde alla rifrazione (o riflessione) ordinaria e dà la formula di Sommerfeld e Runge. A ciascun'onda diffratta viene associato un vettore $\boldsymbol{k}$ (autovalore vettoriale) e invece di onda diffratta di ordine (a, b) si potrà parlare, per esempio, di onda diffratta secondo il vettore $\boldsymbol{k}$.

Nel caso di un reticolo semplice di periodo $\boldsymbol{p}$ (vettore), $\boldsymbol{k}$ assume soltanto valori discreti, multipli di $\lambda \boldsymbol{p}/p^2$; se poi il reticolo è doppio ed ha i due periodi $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ ad angolo retto, $\boldsymbol{k}$ assume valori discreti della forma $m\lambda \boldsymbol{p}/p^2 + n\lambda \boldsymbol{q}/q^2$, con m e n interi.

§ 3. – Le (1) e la (2) valgono per un'onda incidente piana. Nel caso che l'onda incidente sia di forma qualsiasi, si può pensare di trasformare sepa-

2) A. SOMMERFELD und J. RUNGE, *Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik.* «Ann. der Phys.», *35*, p. 277 (1911).

ratamente ciascun elemento di superficie d'onda, cioè ciascun raggio della congruenza incidente. Perchè la cosa sia lecita e si possa ancora parlare di onda diffratta secondo il vettore $\boldsymbol{k}$, bisogna che la trasformazione (2) conservi la normalità delle congruenze.

Sommerfeld e Runge hanno dimostrato che per una congruenza di rette si ha

$$\boldsymbol{s} \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{s} = 0.$$

Ciò significa che rot $\boldsymbol{s}$ è parallelo al raggio che passa per il punto considerato. Inoltre, affinchè la congruenza sia normale, è necessaria e sufficiente la condizione

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{s} = 0.$$

Combinando queste due proprietà, si vede facilmente che per l'insieme dei raggi che *traversano* Σ la condizione necessaria e sufficiente di normalità è

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{s})_z = 0$$

cioè l'annullarsi della componente del rotore secondo la normale a Σ.

Orbene, si vede subito dalla (2) che, se è $(\operatorname{rot} \boldsymbol{s})_z = 0$, si ha anche $(\operatorname{rot} \boldsymbol{s}')_z = 0$. Dunque la trasformazione (2) mantiene la normalità delle congruenze e l'onda diffratta secondo il vettore $\boldsymbol{k}$ conserva un significato fisico ben definito, anche se l'onda incidente non è piana. (E naturalmente anche l'onda diffratta non sarà piana).

Ne consegue, fra l'altro, che un reticolo dà luogo ad un insieme discreto di onde diffratte, qualunque sia la forma dell'onda incidente. Sembra che questa proposizione, spesso ammessa di sottomano, sia qui per la prima volta dimostrata.

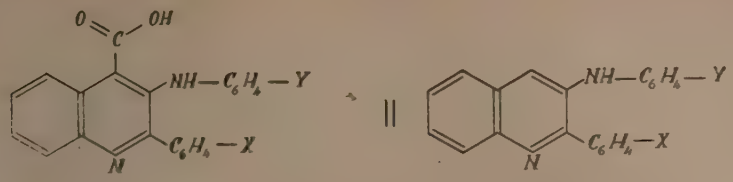
In un prossimo lavoro verranno calcolate le aberrazioni del terzo ordine delle onde diffratte.

Chimica. — *Ricerche nella serie dei diaza-fenantreni: «Cation-alocromia di chinoline e diaza-fenantren-derivati»* (*). Nota di M. Colonna, presentata (**) dal Socio G. Bargellini.

Nel corso delle mie ricerche su alcuni derivati del diaza fenantrene, a probabile azione antimalarica (1), ho avuto modo di preparare numerosi intermedi chinolinici e diaza-fenantrenici, per i quali ho osservato degli evidenti fenomeni di cation-alocromia.

Gli acidi cinconinici-I (X = H), ad esempio, sono colorati in giallo o in giallo-arancio, e se X = CH_3 (*p*, form. I), i composti che ne risultano sono anche più colorati (2):

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Bologna.
(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.
(1) «Gazz. Chim. Ital.», *78*, 502 (1948).
(2) «Boll. sci. fac. chim. ind.» (Bologna) *6* (1948) in stampa.



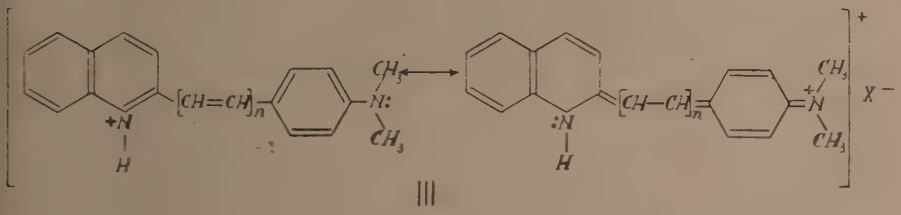
Y = H , —OCH_3 (*o* , *p*) ; —OC_2H_5 (*o* , *p*) ; —CH_3 (*o* , *m* , *p*);

X = H , CH_3 (*p*).

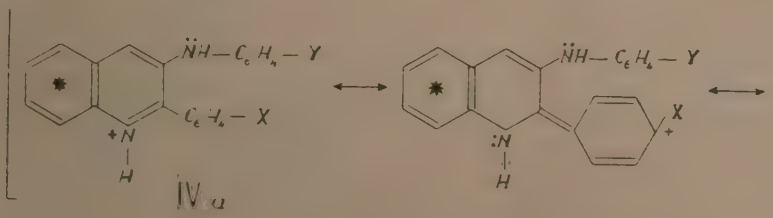
A loro volta le chinoline–II generalmente colorate in giallo più o meno chiaro, forniscono pure alocromia con gli acidi minerali e con acido picrico.

È ovvio che nel caso degli acidi cinconinici–I, si ha a che fare con una cation–alocromia che potremo chiamare di natura intra–molecolare, mentre per le chinoline–II, la cation–alocromia sarebbe di ordine extra–molecolare.

Se per le chinoline–II vogliamo renderci conto del fenomeno, potremo, come fa Brooker [3] nel caso della 2–(p–dimetilamino)–fenil–chinolina o dei suoi vinilologhi, (form. III):

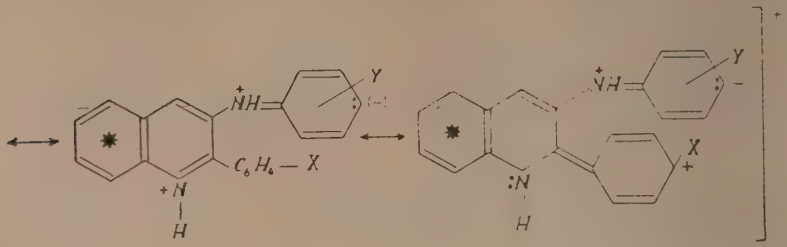


ricorrere alla seguente formulazione–(IV), dedotta dalle moderne vedute sulla risonanza delle molecole organiche [4], (nel sistema in risonanza quale qui formulato non compaiono, per ragioni tipografiche, le forme limiti « equivalenti », quelle orto–chinoidi e quelle (possibili) nelle quali interviene la coniugazione del nucleo Bz–segnato con asterisco):



(3) « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 3203 (1941).

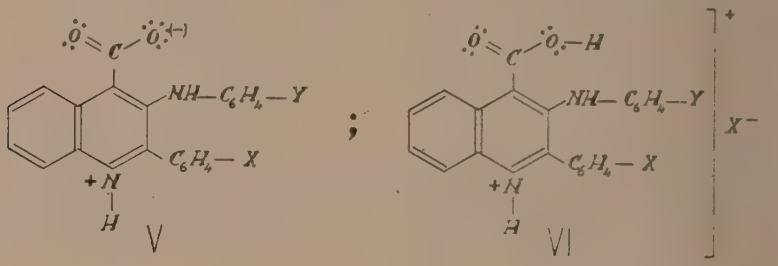
(4) Intesa secondo Pauling: WIELAND *The Theory of Resonance and its applications to organic Chemistry*, John Wiley and Sons, New York (1944). V. anche BROOKER. Nota (3).



IV *a*

dove nel sistema, la forma di-polare-IV *a*, è in definitiva quella da cui prendono origine le varie forme limiti.

Lo stesso dicasi per gli acidi cinconinici-I, alocromi intra-molecolari, le cui forme in risonanza devono ricondursi alla forma di-polare-V:



V ; VI

Che la struttura dipolare del tipo-V sia effettivamente la forma cui deve riferirsi il sistema in risonanza e dal quale prende origine il colore, risulta dalla constatazione che, ad esempio, l'acido cinconinico-I [X = H, Y = CH_3 — (m)] si presenta in due forme cromo-isomere, giallo canarino e rosso-arancione; dove, la prima si forma dal sale di sodio per precipitazione con acido acetico, la seconda per cristallizzazione da alcool o dal toluolo (le due forme hanno lo stesso punto di fusione, perchè la forma gialla per riscaldamento si trasforma nella rossa): è ovvio, che – in presenza di acidi la dissociazione del carbossile retrocede sino ad « annullare » la forma dipolare-V.

A questo punto debbo anche ricordare che gli stessi acidi cinconinici forniscono con gli acidi minerali e con acido picrico degli alocromi, che in tal caso vanno interpretati come per le chinoline (alocromia extra molecolare: form. VI).

Ora, piuttosto, è opportuno sottolineare il fatto, peraltro già accennato in principio, che gli acidi cinconinici metilati, in para nel fenile in 2 del nucleo chinolinico, sono più colorati dei corrispondenti acidi non metilati: in particolare, mentre l'acido VII è giallo arancio, l'acido VIII è colorato in rosso rubino:

VII (giallo arancio)

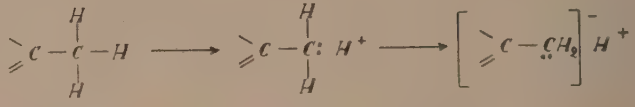
VIII (rosso-rubino)

IX

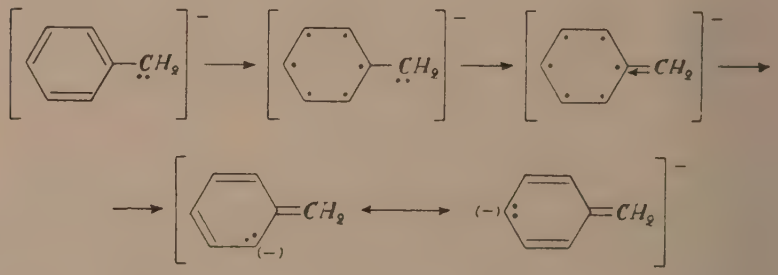
X

Se vogliamo renderci conto di questo interessante effetto ottico « giocato » dal metile (effetto che trova la sua analogia, con la più spiccata azione cancerogena di alcuni metil–idrocarburi polinucleati [5] rispetto ai non metilati) si può ricorrere alla recente teoria dell'« iperconiugazione » che, intravista sin dal 1935 da Baker e coll. [6], è stata recentemente sviluppata e interpretata, su base quantistica, da Mulliken [7] e per via spettroscopica da Jones [8].

La iperconiugazione, in breve, vuol significare che il legame C — H, ad esempio del CH_3, è sufficientemente « mobile », tanto che – se il CH_3 è legato ad un carbonio portante un doppio legame (come, per esemplificare, nel caso specifico del toluolo) – può liberare un protone: per modo che i due elettroni del legame



possono coniugarsi con gli elettroni π del gruppo legante, originando forme chinoniche:



(si avrebbe cioè in definitiva uno « schiacciamento » del metile ⇒ metile piano).

E dunque nel nostro caso (scrivendo soltanto la forma p–chinonica) si avrebbe IX ⟷ X.

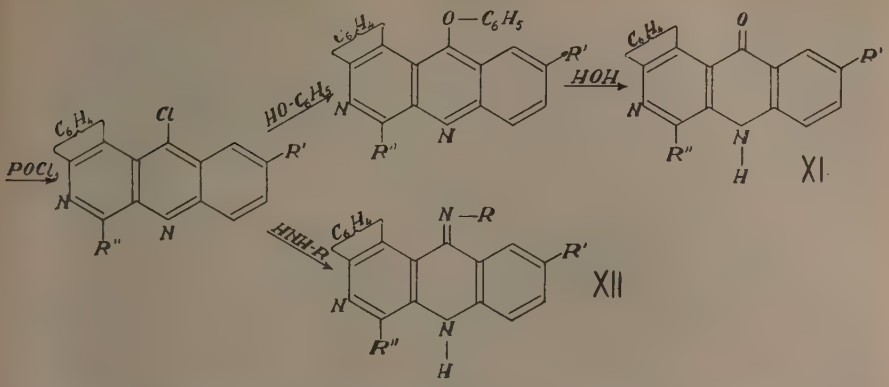
Ho potuto inoltre constatare che anche i diaza-fenantridoni–XI e le fenantridon–imine–XII:

(5) FIESER and FIESER, *Organic chemistry*. D. C. Heath and Company, p. 817 (1944).

(6) « J. Chem. Soc. », 1840, 1844, 1847 (1935): per la letteratura v. anche « J. Chem. Soc. », 191, 1942; « Rec. trav. chim. », *65*, 731 (1946).

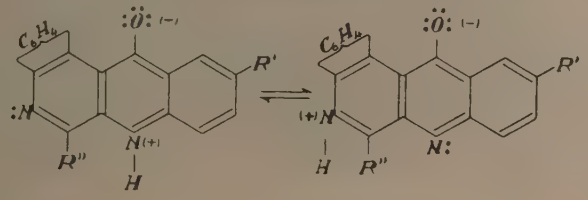
(7) « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 41 (1941); ibid., *63*, 1770 (1941).

(8) « J. Am. Chem. Soc. », *67*, 2127 (1945).



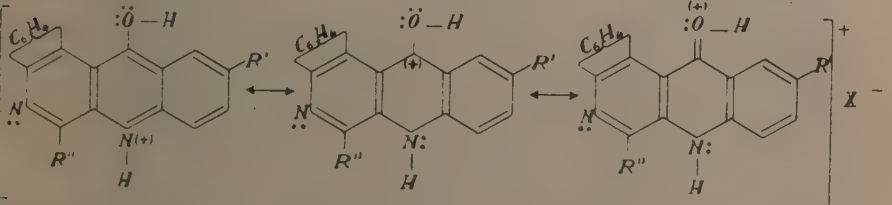
XI XII

analogamente agli acidi cinconinici–I e alle chinoline–II, presentano la cation–alocromia. Ma qui bisogna considerare che si hanno a disposizione due azoti eterociclici: di qui la possibilità delle due forme polari tautomere:



XIII XIV

le quali, indipendentemente l'una dall'altra, potrebbero dare origine a sistemi in risonanza. Però siccome la (XIV) esclude la possibilità di forme di ossonio – come graficamente è facile verificare – a meno di non prendere in considerazione forme carbeniche poco probabili, si presume che il sistema in risonanza debba svolgersi essenzialmente a spese della -XIII, come qui viene formulato:



XV

È ovvia l'estensione alle fenantridon–imine–XII, dalle quali si ottengono alocromi colorati anche sino al violetto–intenso (form. -XII: R = arile con auxocromi in para, R' = ossialchile).

Sulla parte sperimentale viene riferito in altra sede.

Le ricerche continuano.

Geologia. — *Nuove ricerche geologiche nel gruppo della Marmolada (Dolomiti)*(*). Nota di P. Leonardi, presentata(**) dal Corrisp. Gb. Dal Piaz.

Nel periodo estivo del 1947 lo scrivente ha compiuto assieme ad un gruppo di allievi una serie di escursioni nelle Dolomiti, continuando le sue ricerche in corso già da una ventina d'anni per la preparazione di una monografia generale sulla geologia di questa regione. Le ricerche in discorso si sono potute sviluppare quest'anno grazie ad una sovvenzione concessa dal Consiglio Nazionale delle Ricerche. Ritengo opportuno rendere noti in forma preliminare i risultati relativi ad una zona tra le più interessanti e complicate dal punto di vista tettonico, quella della Marmolata e della Malga Ciapela nelle Dolomiti occidentali.

Conca di Malga Ciapela (Agordino). – Nel corso dello studio geologico di questa interessante zona, finora quasi completamente trascurata dai geologi, condotto in collaborazione con l'allieva F. Decima, è emerso, fra l'altro, che il cuneo di terreni stratificati pizzicato entro la massa calcareo-dolomitica ladinocarnica del Piz Guda non comprende soltanto il Werfeniano, come risulta dalla carta geologica del territorio del Cordevole di L. Nöth (1929) e dal foglio «Marmolada» della Carta Geologica delle Tre Venezie (1930), ma anche l'Anisico, rappresentato da calcari biancastri stratificati che sono ben visibili nella galleria in corso di escavazione per gli impianti idroelettrici. Il cuneo werfeniano e gli strati anisici suddetti rappresentano il nucleo di una anticlinale con asse est-ovest il cui fianco meridionale risulta spezzato, dando origine ad una linea di frattura che divide in due parti le masse calcareo dolomitiche del versante meridionale del Piz Guda. Nella galleria succitata sono evidenti numerosi specchi di faglia in corrispondenza a questa frattura.

Sul lato opposto della conca, alla base del versante sudorientale del Pizzo Serauta (Pale dei Menin) e sulla parete meridionale del Col Fraida sono state individuate curiose masse tufacee conglomeratiche, irregolarmente intramezzate ai calcari ladinocarnici (calcare della Marmolada), le quali sembra si debbano mettere in relazione con fenomeni eruttivi a carattere esplosivo.

Nel Vallon d'Antermoia, sulle Pale dei Menin e sulla parete meridionale del Pizzo Serauta sono stati scoperti alcuni filoni porfiritici e melafirici,

*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 15 maggio 1948.

Fig. 1 - La Forcella Ombretta vista dalla Cima Ombretta. Sullo sfondo in alto la parete Sud della Marmolada. Le linee nere continue indicano linee di faglia sicure; quelle tratteggiate linee di faglia probabili. I numeri corrispondono a quelli dei profili e della serie stratigrafica descritta nel testo.

Foto Ghedina - Cortina d'Ampezzo

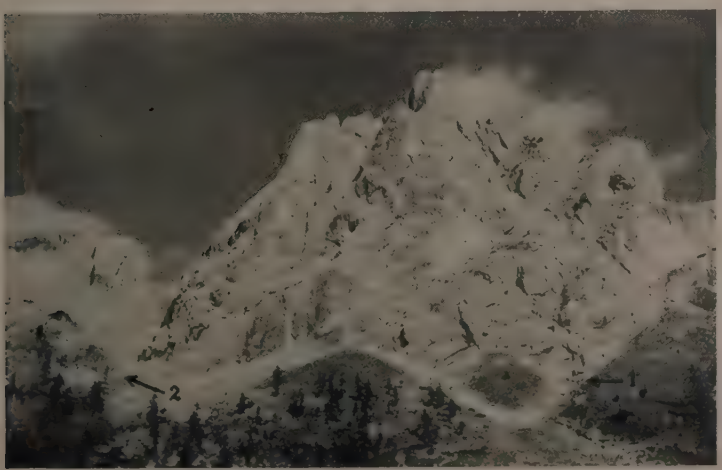


Fig. 2 – La Cima Ombretta vista dalla conca di Contrin. Il N. 1 indica l'affioramento di strati di Livinallongo (Buchenstein) in giacitura orizzontale di cui si parla nel testo. Si notino le pseudostratificazioni fortemente inclinate delle sovrastanti masse calcareo-dolomitiche della Cima Ombretta. Il N. 2 indica il punto dove venne rinvenuta (negli Strati di Livinallongo) una squama di pesce.

di cui uno, che attraversa verticalmente la parete sud della Punta Serauta, particolarmente notevole per le dimensioni e le caratteristiche litologiche.

FORCELLA OMBRETTA E ZONE CIRCOSTANTI. – In una precedente Nota [1] detti una interpretazione schematica delle condizioni del gruppo della Marmolada in corrispondenza della Forcella Ombretta e dei suoi immediati dintorni, basandomi sulle mie personali osservazioni compiute in una breve visita del 1935 e sulle interpretazioni degli Autori che precedentemente si erano occupati della zona, soprattutto sui magnifici profili dei coniugi Cornelius–Furlani [2].

Successivamente ripresi in esame la complicata struttura delle masse rocciose della Forcella nel 1946 e ultimamente nell'estate del 1947 assieme alla sig.na Franca Decima. Da queste ulteriori ricerche risulta confermata nelle grandi linee l'interpretazione dei Cornelius–Furlani e dello scrivente, secondo le quali la linea della Marmolada, che passa per la Forcella Ombretta, deriva dalla rottura del fianco intermedio di una piega completa inclinata a sud, della quale il werfeniano che affiora immediatamente a nord della Forcella rappresenta il nucleo dell'anticlinale, e il complesso tufaceo affiorante a sud il nucleo della inclinale. Si tratta insomma di una tipica piega-faglia.

Ma dal minuzioso esame compiuto nella scorsa estate risulta anche che la struttura tettonica della zona è ancor più complessa di quanto risultasse dal particolareggiato profilo dei Cornelius–Furlani (op. cit. p. 52) e dalla serie stratigrafica data dallo scrivente nel citato lavoro (p. 140).

Procedendo da nord a sud lungo lo spartiacque, la serie dei terreni affioranti sulla Forcella risulta ora essere la seguente:

1. *Calcare della Marmolada* (Parete sud della Marmolada).
2. *Strati di Livinallongo* (Sullo spartiacque sono ricoperti da detrito (15), ma affiorano immediatamente ad ovest).
3. *Dolomia del Serla* della piccola torre sovrastante il rifugio.
4. *Anisico inferiore.*
5. *Conglomerato di Richthofen.*
6. *Werfeniano.*
7. *Dolomia del Serla* (?).
8. *Strati di Livinallongo.*
9. *Milonite* corrispondente ad un piano di scorrimento.
10. *Calcare della Marmolada* parzialmente milonitizzato che si collega con alcune masse calcaree (10 *bis*) affioranti più ad ovest.
11. *Strati di Livinallongo* più o meno milonitizzati.
12. Due brandelli calcarei (*calcare della Marmolada?*) compresi entro i precedenti strati. Forse si collegano con lo spuntone calcareo (12 *bis*) affio-

1) P. LEONARDI, *Note sulla tettonica della Regione Dolomitica*. «Studi trentini», vol. XVII, 1936.

2) CORNELIUS-FURLANI, *Ueber die Tektonik der Marmolata-Gruppe (Südtirol)*. «Neues Jahrb. f. Min. etc.», vol. LVI, 1927.

rante immediatamente ad est e pure compreso tra strati di Livinallongo. La superficie superiore dello spuntone risponde ad un secondo piano di scorrimento.

13. *Complesso tufaceo ladino-carnico* attraversato da filoni porfiritici.

14. *Calcare della Marmolada* (Cima Ombretta).

Risulta dall'esame di questa successione e dagli uniti profili che mentre in complesso la struttura dell'anticlinale è abbastanza ben conservata, *la serie rispondente alla sinclinale ha subìto un intenso spezzettamento, dimodochè le sue masse rocciose si trovano quasi tutte in rapporti reciproci del tutto anormali*, tanto che è ben difficile stabilire l'esatto riferimento cronologico di alcuni brandelli isolati (per esempio N. 12 della serie).

Risulta ancora che *in corrispondenza della Forcella Ombretta la linea della Marmolada comprende non uno solo, ma almeno due o tre distinti piani di*

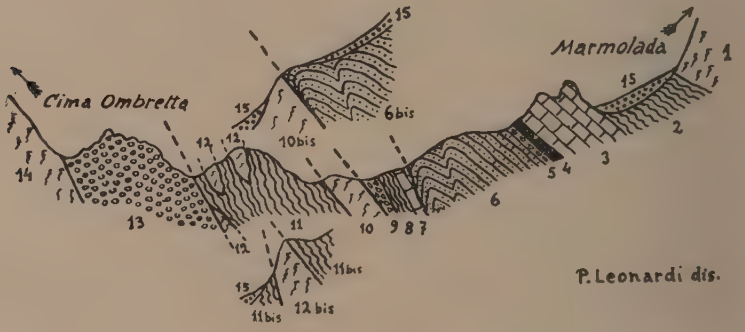


Fig. 1. – Profili geologici attraverso la Forcella Ombretta e i suoi immediati dintorni. I numeri corrispondono a quelli della serie stratigrafica descritta nel testo. Scala: 1 : 3000 circa.

faglia molto vicini, il primo dei quali corrisponde alle miloniti indicate col N. 9 e passa all'incirca nella posizione indicata nella carta geologica di S. Vardabasso [3], mentre un secondo, segnalato dai Cornelius-Furlani e confermato dallo scrivente nella Nota del 1936, risponde sulla forcella alla superficie di contatto anormale tra strati di Livinallongo (N. 11) e il complesso tufaceo-porfiritico (N. 13), e più ad est al grande specchio di faglia visibile nella superficie superiore del già citato spuntone calcareo (N. 12 *bis*) e riprodotto dallo scrivente nel precedente lavoro [4]. È probabile che un terzo piano di frattura passi tra il Werfeniano e la dolomia del Serla (?) del fianco sud della anticlinale (N. 7 della serie), mancando qui l'Anisico inferiore; ed altre fratture minori, di interesse puramente locale, intersecano le masse rocciose corrispondenti ai numeri 10–13 della serie.

(3) S. Vardabasso, *Carta geologica del territorio eruttivo di Predazzo e Monzoni*. Padova, 1930.

(4) P. Leonardi, op. cit., p. 141, fig. 3.

Cima Ombretta. - Sulle pareti della Cima Ombretta che fiancheggiano la testata della valle omonima e sul versante meridionale delle cime di questo gruppo sovrastanti alla conca di Contrin (quote 2556 e 2942) sono stati individuati 10 nuovi filoni melafirici e porfiritici, mentre alla base delle pareti della cima indicata con la quota 2556, in corrispondenza di una sorgente, è stato constatato un affioramento di Strati di Livinallongo (Buchenstein),

Fig. 2. – La Cima Ombretta vista dalla cima del Col Ombert. Le pareti sud–occidentali sono attraversate da numerosi filoni porfiritici e melafirici, di cui i numeri 1–4 indicano i principali.

Foto dell'autore

finora ignorato, che è assai importante per l'interpretazione tettonica della zona (vedi Tav. fig. 2, N. 1). Risulta infatti dalle sue condizioni di giacitura quasi perfettamente orizzontali, che le apparenti stratificazioni delle sovrastanti masse calcaree della Cima Ombretta, ben visibili nella fotografia allegata, non sono vere stratificazioni, ma piuttosto pseudostratificazioni del tipo delle « *Uebergusschichtungen* » caratteristiche delle scogliere dolomitiche di origine organica.

È interessante dal punto di vista paleontologico il rinvenimento da parte dello scrivente, negli strati di Livinallongo pizzicati entro le masse

calcareo-dolomitiche che costituiscono la base della Cima Ombretta presso l'inizio di val Rosalia (vedi tavola fig. 2, N. 2) di *una piccola squama ganoide di un pesce, che, per quanto mi consta, sarebbe il più antico finora segnalato nei depositi triassici della Regione Dolomitica* (5).

Geologia. — *La tettonica «a vortici» nei monti della Val di Sole.* Nota di C. Andreatta, presentata (*) dal Socio Gb. Dal Piaz.

Già all'inizio del secolo Hammer, durante i suoi rilevamenti geologici, aveva occasione di osservare a nord di Mezzana una grande piega a conca, che nel 1905 (bibl. 1) descriveva come formata da rocce con i piani di scistosità affioranti come un cerchio interrotto e con pendenza verso l'interno. Nella sua carta geologica pubblicata nel 1908 Hammer (bibl. 2) segna abbastanza chiaramente la formazione di una specie di imbuto da parte dei piani di scistosità nella vasta plaga formata dai versanti meridionali della catena Cima Vegaia–Cima Valletta (1).

Nella stessa carta geologica, Hammer abbozza un motivo analogo nel sottogruppo del Tonale, particolarmente attorno a Cima Palù; purtroppo la tendenza di quel tempo ad interpretare ogni rapido cambiamento nelle direzioni dei piani di scistosità mediante faglie, ha indotto lo stesso Hammer in errore nell'interpretazione tettonica della zona da lui rilevata. Lo stesso errore aveva fatto precedentemente nel segnare le zolle discordanti del Monte Pin e del Cimone delle Mandrie (bibl. 3) e nel dare nelle descrizioni una particolare interpretazione a questa « tettonica a zolle ».

Molti anni dopo gli studi di Hammer, nel 1936 Schmidegg (bibl. 4) pubblicava un lavoro nel quale dimostrava che le diverse « zolle discordanti » di Hammer corrispondevano a strette pieghe ad assi subverticali. Il lavoro dello Schmidegg fu condotto sul terreno nel 1933–35, come continuazione di ricerche sulla tettonica con pieghe ad assi subverticali, studiata da lui o da altri autori in varie regioni (Oetztaler Alpen, Val di Vizze, Defereggen). Per tali ragioni lo Schmidegg si limitò a rapide traversate che gli consentirono una visione di insieme nelle zone a tipiche « zolle discordanti ». Il suo lavoro (bibl. 4) si può così definire come uno schema sintetico che mise a punto un particolare assetto tettonico del cristallino antico delle Alpi, fatto

(5) In una mia Nota precedente segnalavo come « i primi resti di pesci rinvenuti nel Trias della Regione Dolomitica » (1946) una placca dentaria di *Asteracanthus* e un altro fossile del Raibliano del Cadore e dell'Ampezzano. In realtà erano soltanto *i primi resti rinvenuti nel Raibliano di questa Regione*, poichè erano stati descritti precedentemente da Wilckens un dente di *Acrodus* dei calcari ladinocarnici del M. Viezzena nei dintorni di Predazzo (Val di Fiemme) e da Münster e Boni vari resti di *Colobodus* degli strati di S. Cassiano di Val Badia.

(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.

1) Nella presente Nota uso per le località i nomi segnati sulle carte dell'I. G. M., quando non sono errati, nel qual caso uso i toponimi veri della dizione locale, avvertendo fra parentesi del corrispondente nome errato portato dalle carte dell'I. G. M.

rilevare in parte anche da altri autori. Schmidegg definì tali pieghe ad assi subverticali col nome di Schlingen-lacci; io preferisco usare la parola « vortici » per indicare non le singole pieghe ma i complessi di pieghe che impartiscono il fondamentale motivo a zone limitate.

Nello stesso lavoro Schmidegg faceva alcune osservazioni allo studio di due campioni di rocce del Monte Pin, studio compreso nella mia monografia sulla Val d'Ultimo: egli però equivocava parecchio, tanto che riteneva come « allgemeine Richtung » per i paragneis del Monte Pin le coordinate che io davo per il solo campione di Malga Stablei studiato, coordinate perfettamente coincidenti con quelle che lui stesso riportava. Non era scopo del mio lavoro sulla Val d'Ultimo studiare il M. Pin (per il quale accettavo l'interpretazione di struttura « a zolle » di Hammer), ma solo confrontare le rocce di una sola zona del M. Pin con quelle della catena destra della Val d'Ultimo. In un recente lavoro (bibl. 6) ho messo in risalto come alcune osservazioni sul terreno compiute dallo Schmidegg e rese note nello stesso suo lavoro (bibl. 4) siano state condotte affrettatamente. Gli equivoci nei quali egli cadde alla lettura della mia monografia sulla Val d'Ultimo sono probabilmente dovuti alla stessa causa. Sulle conclusioni dello Schmidegg, che in parte collimano con quelle della suddetta mia monografia, avrò occasione di ritornare.

Solo dopo la pubblicazione del lavoro dello Schmidegg, nello stesso 1936, io mi portavo nella Val di Peio per continuare sui versanti meridionali del gruppo dell'Ortler i miei rilievi, condotti a termine nel 1930-1935 per i versanti settentrionali. Dal 1936 al 1947 condussi osservazioni per ben dodici campagne estive sui monti della Val di Sole e delle vallate contigue, allo scopo di completare il rilievo del foglio « M. Cevedale » per conto della Sezione Geologica del Magistrato alle Acque di Venezia e dell'Ufficio Geologico di Roma.

Durante il mio lavoro di campagna ho così potuto mettere particolarmente in rilievo la caratteristica struttura tettonica « a vortici » di quella fascia di terreni scistoso cristallini che vengono a trovarsi compresi fra linee caratteristiche di dislocazione: da un lato la « linea insubrica » o « del Tonale » e la « linea delle Giudicarie » già ben note; dall'altro la « linea di Peio » che fu da me quasi interamente scoperta e ben definita per un decorso di una cinquantina di chilometri, fra S. Valpurga d'Ultimo e la Forcellina del Montozzo, e che venne poi ritrovata più ad occidente anche da Gb. Dal Piaz e rilevata infine recentemente da G. Schiavinato (bibl. 7).

Tale fascia di terreni risulta costituita da una serie di rocce aventi caratteristiche fondamentalmente diverse da quelle delle rocce a nord e NW della « linea di Peio ». Seguendo la terminologia già usata e che qui è adottata a semplice titolo indicativo, fra le due grandi linee di disturbo tettonico i terreni si possono raggruppare essenzialmente in due serie:

a) la cosiddetta « serie del Tonale », formata da una massa fondamentale di paragneiss di prevalente catazona, ricca di numerose intercalazioni di ortogneiss, di calcari saccaroidi e di anfiboliti;

b) la cosiddetta « serie di Ultimo », costituita da paragneiss e metagneiss di catazona, frequentemente passanti a tipi kinzigitici, contenenti intercalazioni di ortogneiss, di anfiboliti e soprattutto di oliviniti, ma mai di calcari.

Un terzo elemento del complesso verrebbe ad essere costituito dalla massa di paragneiss di catazona privi di intercalazioni, che costituiscono i versanti a pascoli alti delle Alpi Pozze, Valenaia, Valletta e Campo sopra Pellizzano e sopra Mezzana e che formano la parte nucleare del grande « vortice » di Mezzana.

La « serie del Tonale » raggiunge il suo massimo spessore all'affioramento in corrispondenza del sottogruppo del Tonale, dove forma una fascia dello spessore di circa 5 km. in media; qui si notano multiple pieghe, nella parte più orientale con assi poco inclinati verso est. Dai rilievi di Hammer e dalle notizie fornite dallo Schmidegg non si può dedurre la presenza di evidenti « vortici » ed è da augurarsi che il rilievo in atto da parte del Centro Studi di Petrografia e Geologia di Padova possa illuminare a questo proposito.

In corrispondenza della Val di Peio la « serie del Tonale » subisce un rapido assottigliamento, tanto che sul versante sinistro della valle si riduce gradualmente per arrivare, in corrispondenza del Passo Cercen, a formare una striscia di non più di mezzo km. di spessore all'affioramento. Al di là del Passo Cercen, in Val Cercen, la « serie del Tonale » è ulteriormente compressa in uno spessore che all'affioramento non è superiore ai 200 m., per poi subire un nuovo allargamento in prossimità di Rabbi.

Dalla zona del Passo del Tonale fino a Rabbi la « serie del Tonale » è nettamente limitata a NW dalla grande dislocazione denominata « linea di Peio ». Verso NE sembra che la « serie del Tonale » venga a smembrarsi: la « linea di Peio » separa i paragneis contenenti calcari saccaroidi (a NW) dai paragneis ricchi di intercalazioni di ortogneis (a SE).

In tutto il tratto di forte compressione e stiramento a NE della Val di Peio la « serie del Tonale » non presenta alcun motivo a « vortici » ed è accompagnata da notevoli zone milonitiche (v. in dettaglio il lavoro di bibliografia 6).

Una dislocazione secondaria e locale, ben visibile sui versanti di Cima Grande-Cima Cadinel verso la Val di Peio, separa la « serie del Tonale » dalla massa di paragneis di catazona che formano il grande « vortice » del sottogruppo Vegaia Tremenesca. Questo « vortice » ha uno sviluppo maggiore di quanto ha segnalato Schmidegg nel suo lavoro (bibl. 4), formando l'intero sottogruppo montuoso ed arrivando secondo le mie ricerche, fino al solco vallivo della Val di Rabbi.

Come dissi in precedenza, e come si vede bene nella cartina geologica allegata, la parte sud-occidentale del sottogruppo, nucleo del grande « vortice », è formata da paragneis di catazona privi di intercalazioni. Invece la parte orientale e nord orientale è costituita dagli stessi paragneis ricchi di intercalazioni di varia natura, talora assai potenti: ortogneis granitici a due miche fino a occhiadini, anfiboliti, oliviniti e quarziti. Piani di scisto-

sità e intercalazioni formano all'affioramento un arco imponente semicircolare, dalla zona a nord di C. Tremenesca, dove gira verso est e poi verso SE, attraverso le montagne che costituiscono i versanti SW e W di Val di Rabbi girando successivamente a sud e poi a SW, fino ai versanti SE della Camucina e del Sas dell'Anel. L'andamento a semicerchio e la presenza di numerose intercalazioni furono riconosciuti da me.

Alcune intercalazioni di ortogneis, di anfibolite e di olivinite sono state seguite attraverso le montagne per diversi chilometri, come si può vedere nella carta allegata, offrendo così uno dei migliori elementi per l'individuazione della parte più orientale del grande « vortice » che costituisce il sottogruppo Vegaia–Tremenesca.

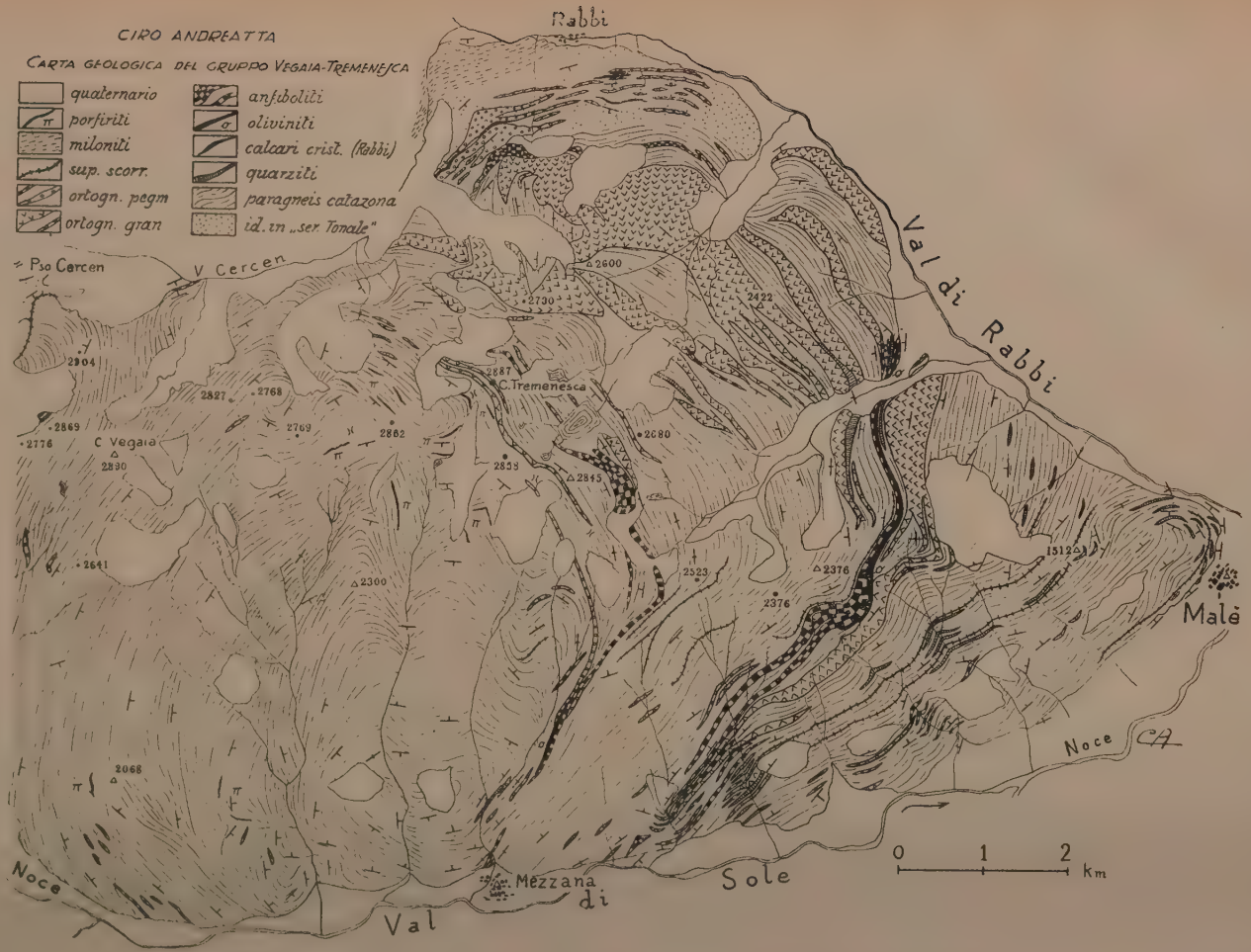
Solo nell'estremo più settentrionale, nei versanti sopra Rabbi, il complesso di questo grande « vortice » è addossato alla « serie del Tonale », che affiora con le tipiche e poco potenti intercalazioni di ortogneis pegmatitici e di calcari cristallini. Qui non è stata osservata alcuna dislocazione evidente fra la massa rocciosa del grande « vortice » ed i terreni della « serie del Tonale ». Piccole e locali pieghe complicano in vari punti questo grande « vortice » (per esempio all'Alpe Tremenesca, al Campo Secco e presso Malè).

Le ampie e relativamente sottili intercalazioni di olivinite che compaiono nella parte orientale del grande « vortice » (come si vede nella cartina, la più lunga di esse è addossata ad una intercalazione di anfibolite), rappresentano già un elemento geologico tipico di quella che denominai « serie di Ultimo ». Questa poi si sviluppa a NE della Val di Rabbi e comprende gli altri « vortici » più orientali: quello del Cimone delle Mandrie, fra le valli di Rabbi e di Bresimo, quello del M. Pin, fra la Val di Bresimo e la Val di Lavacè, e quello della zona del Campivel, meno evidente.

Già sui versanti orientali della media Val di Rabbi, e precisamente poco a occidente della Malga Montdent, fra questa e la grande massa di ortogneis, i paragneis di catazona si arricchiscono in feldispati e in granati, assumendo l'aspetto dei tipi kinzigitici. Così nella plaga fra le due Malghe Garbella (di Sopra e di Sotto) affiora un paragneis a grossi noduli e lenticelle feldispatiche (prevalenti plagioclasi, ma presente anche l'ortoclasio debolmente trasformato in microclino), contenente molto granato, assieme a sillimanite in cristalli anche notevoli.

Nella contigua Val di Bresimo la massa di paragneis è ancora più frequentemente cosparsa di plaghe con evidenti feldispatizzazioni, per cui più frequenti vi sono i tipi kinzigitici: versante orientale di Cima Lac Cima Candei, costone a oriente di Malga Pozze, versanti a nord di Bagni di Bresimo.

Francamente kinzigitici diventano i paragneis nella regione dell'Alpe Binazia (non Binazza come segna la carta dell'I. G. M.), fra la Cima Binazia ed il passo di q. 2292 che comunica con la Val di Lavacè. Oltre questa zona si prolunga la grande fascia che contiene frequentissimi paragneis di tipo kinzigitico e che costituisce la catena destra della Val d'Ultimo (studiata nella monografia di bibl. 5).



Carta geologica del sottogruppo Vegaia-Tremenesca rilevata da C. ANDREATTA.

Il « vortice » del Cimone delle Mandrie (Le Mandrie della carta I. G. M.), secondo le mie osservazioni risulta nella parte più settentrionale formare all'affioramento una figura poco diversa da un'ellisse, con un restringimento a virgola nella sua parte SW; questa parte non risulta aperta verso SW, come segna Schmidegg nella cartina di p. 125 del suo lavoro (bibl. 4), ma molto compressa contro la grande massa di ortogneis che si estende a occidente del Cimon delle Mandrie. Questo « vortice » è completato da un'altra serie di piegamenti più a sud, fra Malga Montdent e Pracorno, che si svolgono in senso opposto. Il complesso viene ad assumere all'affioramento quasi la forma di un punto di domanda, il cui occhiello superiore corrisponderebbe in parte alla piega segnata da Schmidegg.

Notevolmente diverso da quanto hanno segnalato Hammer e Schmidegg è l'andamento delle intercalazioni di olivinite a nord del massiccio ortogneissico succitato. Una intercalazione si sviluppa sul fondo della Val Zoccolo, formando un caratteristico costone lungo 2 km. in pianta, da q. 1500 circa del fondo valle al passo di q. 2402, dove si sdoppia; passa sul versante est di Cima Zoccolo e si continua con quattro distinte intercalazioni sul costone NE della stessa cima, dove comprende diverse lenti di amianto d'anfibolo. Altra piccola intercalazione di olivinite trovasi sul lato SE del massiccio ortogneissico, subito a nord del Cimone delle Mandrie. Sul fianco sinistro della Val di Bresimo le intercalazioni di olivinite si suddividono in molte minori lame affioranti nella regione che stà fra il Passo di Val Clapa (Klapfbergjoch) e la zona dell'Alpe Binazia e nella regione del M. Pin.

Il complesso « vortice » del M. Pin è risultato pure alle mie osservazioni alquanto più complicato di quanto ritenne Schmidegg. Questo autore, al quale sfuggirono numerose varie e interessanti intercalazioni sui versanti ovest e SW, definì il principale « vortice » come avente forma di S (p. 128, bibl. 4). Più che una semplice S i terreni all'affioramento formano vari complessi contorcimenti, come risultato dell'intersezione della superficie topografica con diverse strette pieghe aventi gli assi in direzione circa WE e forti inclinazioni variabili verso ovest. Altri contorcimenti di minore entità, segnalati come singoli « lacci » dallo Schmidegg, si trovano sui versanti SE, NE e nord del M. Pin, e formano col primo citato un complesso « vortice ».

Altro « vortice », meno evidente, si trova infine nella regione della Malga Campivel (non Campibel come segna la carta dell'I G. M.) di Sopra, e si sviluppa a nord di questa. Quì i terreni, paragneis di catazona contenenti grosse intercalazioni di ortogneis, formano una piega che ha la forma quasi di un catino a dolci sponde, per cui l'intersezione dei piani di scistosità con la superficie topografica viene a disegnare un'ellisse un po' schiacciata da un lato.

È da ritenere che altre regioni a « vortici » si trovino entro la formazione che si spinge verso NE, cioè entro quella stessa formazione gneissico-kinzigitica che studiai nel 1935.

In tutta la vasta plaga a NE del solco vallivo della Val di Rabbi i « vortici » sono compresi fra la « linea delle Giudicarie » e la « linea di Peio ».

Un fatto molto interessante da segnalare è la presenza in tutta la regione con tettonica a « vortici » di numerose superfici di scorrimento recenti, che si sviluppano ripetutamente in maniera concordante con i piani di scistosità delle formazioni. Nel vasto versante che scende dalla cresta a est della Camucina di Mezzana verso Commezzadura fino a Malè, si possono notare a diverse altezze ben sette successivi scorrimenti, alcuni dei quali affiorano in modo assolutamente caratteristico: lieve avvallamento a monte e cordone a valle assomigliante quasi ad un muro che corre per chilometri lungo i versanti. Tale « muro » è spesso formato da una roccia aplitica o addirittura da un metascisto risultante dalla impregnazione di materiale « orto » lungo il piano di triturazione.

Altra serie di quattro scorrimenti recenti si nota sul versante meridionale del Cimone delle Mandrie, sul quale tracciano i caratteristici solchi con muro, simili a trincee abbandonate.

Di grande interesse ritengo, infine, i numerosi piccoli filoni di porfiriti anfiboliche a grana fine, ricche di interclusi allotigeni di scisti vari, particolarmente di oliviniti e di anfiboliti. Queste porfiriti furono in parte già segnalate dallo Schmidegg (bibl. 4) che le definì « diabasi ». Esse compaiono particolarmente frequenti nella zona nucleare dei « vortici » del sottogruppo Vegaia-Tremenesca (con una quindicina di filoni finora scoperti) e del Cimone delle Mandrie (con una decina di filoni), ma si notano anche fuori dai « vortici » stessi, come presso il Forte Strino (fra il Passo del Tonale e Vermiglio) e alla Cima Lac.

Il maggiore interesse di questi filoni di porfirite è offerto dal fatto che esse si distinguono per la grana fine o finissima dalle porfiriti dei numerosissimi filoni che si trovano a NW della « linea di Peio ». Questa netta diversità di grandezza della grana è, secondo me, un indice di diversità di ambiente genetico. Si noti che a NW della « linea di Peio » segue una formazione, nettamente distinta, di micascisti di meso-epizona, mai piegati a « vortici », ma anzi con superfici di scistosità ad andamento molto uniforme e formanti un'ampia sinclinale, sul dolce fianco meridionale della quale poggiano i paragneis di catazona delle formazioni a « vortici », separati dalla imponente zona di triturazione della « linea di Peio ».

Concludendo è da rilevare che la fascia di terreni con tettonica a « vortici » dimostra una storia geologica particolare, diversa dalle formazioni circostanti, con fasi antiche e ripetute in ambiente diverso. È evidente che la struttura a « vortici » si è sviluppata contemporaneamente alla ricristallizzazione di catazona in una fase prealpina e che forse fu preceduta da altre fasi di metamorfismo. Queste conclusioni collimano con quelle che già traevo nel 1935 dalla enorme massa di osservazioni petrografiche sul materiale della catena destra di Val d'Ultimo (bibl. 5).

Naturalmente, dopo l'origine della struttura a « vortici » si dovettero sviluppare le fasi principali dell'orogenesi alpina, che in parte disturbarono i « vortici »; il principale fatto avvenuto durante queste fasi è stato il sovrascorrimento della massa di terreni con struttura a « vortici » e con caratteri-

stiche di catazona sopra la serie scistoso-cristallina di meso-epizona, che si estende al di là della « linea di Peio ». Fra gli ultimi avvenimenti vanno ascritte la formazione delle ripetute superfici di scorrimento minori e le manifestazioni magmatiche che diedero origine ai filoni di porfirite. Su queste interessanti manifestazioni ritornerò in altra sede.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. HAMMER, *Geologische Aufnahme des Blattes Bormio-Tonale*, « Jahrbuch d. k.k. geol. Reichsanstalt », vol. 55, pp. 1–26, Wien 1905.

[2] W. HAMMER, GB. TRENER, *Geologische Spezialkarte, Blatt Bormio und Passo del Tonale* e relative *Erläuterungen*, « k. k. geol. Reichsanstalt », Wien 1908.

[3] M. VACEK, W. HAMMER, *Geologische Spezialkarte, Blatt Cles* e relative *Erläuterungen*, « k. k. geol. Reichsanstalt », Wien 1903.

[4] O. v. SCHMIDEGG, *Steilachsige Tektonik und Schlingenbau auf der Südseite der Tiroler Zentralalpen*, « Jahrbuch der geol. Bundesanstalt », vol. 86, pp. 115–149, Wien 1936.

[5] C. ANDREATTA, *La formazione gneissico-kinzigitica e le oliviniti di Val d'Ultimo (Alto Adige)*, « Memorie del Museo di Storia Naturale della Venezia Tridentina », vol. III, pp. 1–160, Trento 1935.

[6] C. ANDREATTA, *La « linea di Peio » nel massiccio dell'Ortler e le sue miloniti*, « Acta geologica alpina », 1°, Bologna 1948.

[7] A. BIANCHI e Gb. DAL PIAZ, *Il settore nord occidentale del massiccio dell'Adamello*, « Boll. Ufficio Geol. d'Italia », vol. LXV, 1940, Nota I, p. 11. Vedasi inoltre la *Relazione sull'attività del Centro Studi di Petrografia e Geologia del C.N.R. presso l'Università di Padova, per l'anno 1947*, in corso di stampa nel periodico « Ricerca scientifica e ricostruzione », Roma 1948.

Geologia. — *La faglia dello Staffora. Sue caratteristiche in rapporto al sistema di fratture nel Vogherese.* Nota (*) di R. GANDOLFI, presentata dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

PREMESSA. – La seguente Nota, oltre che una breve dettagliata illustrazione su una linea di frattura, decorrente lungo la valle dello Staffora – la cui presenza nelle sue complicate caratteristiche tettoniche è stata rivelata in seguito a ripetuti studi, eseguiti nella zona del Vogherese da parte di geologi della Società Petrolifera Italiana –, è un breve esame di tali caratteristiche in rapporto con altre faglie del Vogherese, la cui presenza venne pure accertata da un nostro più esteso servizio geologico.

Il dott. R. Toth (deceduto a Stalingrado nel 1944) e il dott. V. Petters (ora alle dipendenze della Tropical Oil Co. Columbia) hanno particolarmente contribuito a questi studi sotto la guida del Capo Geologo dott. C. Wiedenmayer, rispettivamente per la parte geologica e paleontologica.

Interessante notare nei riguardi delle faglie dello Staffora (studiate come si è detto in dettaglio) che alcune perforazioni eseguite nella ristretta

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1948.

area di Rile dell'Olio, offrirono appunto l'opportunità di completare con lo studio sistematico del sottosuolo molte delle premesse che già si erano venute delineando attraverso rilevamenti di superficie.

Venute meno le ovvie ragioni di riserbo, che i lavori in corso imponevano, la presente Nota vede ora la luce, grazie alla cortese autorizzazione da parte della Direzione della S. P. I., cui va pertanto il mio particolare ringraziamento.

La faglia dello Staffora – Sue caratteristiche.

L'allegata tavola II illustra chiaramente l'entità del movimento. Il considerevole spessore del Messiniano rileva un rigetto minimo di circa 1200 metri. Già da questa sezione si può vedere come più che di una faglia, si può parlare di un sistema di faglie, rovesciate rispetto al piano di rigetto. Non solo, ma un esame degli elementi stratigrafici ad est e ad ovest della frattura ci rivela che la faglia fu soggetta a ripetuti, complicati movimenti, riattivatisi in diversi periodi di tempo (Tav. I).

Sul terreno la linea di frattura può essere seguita, risalendo il corso dello Staffora fin nei paraggi di Vignola. A sud di tale località però affioramenti quasi verticali del Tongriano, visibili nel letto del torrente stesso a nord di Biagasco, in contraposto a serie quasi indisturbate esposte in ambo i fianchi della valle, rivelano già l'inizio della zona di disturbo.

A nord, nella valle inferiore dello Staffora, la linea di frattura separa nettamente Tongriano ad ovest da Langhiano ad est, mentre nei pressi di C. Colomnaia, il Messiniano copre normalmente la faglia.

Da queste prime osservazioni risulta quindi evidente che il blocco ad ovest dello Staffora si trova sollevato rispetto all'area ad est dello stesso. Età del movimento «Langhiano–Premessiniano».

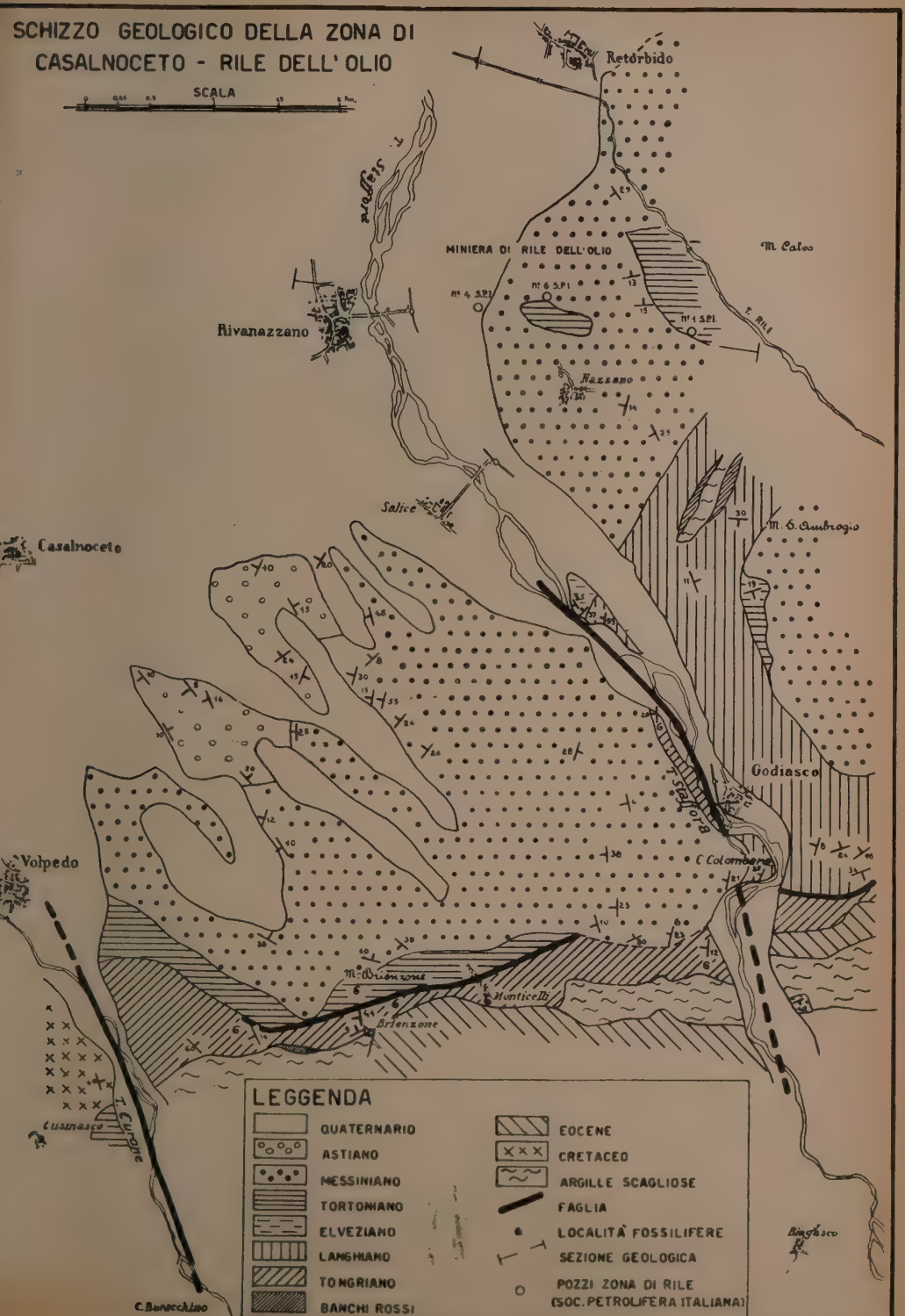
La serie basale del blocco compreso tra i torrenti Curone e Staffora, è formato da Eocene sulle Argille Scagliose. Il Tongriano (Bienzone–Monticelli è in netta trasgressione.

A nord della sottile lingua di Tongriano, una striscia pure sottile di Tortoniano conglomeratico si trova separata da quella formazione, per mezzo di una linea di frattura di secondaria importanza.

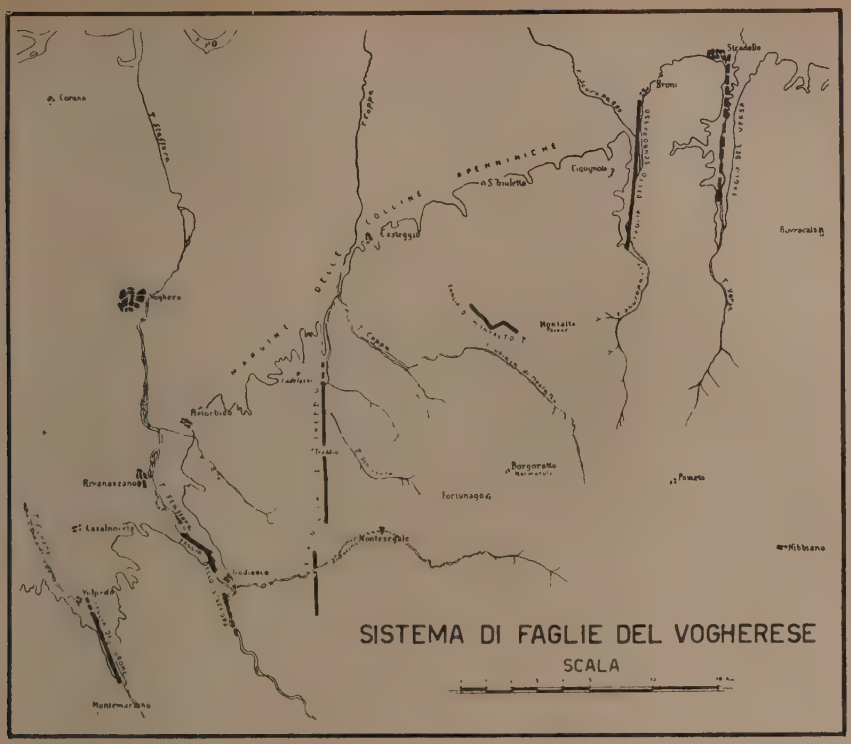
Un fatto degno di nota è che i ciottoli del Tortoniano sono in prevalenza di materiale Tongriano, mentre il Langhiano manca completamente.

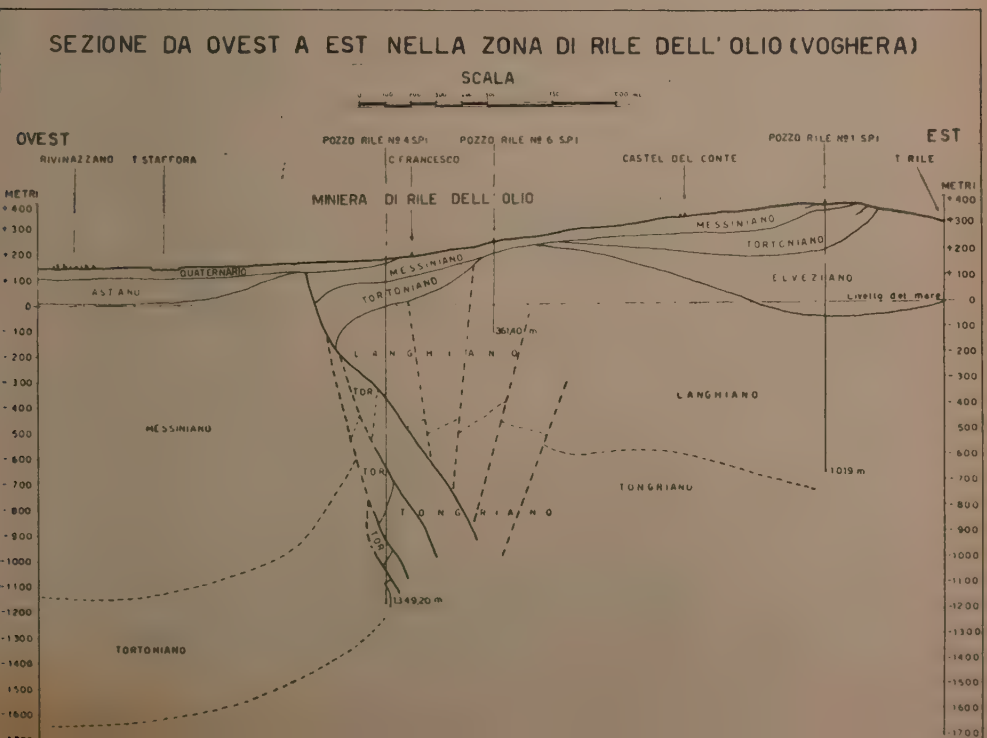
Il Langhiano non doveva perciò mai essere stato presente nell'area in parola, mentre esso si trova tuttora ben rappresentato ad est della faglia.

Mentre tale fatto sembra confermare le nostre vedute, circa un probabile sollevamento dell'area tra il Curone e lo Staffora durante il Miocene inferiore, le formazioni più giovani verso nord (Tortoniano e in specie Messiniano) formano una conca col centro della depressione appunto tra lo Staffora e il Curone. Questo fatto, confermato poi dalle perforazioni di Rile, ci porta quindi alla conclusione che la zona ad ovest dello Staffora si sollevò in un primo tempo (Oligocene–Miocene inferiore) per riabbassarsi in seguito


SCHIZZO GEOLOGICO DELLA ZONA DI CASALNOCETO - RILE DELL' OLIO
SCALA
Retorbido
T. Staffora
MINIERA DI RILE DELL'OLIO
M. Calco
T. RILE
Rivanazzano
Razzano
Salice
M. S. Ambrogio
Casalnoceto
Godiasco
Volpedo
C. Colombara
M. Brione
Montecelli
Brienzone
T. Curone
Cusmano
Bonglasco
C. Barocchino
LEGGENDA
QUATERNARIO
ASTIANO
MESSINIANO
TORTONIANO
ELVEZIANO
LANGHIANO
TONGRIANO
BANCHI ROSSI
EOCENE
CRETACEO
ARGILLE SCAGLIOSE
FAGLIA
LOCALITÀ FOSSILIFERE
SEZIONE GEOLOGICA
POZZI ZONA DI RILE (SOC. PETROLIFERA ITALIANA)

I


Corana
Stradella
Broni
Rovescala
Voghera
Montalto Pavese
Rivanazzano
Fortunago
Borgoratto Mormorolo
Pometo
Casalnoceto
Montesegale
Ribbiano
Montemarano
SISTEMA DI FAGLIE DEL VOGHERESE
SCALA


SEZIONE DA OVEST A EST NELLA ZONA DI RILE DELL' OLIO (VOGHERA)
SCALA
OVEST
EST
RIVANAZZANO
T STAFFORA
POZZO RILE Nº 4 SPI
POZZO RILE Nº 6 SPI
C FRANCESCO
CASTEL DEL CONTE
POZZO RILE Nº 1 SPI
T RILE
MINIERA DI RILE DELL' OLIO
METRI
QUATERNARIO
ASTIANO
MESSINIANO
TORTONIANO
ELVEZIANO
Livello del mare
LANGHIANO
TONGRIANO
3614,0 m
1019 m
1349,20 m

almeno nella parte settentrionale. Tali successivi movimenti si originarono probabilmente nel Messiniano, facendosi più accentuati verso nord. Probabile ad ogni modo che un più complicato sistema di movimenti ebbe luogo a diverse riprese agendo sulla linea di frattura con oscillazioni a « bascule ».

Sollevamento di Casalnoceto.
(cfr. Tav. I).

Più estesi rilevamenti ad est hanno messo in evidenza una seconda faglia (frattura del Curone), che ha rivelato caratteristiche analoghe a quelle da noi studiate. Infatti tale faglia, che si estende grosso modo lungo il corso del Curone da Volpedo a C. Buracchino separa Argille Scagliose ed Eocene sul fianco orientale da uno strutturalmente più elevato Cretaceo superiore, sul fianco occidentale. Tali condizioni sono però, analogamente a quanto si è visto nello Staffora, in contrasto con quanto è dato osservare più a nord nelle vicinanze di Volpedo, dove formazioni più giovani affiorano sul lato orientale.

Pertanto le due faglie limitano un'area strutturale, che si è mossa, a diverse riprese come si è visto ed in senso contrario, lungo le due linee di frattura sopradette.

Il sistema di faglie del Vogherese, in rapporto alle faglie dello Staffora-Curone (Tav. II, 1).

Le caratteristiche tettoniche delle faglie sopradette, in particolare quella dello Staffora, da noi esaminata più da vicino, hanno un importanza notevole, che esula dall'ambito locale.

Infatti nel corso dei nostri rilevamenti, si è rivelata come tipica del Vogherese, la presenza di una serie di faglie, cui vogliamo accennare ora solo di sfuggita, ad analoghe caratteristiche: relativamente vecchie linee tettoniche, movimenti riattivati in diverse riprese, andamento quasi parallelo, con decorso approssimativo N–S.

Dette faglie sono:

Faglia di Trebbio: ad est di Trebbio, decorso da Rocca Susella lungo la valle dello Schizzola fino a circa C. Pellegrino. Dopo una breve interruzione, la faglia si rivela di nuovo tra S. Polo e Cerreto superiore sul medesimo allineamento. Età post-Messiniano, ma i movimenti potrebbero essersi iniziati molto prima. Anche qui mentre nella parte nord si nota chiaramente un abbassamento del lato occidentale, nella parte sud vi è incertezza a tal riguardo per la presenza contrastante di formazioni più giovani ora da un lato, ora dall'altro della faglia.

Faglia di Montalto Pavese: andamento a zig zag da Montalto Pavese a sud, a Corvino S. Quirico a nord. Medesime considerazioni per la parte sud (abbassamento ad est) e per la parte nord (abbassamento ad ovest).

Faglie di Stradella: si tratta di due linee di frattura, rispettivamente lungo la valle dello Scuropasso e del Versa, interessanti principalmente le colline messiniane a sud di Stradella. Le condizioni tettoniche non sono bene evidenti, specie per la seconda, ma è presumibile che la zona strutturale Canneto-Stradella (compresa tra i due torrenti) si sia comportata in modo analogo alla zona strutturale di Casalnoceto.

Conclusione. – I risultati ora esposti non poterono naturalmente essere messi in evidenza che attraverso un più esteso servizio geologico, che investì tutta la regione del Vogherese. Una più completa valutazione degli assetti tettonici fu possibile ottenere dalla gravimetria, che in stretta collaborazione con la geologia, si dimostrò un prezioso aiuto nella condotta delle indagini.

Gli accurati studi micropaleontologici che accompagnarono passo passo sia la campagna geologica che le perforazioni, permisero un'esatta determinazione degli elementi stratigrafici, rivelatisi particolarmente efficace nella geologia del sottosuolo (vedi sonda Rile N. 4).

Per quanto ulteriori dati siano necessari per poter inquadrare tale sistema di faglie del Vogherese in un più vasto ambito regionale, l'importanza di esse è ad ogni modo notevole, in quanto delle faglie costituiscono un elemento tettonico ben definito e caratteristico di questa regione, in evidente stretta relazione con movimenti di assestamento lungo la linea tettonica Broni–Brescia, che la gravimetria ci rivela quale prolungamento verso sud della linea delle Giudicarie.

Petrografia. — *Sulla presenza di basalti limburgitici nell'Africa Orientale* (*). Nota di O. Hieke, presentata (**) dal Socio A. Bianchi.

Nel vario ed interessante materiale raccolto negli anni 1936–38 dalla Missione AGIP, diretta dai proff. M. Gortani e A. Bianchi (1), durante l'esplorazione geologico-petrografica della regione hararino-dancala e del margine rilevato dell'altipiano etiopico, abbondano le lave basiche.

Fra le numerose facies, a me gentilmente affidate dal prof. Bianchi per lo studio chimico-petrografico che calcolo di poter condurre a termine fra breve tempo, si trova una lava che reputo interessante mettere fin d'ora

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) M. Gortani, A. Bianchi, *Osservazioni geologiche e petrografiche sulla Dancalia Meridionale e zone contermini*. « Bollettino Soc. Geol. Ital. », vol. LVII, p. 353. Roma 1938.

Note illustrative sulla carta geologica degli altipiani hararini e della Dancalia Meridionale. (Accademia Scienze Ist. di Bologna Sessione 30 marzo 1941).

in particolare risalto in quanto differisce per struttura e composizione mineralogica da tutte le altre da me considerate.

La roccia proviene dalla regione di Batiè, al margine fratturato dell'altipiano etiopico che da Dessiè scende a gradoni verso la Dancalia e precisamente affiora sulla strada che porta a Combolcià a 3 km. circa ad ovest di Batiè. Si tratta di un intreccio di filoni nerastri a grana finissima e a minuta fessurazione prismatica, con una patina brunastra di sottile alterazione superficiale, intercalati nei tufiti nelle lave basaltiche che costituiscono il complesso delle vulcaniti stratoidi antiche della regione sovrastante a Batiè.

Fig. 1.

La struttura caratteristica della roccia è microfirica ipocristallina: abbondantissimi, ma poco sviluppati individui idiomorfi di pirosseno ed olivina sono interclusi in una pasta di fondo costituita da minuti granuli di ossidi di ferro e di elementi colorati, da rari microliti feldispatici e da notevole quantità di vetro. Il disegno riportato nella fig. 1 precisa i caratteri della struttura.

Il pirosseno ha di gran lunga il predominio fra gli elementi femici della roccia; si presenta sia in perfetti cristalli pressochè inalterati ad abito prismatico allungato sia sotto forma di minuta granulazione nella massa di fondo. È incoloro, senza pleocroismo, con una sensibile zonatura che tende alla ben nota struttura a clepsidra.

Al T. U. l'angolo degli assi ottici, misurato su una lamina normale alla bisettrice acuta γ, è risultato: $2V_\gamma = 56^\circ$ con una dispersione della bisettrice di poco più di 1°.

L'angolo di estinzione per la luce bianca è $c:\gamma = 50^0$ con la seguente dispersione a luce monocromatica:

$$c:\gamma = 49^0\,1/_2 \text{ (rosso)}$$

$$c:\gamma = 51^0 \quad \text{(verde)}$$

Questi caratteri ottici portano a concludere che si tratta di un pirosseno monoclino e precisamente di un termine augitico.

L'olivina è in quantità notevolmente subordinata rispetto al pirosseno ed è quasi totalmente serpentinizzata; è facile però intravvedere l'abito idiomorfo del minerale primario. Il serpentino si presenta per lo più nella varietà crisotile ad abito fibroso, di colore giallognolo, ad allungamento positivo e a notevole birifrangenza che porta sino a colori giallo–rossi e persino verdi di primo ordine; probabilmente il potere birifrattivo di queste plaghe di alterazione viene esaltato da prodotti iddingsitici. Si notano infatti spesso su di uno stesso individuo associate le due alterazioni, per cui il nucleo peridotico presenta una bordura più interna dai toni rosso–bruni di composizione iddingsitica ed una fascia più esterna di natura serpentinosa.

Talvolta anche il nucleo del minerale originario è totalmente scomparso, sostituito da un fine ed elegante intreccio a spina di pesce di fibre antigoritiche, dai bassi colori interferenza, bordato da un anello di fibre parallele di crisotile. Altra antigorite si presenta qua e là sotto forma di rare lamelle fibrose dai toni verdognoli e dalla bassa birifrangenza.

Il segno ottico dell'olivina è risultato negativo e per l'angolo degli assi ottici, da misure dirette alla T. U. su una lamina (010), si è ottenuto il valore: $2\,V_\alpha = 85^0$. Si tratta quindi di una miscela olivinica con un contenuto percentuale molecolare di circa 26 % di faialite.

Motivo interessante la scarsissima frequenza degli elementi plagioclasici che compaiono o come isolati piccoli individui listiformi od in raggruppamenti incerti di più individui che appena s'intravvedono nella massa prevalente e cristallizzata dei componenti femici. Su uno dei rari geminati albite–carlsbad un po' più sviluppati ho determinato i seguenti valori per l'angolo di estinzione:

$$I = 17^0 \qquad II = 31^0 \qquad = 57\,\%\ An$$

da cui risulta trattarsi di miscele labradoritiche.

L'abbondante magnetite della pasta di fondo è in perfetti minuti ottaedri.

Notevole è la quantità del residuo vetroso, fortemente colorato in giallo ocra, che occupa all'incirca un quarto della complessiva massa rocciosa.

Nella tabella seguente sono riuniti i risultati sperimentali da me ottenuti con l'analisi chimica e l'analisi mineralogica quantitativa ed i valori calcolati per la formula magmatica e per la norma molecolare secondo il metodo di Niggli.

SiO_2	45.51
TiO_2	1.27
P_2O_5	0.07
Al_2O_3	12.45
Fe_2O_3	10,25
Cr_2O_3	0.06
FeO	3.34
MnO	0.18
MgO	7.38
CaO	12.47
Na_2O	2.28
K_2O	1.27
H_2O-	1,32
H_2O+	1.91
	99.76

Composizione mineralogica (% in volume)

Elementi idiomorfi	augite	21
	olivina	3
Pasta di fondo	elementi colorati ed accessori (pirosseno, magnetite, olivina)	35
	serpentino (da olivina)	9
	plagioclasi	6
	vetro	26
		100

Formula magmatica

si 100 *al* 16.2 *fm* 47.8 *c* 29.4 *alc* 6.6
k 0.27 *mg* 0.50 *ti* 2.1 *p* 0,06 *c/fm* 0.61
qz = — 26

Molecola base

Q	23.5	23.5 Q
Kp	4.8	
Ne	13.0	30.3 L
Cal	12.5	
Cs	13.3	
Fs	11.4	
Fo	16,2	46.2 M
Fa	4.2	
Ru	0.9	
Cp	0.2	
	100.0	

Norma molecolare

An	20.8
Ab	21.7
Or	8.0
En	16.4
Vo	17.7
Fo	3.9
Mt	8.4
Hm	2.0
Ru	0.9
Cp	0.2
	100.0

$\pi = 0.41$ $\gamma = 0.29$ $\mu = 0.36$ $\alpha = 0.21$

Come si può facilmente rilevare non esiste una stretta corrispondenza fra i dati della norma molecolare calcolata e quelli della reale composizione mineralogica quantitativa determinata al microscopio. Infatti la norma esprime una percentuale di elementi ad alto contenuto in silice (feldispati) superiore a quella rilevabile nella roccia, mentre riduce il contenuto degli elementi femici poco silicizzati (specie dell'olivina). Questa discordanza è dovuta essenzialmente alla notevole quantità di residuo vetroso, che, come ho già accennato, costituisce circa un quarto della roccia, e in parte anche al processo di serpentinizzazione dell'olivina.

Il confronto con i tipi magmatici di Niggli permette di accostare la composizione della roccia in esame al tipo «*si-pirossenitico*» di serie alcali-calcica, da cui però differisce per un più basso contenuto in silice e per un va

relativamente alto del coefficiente *k*. Il che denota una certa alcalinità nella lava per cui la si potrebbe pure accostare al tipo *ankaratritico* di serie sodica, benchè quest'ultimo sia notevolmente più povero di silice. La si può considerare quindi come una forma limite di transizione di magmi femici alcali calcici verso magmi a tendenza alcalina.

	si	*al*	*fm*	*c*	*alc*	*k*	*mg*	*qz*
Tipo *si-pirossenitico* (Niggli)	125	13	50	30	7	—	0.7	— 3
Basalto di Batiè	100	16.2	47.8	29.4	6.6	0.27	0.5	— 26
Tipo *ankaratritico* (Niggli) .	75	13	52	27	8	0.25	0,6	— 57

In base alla descrizione petrografica, da cui risulta la struttura ipocristallina porfirica ad abbondante residuo vetroso di questa facies e la quasi totale mancanza degli elementi feldispatici presenti al più come accessori nella pasta di fondo, ed in base alla classificazione magmatica, da cui è evidente il carattere femico a leggera tendenza alcalino-potassica, si può definire senz'altro la roccia di Batiè come un *basalto limburgitico* [2].

In Abissinia a Laga Kallou era stata rinvenuta da tempo e studiata da Duparc e Molly [3] una augitite dalla tipica struttura porfirica ipojalina con prevalenza di augite e magnetite come elementi essenziali idiomorfi e microliti feldispatici come accessori in una massa vetrosa. La composizione chimica di questa roccia denota un carattere notevolmente femico e una netta alcalinità.

Altro accenno a rocce di tipo augititico si trova in un successivo lavoro dello stesso Duparc [4].

A tuttora non si era mai fatto cenno nè dal Duparc nè da alcun altro autore all'esistenza di limburgiti o di basalti limburgitici fra le lave dell'Africa Orientale.

Nella testè citata Memoria del Duparc invece viene riportata l'analisi e la descrizione petrografica del basalto microfirico della stazione di Jubdo; ma l'autore si limita a definirlo come un tipo porfirico privo di feldispati.

Questo basalto di Jubdo presenta struttura microfirica con cristalli abbondanti di olivina e scarsi di augite nella prima generazione, mentre invece il pirosseno ha il predominio nella pasta di fondo in cui all'olivina si associano la magnetite e rari microliti di labradorite in un notevole residuo vetroso. Per i caratteri di struttura e di composizione chimica e mineralogica, riferiti dal Duparc, reputo si tratti di una vera e propria limburgite; per confermare questa impressione ho ritenuto necessario calcolare anche per questa roccia di Jubdo la formula magmatica ed i parametri Q-L-M.

(2) H. Rosenbusch, *Elemente der Gesternslehre* von Dr. A. Osann, pp. 490 495. Stuttgart 1923.

(3) L. Duparc, E. Molly, *Sur une augitite d'Abyssinie*. « Compte Rendu des séances de la Societé de Physique et d'Histoire naturelle de Genéve », vol. 44, N. 3 (1927).

(4) L. Duparc, *Sur les basaltes et les roches basaltiques du plateau Abyssin*. « Bollettino svizzero di Mineralogia e Petrografia », parte X, pp. 1-37, Zurigo 1930.

Dati analitici		*Formula magmatica*						
SiO_2	42.47	*si* 87	*al* 17.5	*fm* 51.8	*c* 22.8	*alc* 7.9		
TiO_2	3.25	*k* 0.33	*mg* 0.52	*c/fm* 0.46	*qz* — 45			
P_2O_5	—							
Al_2O_3	14.45							
F_2O_3	3.55							
FeO	—			*Parametri*				
MnO	0.79	Q = 18.2		L = 35.9		M = 45.9		
MgO	9.42							
CaO	10.40							
Na_2O	2.65							
K_2O	2.00							
H_2O^-	—							
H_2O^+	1.40							
	99.86							

Si tratta di una roccia magmatica del gruppo gabbro-sodico che si approssima al tipo *gabbro essexitico* di Niggli:

	si	*al*	*fm*	*c*	*alc*	*k*	*mg*	*qz*
Tipo *gabbro essexitico* (Niggli)	95	20	49	21.5	9.5	0.25	0.5	— 43
Basalto di Jubdo (Duparc)	87	17.5	52	22.8	7.9	0.33	0.52	— 45

Questi dati precisano la posizione della roccia di Jubdo nella famiglia delle limburgiti.

Successivamente la Pagliani [5] in una sua Nota riportava analisi e descrizione petrografica di un basalto rinvenuto fra Gimma ed il campo d'aviazione prossimo a questa città; l'analisi chimica e le formule magmatiche mettono in evidenza in questa roccia una spiccata alcalinità a tendenza potassica.

Devo pure menzionare l'analisi di un basalto proveniente da Assab e studiato dal Ricciardi [6], dai cui dati analitici appare facilmente il carattere femico e relativamente alcalino della roccia. D'altra parte la mancata determinazione del titanio, che in queste rocce raggiunge valori elevati (TiO_2 1-4%), consente solo un calcolo approssimato della formula magmatica e dei coefficienti Q-L-M.

Per meglio definire e classificare il basalto di Batiè da me preso in considerazione e poter facilmente inquadrarlo fra le rocce studiate dagli altri autori, di cui ho riferito sopra, riporto il diagramma triangolare costruito da Niggli in base ai tre coefficienti Q-L-M e che permette la delimitazione

(5) G. PAGLIANI, *Pantelleriti e basalti di Gimma*. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Estratto dei « Rendiconti di Scienze », vol. LXXIII. fasc. 1°, 1939-1940.

(6) L. RICCIARDI, *Composizione chimica delle rocce vulcaniche di Assab*. « Bollettino Soc. Geol. Ital. », vol. V, 1886.

dei campi di esistenza dei basalti normali, dei basalti alcalini e dei termini di transizione fra questi, cioè dei subbasalti (fig. 2).

Per quanto riguarda poi la delimitazione nel diagramma stesso del campo da assegnare alle limburgiti ho preso in considerazione da pubblicazioni di vari autori (7) un notevole gruppo di lave limburgitiche, calcolando i valori parametrici Q–L–M per quelle non ancora definite in modo da fissare i punti medi rappresentativi sul diagramma stesso.

I punti si localizzano tutti nel settore dei magmi alcalino–femici con uno sconfinamento nel campo dei subbasalti non molto femici solo da parte delle rocce dell'America del Nord studiate dall'Edwards.

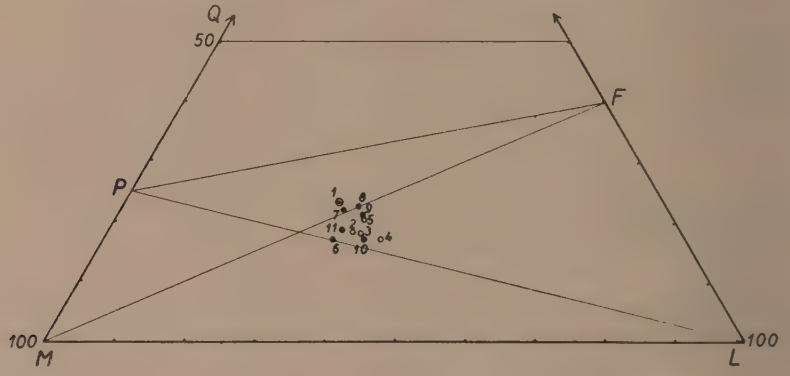


Fig. 2.

N. 1 Basalto limburgitico di Batiè (Hieke).
N. 2 Augitite di Laga Kallou (Duparc).
N. 3 Limburgite di Jubdo (Duparc).
N. 4 Basalto a tendenza alcalina di Gimma (Pagliani).
N. 5. Basalto a tendenza alcalina di Assab (Ricciardi).
N. 6–11. Limburgiti di località varie.

Prendendo in considerazione inizialmente le lave studiate dagli altri autori risulta chiaramente la decisa alcalinità delle due rocce del Duparc

(7) Dal ROSENBUSCH (*Elemente der Gesteinslehre* von Dr. A. OSANN, Stuttgart 1923, p. 494, analisi 1–19) ho attinto quindici analisi, escludendo le nn. 4–6–7–16, perchè a somme troppo alte; dallo SMITH (*The volcanic rocks of Christmas Island Indian Ocean.* « Quart. Journal Geol. Soc. London », 1926, vol. 82, pp. 44–46) una analisi; dal LACROIX (*La composition des laves basaltiques de l'Indochine.* «Comp. Rendu», 186 1928): 985 994) una analisi. Di tutte queste diciassette analisi dò un punto medio (n. 6 del diagramma).

Dall'EDWARDS (*The tertiary volcanic rocks of Central Victoria.* « Quart. Journ. Geol. Soc. », 94 1938) ho preso 12 analisi i cui punti medi sono espressi dai numeri 7 e 8 del diagramma (già indicati da NIGGLI).

Dalle formule magmatiche di limburgiti riportate da BURRI e NIGGLI (*Die jungen Eruptivgesteine des mediterranen Orogens.* Zurigo 1945. p. 228 e sgg.) ho calcolato i punti medi nn. 9–10 11 e precisamente il n. 9 esprime il punto medio di cinque limburgiti da magma subbasaltico della Germania e Boemia, il n. 10 rappresenta la media di sette limburgiti alcaline e ricche di feldispatoidi sempre della Germania e Boemia ed infine il n. 11 dà il punto medio di due limburgiti da magma subbasaltico delle isole atlantiche.

nn. 2–3), il cui punto rappresentativo si localizza nel campo delle limburgiti. La struttura e la composizione mineralogica hanno già indicato per la prima, che è priva di olivina, il carattere di un'augitite (già così classificata dallo stesso Duparc); per la seconda il carattere di una limburgite, come è stato da me proposto.

La roccia del Gimma (N. 4), studiata dalla Pagliani, si pone pure per i suoi coefficienti Q–L–M, da me calcolati in base ai dati analitici, fra i magmi femici limburgitici, però per gli altri caratteri petrografici non si diversifica dai comuni basalti porfirici di serie normale, tipici dell'Abissinia.

In base ai dati analitici offerti dal Ricciardi per il basalto di Assab ho calcolato i valori parametrici di questa roccia in modo però solo approssimativo, perchè, come più sopra ho già detto, la mancanza del TiO_2 pregiudica l'esattezza della formula magmatica e perchè mancano i dati petrografici per la classificazione della roccia. Ho riscontrato così anche per questa lava che il punto rappresentativo andrebbe a cadere nel campo delle limburgiti.

Considerando infine i valori Q–L–M della roccia di Batiè da me studiata, si rileva che questa va a collocarsi nel campo dei subbasalti a femicità non spinta. Si tratta quindi di un termine di transizione fra tipi alcali–calcici e tipi alcalini, come ho già messo in rilievo confrontando la formula magmatica relativa con i tipi Niggli. Siamo al limite del campo proprio alle limburgiti, ma, come già più volte ho avuto occasione di precisare, per tutti i caratteri petrografici si può considerare senz'altro la roccia di Batiè come un *basalto limburgitico.*

Avrò occasione in seguito in un lavoro generale di precisare la posizione della tipica roccia di Batiè nel quadro delle lave basiche dell'Africa Orientale.

Biologia (Citologia). — *L'importanza del* pH *nella colorazione con verde di metile–pironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleinico* (*). Nota di F. M. Gerola e E. Vannini, presentata (**) dal Socio G. Gola.

Recentemente ha assunto notevole importanza, nelle ricerche di istochimica, il metodo di J. Brachet (1), per la localizzazione degli acidi nucleinici. Esso utilizza principalmente come colorante la miscela basica verde di metile G–pironina, che dà nelle sezioni una colorazione di contrasto rossa e verde. In verde si colorano le parti contenenti acido timonucleinico (per una più sicura identificazione del quale deve usarsi il metodo di Feulgen), e in rosso invece, fra l'altro, le regioni contenenti acido ribonucleinico. Per

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico e nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) J. Brachet, *La localisation des acides pentosonucléiques dans les tissus animaux et les oeufs d'Amphibiens en voie de developpement.* «Arch. Biol.», vol. 53 (1941).

precisare la localizzazione di quest'ultimo è necessario sottoporre previamente le sezioni all'azione di un enzima (la ribonucleasi) che lo digerisca. In questo caso, dopo la successiva colorazione con verde di metile–pironina, le zone provviste di acido ribonucleinico appariranno incolore, anzichè rosse.

Nel corso di nostre indagini, non essendo stato possibile procurarci il verde di metile « giallastro », consigliato da Brachet, adoperammo il Methylgrün–Pyronin Pappenheim Grübler, o comunque miscele di pironina e verde di metile non giallastro. Tali soluzioni impartivano una colorazione uniforme intensamente verde al preparato, e rendevano perciò impossibile il loro impiego nel metodo proposto da Brachet per la ricerca dell'acido ribonucleinico.

Abbiamo ritenuto verosimile che ciò potesse dipendere dal tipo diverso di verde di metile usato. Ci era noto d'altronde che le soluzioni di verde di metile virano al giallastro per aggiunta di acido cloridrico e che viene frequentemente consigliato di aggiungere fenolo alla soluzione colorante verde di metile–pironina; eravamo pure a conoscenza di ricerche (Naylor, Pischinger, Strugger, Drawert, Ceruti, ecc.) dimostranti l'influenza del pH sulle affinità delle cellule per i diversi coloranti.

Si pensò pertanto che anche per la miscela basica in oggetto la concentrazione idrogenionica potesse avere un'influenza, e che eseguendo la colorazione ad adeguati pH si potessero conseguire buoni risultati con qualsiasi soluzione verde di metile–pironina.

Le nostre ricerche sono state effettuate su pezzi fissati nei liquidi consigliati da Brachet (Helly, Carnoy), o in alcool a 95°, ed inclusi in paraffina. Si preparò una serie di soluzioni tampone con HCl, NaOH, citrato sodico e borato sodico, secondo le tabelle di Sörensen e Clark, ed una soluzione al 2 % di Methylgrün–Pyronin Pappenheim Grübler. Al momento dell'uso si mescolavano, a 2 parti del colorante, 8 parti della soluzione tampone prescelta. Le sezioni si lasciavano per 20′ nel colorante tamponato; dopo rapido lavaggio in acqua distillata, erano asciugate con carta da filtro, agitate in alcool assoluto fino a che da esse non veniva più ceduto colore rosso, agitate poi in alcool ass. + xilolo (dove perdevano ancora un po' di rosso), e quindi passate in xilolo ed esaminate. Con successivo montaggio in balsamo neutro si ha col tempo una lieve variazione di colore, con accentuazione delle tinte rosse e decolorazione di quelle blu o verdi.

Le nostre osservazioni vertono sia su materiale vegetale (giovani abbozzi fiorali di *Sambucus* e di *Ranunculus;* apici radicali di *Arum;* lieviti), sia animale (girini femminili di rana, sezionati a livello delle ovaie, provviste di grossi ovociti in auxocitosi).

La descrizione che diamo dei preparati è limitata a quanto può interessare i fini della presente Nota, e trascura deliberatamente un'analisi cellulare troppo dettagliata. Così per lo studio del nucleo ci siamo limitati a riferire il colore assunto nello stato di riposo, eccezion fatta naturalmente per gli ovociti in auxocitosi, che si trovano in uno stadio profasico tutto particolare. Ricordiamo che, anche secondo Brachet, un colore spiccatamente

verde viene assunto solo dai cromosomi in metafase, mentre il nucleo in riposo appare tinto in blu, per la combinazione dei colori verde e rosso.

Sambucus, abbozzi fiorali (fissazione in Carnoy):

pH 1,5 : citoplasma e nuclei rosso–chiari, nucleoli rossi.

pH 3 : cellule giovani con citoplasma rosso, nuclei blu–chiari, nucleoli rossi; cellule adulte con citoplasma rosso–violaceo–chiaro, nuclei blu e nucleoli rossi.

pH 5 : cellule giovani con citoplasma rosso, nuclei blu e nucleoli rossi; cellule adulte con citoplasma rosso–violaceo–pallido, nuclei blu e nucleoli viola–rossastri.

pH 6 : cellule giovani con citoplasma rosso, nuclei blu e nucleoli rossi; cellule adulte con citoplasma rosso–violaceo–chiaro, nuclei blu-verdi e nucleoli rosso–violacei.

pH 7,7 : cellule giovani con citoplasma rosso, nuclei blu e nucleoli rossi; cellule adulte con citoplasma blu–violaceo–chiaro, nuclei blu–verdi e nucleoli viola–rossastri.

pH 8,5 : cellule giovani con citoplasma rosso–violaceo, nuclei blu–verdi, nucleoli rosso–violacei; cellule adulte con citoplasma blu–verde–chiaro, nuclei blu–verdi e nucleoli blu–violacei.

pH 9,3 : cellule giovani con citoplasma rosso–violaceo o blu–violaceo, nuclei blu–verdi, nucleoli blu–violacei; cellule adulte con citoplasma blu–verde–chiaro, nuclei blu–verdi e nucleoli blu–violacei.

Ranunculus, abbozzi fiorali (fissazione in alcool):

La colorazione corrisponde completamente a quella per *Sambucus*, si hanno solo lievi differenze di intensità di colore per i pH più acidi o più basici. Anche all'osservazione semplicemente macroscopica dei preparati appare evidente il passaggio successivo (da pH 1,5 a pH 9,3) del loro colore dal rosa–chiaro, al rosso, al rosso–violaceo, al blu.

Arum, apici radicali (fissazione in Helly):

pH 1,5 : citoplasma e nuclei rosso–chiaro, nucleoli rossi.

pH 3 : citoplasma e nucleoli rossi, nuclei blu–chiari.

pH 5 : cellule giovani con citoplasma e nucleoli rossi, nuclei blu; cellule adulte con citoplasma rosso–violaceo–chiaro, nuclei blu, nucleoli rossi.

pH 6 : cellule giovani con citoplasma rosso–violaceo, nuclei blu e nucleoli rossi; cellule adulte con citoplasma blu–chiaro, nuclei blu e nucleoli rossi.

pH 6,7 : cellule giovani con citoplasma rosso–violaceo, nuclei blu e nucleoli rossi; cellule adulte con citoplasma blu–chiaro, nuclei blu e nucleoli rosso–violacei.

pH 8,5 : cellule giovani con citoplasma blu–violaceo–chiaro, nuclei blu e nucleoli rosso–violacei; cellule adulte con citoplasma blu–chiaro, nuclei blu e nucleoli rosso–violacei.

pH 9,3 : cellule con citoplasma, nuclei e nucleoli blu–verdi.

Saccaromyces Cerevisiae:

pH 3 – 6,7: citoplasma rosso.

pH 8,5 : citoplasma rosso–violaceo.

pH 9,3 : citoplasma blu.

Girini di rana (fissati in Helly):

pH 1,5 : *muscolatura* incolore, nuclei rossi; *cellule cartilaginee* a citoplasma rosso arancio e nuclei rossi; *tessuto nervoso*, sostanza bianca incolore, cellule nervose della sostanza grigia a citoplasma e nuclei rossi; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma e nuclei rosso–chiari; *cellule linfoidi intertubulari* con citoplasma rosso e nuclei rosso–violacei; cellule dell'*epitelio intestinale* a citoplasma e nuclei rosso-chiari; *cellule epidermiche* con citoplasma e nuclei rosso-chiari.

pH 3 : *muscolatura* quasi incolore con nuclei viola rossastri; *cellule cartilaginee* a citoplasma rosso–arancio e nuclei blu–violacei; *tessuto nervoso* con sostanza bianca quasi incolore e cellule nervose della sostanza grigia a citoplasma rosso e nuclei blu–violacei; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma rosso e nuclei blu violacei; *cellule linfoidi intertubulari* a citoplasma rosso e nuclei blu viola;

cellule dell'*epitelio intestinale* con citoplasma rosso e nuclei blu–violacei; *cellule epidermiche* con citoplasma rosso–violaceo e nuclei blu–violacei.

pH 5 : *muscolatura* viola–rossastra con nuclei blu–violacei; *cellule cartilaginee* a citoplasma rosso–arancio e nuclei blu–violacei; *tessuto nervoso* con sostanza bianca colorata in verdastro e cellule nervose della sostanza grigia con citoplasma viola–rossastro e nuclei blu–violacei; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma rosso–violaceo e nuclei blu–violacei; *cellule linfoidi intertubulari* con citoplasma rosso–violaceo e nuclei blu–violacei; cellule dell'*epitelio intestinale* con citoplasma rosso–violaceo e nuclei blu–violacei; *cellule epidermiche* con citoplasma blu–violaceo e nuclei blu.

pH 6 : *muscolatura* blu–violacea o blu–verde con nuclei blu; *cellule cartilaginee* a citoplasma rosso–arancio e nuclei blu–violacei; *tessuto nervoso* con sostanza bianca di colore verdastro e cellule nervose della sostanza grigia con citoplasma blu–violaceo e nuclei blu; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma viola–rossastro e nuclei blu–violacei; *cellule linfoidi intertubulari* a citoplasma viola–rossastro e nuclei blu–viola; cellule dell'*epitelio intestinale* con citoplasma viola–rossastro e nuclei blu–violacei; *cellule epidermiche* con citoplasma blu–verde e nuclei blu.

pH 6,9 : *muscolatura* blu verde o verde con nuclei blu; *cellule cartilaginee* con citoplasma rosso–arancio e nuclei blu–violacei; *tessuto nervoso* con sostanza bianca colorata in verde e cellule nervose della sostanza grigia a citoplasma blu–violaceo e nuclei blu; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma blu–verde e nuclei blu–violacei; *cellule linfoidi intertubulari* con citoplasma e nuclei blu–violacei; cellule dell'*epitelio intestinale* con citoplasma viola–rossastro e nuclei blu–violacei; *cellule epidermiche* con citoplasma blu–verde e nuclei blu.

pH 8,5 : *muscolatura* verde con nuclei blu; *cellule cartilaginee* con citoplasma rosso aranciato e nuclei blu; *tessuto nervoso* con sostanza bianca colorata in verde e cellule nervose della sostanza grigia a citoplasma e nuclei blu; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma blu–verde e nuclei blu; cellule *linfoidi intertubulari* a citoplasma e nuclei blu–violacei; cellule dell'*epitelio intestinale* a citoplasma e nuclei blu–violacei; *cellule epidermiche* con citoplasma blu–verde e nuclei blu.

pH 9,2 : *muscolatura* verde con nuclei blu; *cellule cartilaginee* con citoplasma rosso–aranciato e nuclei blu; *tessuto nervoso* con sostanza bianca colorata in verde e cellule nervose della sostanza grigia a citoplasma e nuclei blu; cellule dei *tubuli mesonefrici* con citoplasma verde e nuclei blu; *cellule linfoidi intertubulari* con citoplasma e nuclei blu; cellule dell'*epitelio intestinale* a citoplasma dal blu al blu–verde e nuclei blu; cellule epidermiche con citoplasma verde e nuclei blu.

Ovociti in auxocitosi (in girini di rana):

pH 1,5 : plasma e nucleoli rossi, cariolinfa quasi incolore (alcool, Carnoy, Helly).

pH 3. : plasma e nucleoli rossi, cariolinfa quasi incolore (alcool, Carnoy, Helly).

pH 5 : plasma e nucleoli rosso–violacei, cariolinfa rossa (alcool, Carnoy, Helly).

pH 6 : plasma e nucleoli blu–violacei, cariolinfa rosso violacea (alcool); plasma e nucleoli rosso–violacei, cariolinfa rossa (Carnoy, Helly).

pH 9,3 : plasma e nucleoli blu violacei, cariolinfa verde (alcool); plasma e nucleoli viola rossastri, cariolinfa blu chiara (Carnoy); plasma e nucleoli rosso–violacei, cariolinfa blu chiara (Helly) .

pH 10 : plasma e nucleoli blu, cariolinfa verde (alcool, Carnoy); plasma blu, nucleoli blu–violacei, cariolinfa verde (Helly).

pH 11,3 : plasma e nucleoli blu, cariolinfa verde (alcool, Carnoy); plasma blu, nucleoli blu–violacei, cariolinfa verde (Helly).

In base ai risultati che abbiamo sopra riferiti, appare evidente la notevole influenza che ha il pH della soluzione verde di metile pironina sulla

colorabilità dei costituenti cellulari nei differenti tessuti. A pH molto acidi predomina la colorazione rossa da pironina; a pH molto basici all'opposto il preparato tende a colorarsi uniformemente in verde. A pH compresi tra questi valori estremi si hanno colorazioni intermedie, che passano più o meno gradualmente dal rosso, al viola, al blu, al verde. I successivi cambiamenti di colore avvengono però a pH diversi per i differenti tessuti o per i vari costituenti cellulari, onde, a determinati pH, le varie parti del preparato sono colorate con tinte diverse a seconda dei rispettivi punti di viraggio.

Specialmente su cellule animali (ovociti di rana), nell'ambito dei tre fissatori da noi usati, si rileva una certa differenza riguardo alla variazione di colore nei diversi pH. Le tonalità blu compaiono a pH inferiori nei pezzi fissati in alcool, rispetto a quelli fissati in Carnoy; in Helly la colorazione rossa si conserva anche a pH un po' maggiori.

Una fissazione troppo prolungata in Carnoy però conduce all'assunzione del colore rosso anzichè blu da parte del nucleo.

Degno di nota è il fatto che il colore rosso, specialmente dopo fissazione in Helly, viene mantenuto entro un più ampio intervallo di pH nelle zone cellulari particolarmente ricche in acido ribonucleinico (plasma e nucleoli delle cellule vegetali giovani, lieviti; plasma delle cellule linfoidi e dell'epitelio intestinale, plasma e nucleoli degli ovociti nei girini di rana).

Ciò può forse spiegare come Brachet in cellule ricche di acido ribonucleinico abbia trovato solo una variazione di intensità nelle tinte, ma non una trasformazione di colore, sperimentando in soluzioni tampone a pH non superiori ad 8.

Non intendiamo analizzare in questa breve Nota i fattori fisico-chimici che si devono ritenere responsabili della diversa colorabilità di uno stesso componente cellulare a differenti pH, e neppure l'eventuale valore istochimico, che potrebbe assumere, anche senza l'impiego della ribonucleasi, la colorazione con verde di metile–pironina in mezzo tamponato.

Ci limitiamo invece a concludere notando che nell'impiego dell'attuale metodo istochimico di Brachet è opportuno effettuare la colorazione con verde di metile–pironina in mezzo tamponato; in tal modo, scegliendo un pH appropriato, che potrà variare entro certi limiti per i diversi tipi di tessuti, si otterrà una buona colorazione di contrasto indipendentemente dal tipo di miscela verde di metile-pironina adoperata. In generale si raggiungono buoni risultati con valori di pH attorno a 6.

L'accorgimento da noi consigliato elimina gli insuccessi che si verificano frequentemente con miscele non tamponate dei suddetti coloranti.

Biologia. — *Prime osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali sulla gonade dell'anguilla* (*). Nota (**) di U. D'Ancona, presentata dal Socio G. Cotronei.

L'azione degli ormoni sessuali, sia estratti dalle gonadi che sintetici, sul differenziamento sessuale dei Vertebrati in questi ultimi anni è stata ripetutamente sperimentata e ha fornito risultati molto interessanti per l'interpretazione del problema della determinazione del sesso. Mentre nei Mammiferi l'azione degli ormoni stessi, in base ai risultati finora conseguiti (Dantschakoff, Raynaud), sembra esplicarsi soltanto sui gonodotti e sugli annessi delle gonadi, negli Uccelli e negli Anfibi, in rapporto a una maggiore labilità genotipica, si sono avute ben evidenti e chiare influenze sul differenziamento della gonade stessa, provocando anche l'inversione della determinazione genotipica (Witschi, Dantschakoff, Wolff, Willier, Padoa, Gallien, Vannini, ecc.).

I Pesci hanno pure formato oggetto di esperienze del genere, ma con risultati meno univoci e definitivi.

Vanno ricordate anzitutto le esperienze compiute da Padoa (1937) (1) su trota (*Salmo irideus*) con estratto follicolare e da Berkowitz (1938, 41) (2) su *Lebistes reticulatus* tanto con estratto follicolare che con estrogeni sintetici. Altre esperienze del genere sono state effettuate da Castelnuovo (1937) (3) con ormoni follicolare e testicolare su maschi di carpa, da Witschi e Crown (1937) (4) su *Xiphophorus helleri* con propionato di testosterone, da Régnier (1937, 38, 41) (5) sulla stessa specie tanto con propionato di testosterone che

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1948.

(1) E. Padoa, *Differenziazione e inversione sessuale (femminizzazione) di avannotti di trota (« Salmo irideus ») trattati con ormone follicolare.* « Monit. Zool. Ital. », vol. XLVIII: p. 195 (1937).

(2) P. Berkowitz, *The effects of estrogenic substances in « Lebistes reticulatus guppy ».* « Anat. Rec. », vol. LXXI, p. 161 (1938).

Id., *The effects of estrogenic substances in the fish « Lebistes reticulatus ».* « Journ. exp. Zool. », vol. LXXXVII, p. 233 (1941).

(3) G. Castelnuovo, *Effetti di alcuni ormoni sulla maturazione delle carpe.* Riv. Biol., vol. XXIII (1937); Id., *Ulteriori ricerche circa l'influenza degli ormoni sessuali sulla maturazione delle carpe.* « Rend. Accad. Lincei », ser. 6, vol. XXVIII, p. 56 (1938).

(4) E. Witschi a. E. W. Crown, *Hormones and sex determination in fishes and frogs.* « Anat. Rec. », vol. LXX, suppl. p. 121 (1937).

(5) M. Th. Regnier, *Action des hormones sexuelles sur l'inversion du sexe chez « Xiphophorus helleri » Heckel.* « C. R. Acad. Sc. », Paris, to. CCV, p. 1451 (1937); Id., *Contribution à l'étude de la sexualité des Cyprinodontes vivipares « Xiphophorus helleri », « Lebistes reticulatus ».* « Bull. Biol. France Belg. », to. LXXII, p. 385 (1938); Id., *Masculinisation des femelles de « Lebistes reticulatus » sous l'influence de la progestomone.* « C. R. Soc. Biol. », to. CXXXVI (1942).

con benzoato di estradiolo e più di recente con pregneninolone, da Baldwin e Goldin (1939) [6] pure su *Xiphophorus* con propionato di testosterone, da Eversole (1939, 41) [7] con questo stesso ormone e con pregneninolone, progesterone, desossicorticosterone, pregnandiolo ed estratto di surrenale su *Lebistes*; da Padoa (1939) [8] su *Hepatus hepatus* con ormone follicolare, da Hild (1940 [9] su *Xiphophorus helleri* con estere di proginone, propionato di testosterone e testoviron, da Bullough (1940) [10] su *Phoxinus laevis* con testosterone ed estrina, da Dantschakoff (1941) [11] su *Xiphophorus* e *Lebistes* mediante follicolina e testosterone e da Lepori (1942) [12] su *Gambusia holbrooki* con questi due stessi ormoni.

Lepori (1946) [13] ha ancora sperimentato con follicolina e testosterone su giovani anguilline (cieche) di 6–7 cm. Mentre però egli, al pari degli autori precedenti, in altre specie di Pesci aveva ottenuto risultati più o meno evidenti di stimolazione, inversione, inibizione delle gonadi, in quest'ultimo caso non osservò alcuna influenza apprezzabile sulla struttura delle creste genitali. Il Lepori da tale esperienza ha creduto perciò di poter concludere che « i fenomeni naturali che regolano le primissime fasi del differenziamento sessuale delle anguille sono del tutto indipendenti dalla azione di ormoni sessuali ».

A me è sembrato invece di dover attribuire il risultato negativo ottenuto dal Lepori a un intervento troppo precoce in confronto al tardivo differenziamento sessuale dell'anguilla. Precedenti mie osservazioni e quelle successive di Mazzeschi e Vannini [14] avevano infatti dimostrato che un inizio di differenziamento delle creste genitali di questo teleosteo si manifesta soltanto dopo i 14 cm. di lunghezza, più sicuramente intorno ai 20 cm.

6) F. M. Baldwin a H. S Goldin. *Effects of testosterone propionate on the female viviparous teleost « Xiphophorus helleri » Heckel.* « Proc. Soc. Exper. Biol. a. Med. », vol. XLII, p. 813 (1939).

7) W. J. Eversole. *The effects of androgens upon the fish « Lebistes reticulatus ».* « Endocrinology », vol. XXV, p. 328 (1939); Id., *The effects of pregneninolone and related steroids on sexual development of fish « Lebistes reticulatus ».* Endocrinology », vol. XXVIII, p. 603 (1941).

8) E. Padoa. *Prime osservazioni sulle gonadi di un Teleosteo ermafrodita « Hepatus hepatus L. » trattato con ormone femminile.* « Monit. Zool. Ital. », vol. L, p. 129 (1939).

9) S. Hild. *Versuche zur Geschlechtsdifferenzierung von « Xiphophorus helleri » Heckel.* « Jena Z. Naturwiss. », Bd. LXXIII, p. 135 (1940).

10) W. S. Bullough. *A study of sex reversal in the minnow « Phoxinus laevis L. ».* « Journ. exp. Zool. », vol. LXXXV, p. 475 (1940).

11) V. Dantschakoff. *Der Aufbau des Geschlechts beim höheren Wirbeltier.* Jena, 1941.

12) N. G. Lepori. *Azione della follicolina sul sesso di « Gambusia Holbrooki Grd. ».* « Atti Soc. Toscana Sci. Nat. », Mem., vol. LI (1942); Id., *Inversione sperimentale delle gonadi femminili di « Gambusia Holbrooki Grd. » trattata con testosterone.* « Monit. Zool. Ital. », vol. LIII, p. 117 (1942).

13) N. G. Lepori. *Effetti nulli degli ormoni sessuali sulle creste genitali delle cieche.* « Atti Soc. Toscana Sci. Nat. », Mem., vol. LIII (1946).

14) A. Mazzeschi e E. Vannini. *Nuove ricerche sul precoce differenziamento sessuale delle Anguille.* « Boll. Zool. », anno VII, p. 57 (1936).

Ho creduto perciò conveniente sottoporre a esperienza anguilline di lunghezza compresa tra 18 e 27 cm., prese nel maggio 1947 nei canali lagunari dei pressi di Fusina e Malcontenta (Venezia). Esse sono state divise in 6 lotti di 20 esemplari e poste in 5 vasche uguali di circa 70 litri ad acqua corrente. Alle anguille dei primi 4 lotti il 26 giugno fu iniettato nella massa muscolare dorsale 1/2 cm^3 di soluzione oleosa, rispettivamente di dipropionato di estradiolo (*lotto A*), di propionato di testosterone (*lotto B*), di acetato di desossicorticosterone (*lotto C*) e di progesterone (*lotto D*). Il quinto lotto (*lotto E*) fu tenuto per controllo. I preparati ormonici usati erano prodotti dalla Casa Ciba, contrassegnati rispettivamente dalle denominazioni commerciali di « Ovociclina P » « Perandren », « Percorten », « Lutociclina ». A 1/2 cm^3 di soluzione in olio di sesamo corrispondevano 2.5 mg di ormone sintetico (1 mg di dipropionato di estradiolo corrisponde a 10.000 UI).

L'iniezione dell'Ovociclina e del Perandren è stata sopportata dalle anguilline senza inconvenienti. Fra gli esemplari trattati col Percorten invece parecchi apparivano nei giorni successivi immobili e coricati di lato sul fondo della vasca; al 4° giorno tutti si erano però ripresi e apparivano di aspetto normale. Più grave fu l'azione della Lutociclina, per effetto della quale quasi tutti gli esemplari apparvero il giorno successivo immobili al fondo; di essi 10 morirono, gli altri si ripresero. Il 1° luglio il lotto D fu perciò integrato con altri 10 esemplari di uguali dimensioni e caratteristiche, cui fu iniettato soltanto 1/5 di cm^3 di soluzione di Lutociclina (pari a 1 mg). Anche fra questi esemplari alcuni rimasero immobili al fondo per un certo numero di ore, ma poi si ripresero.

Il 29 e il 30 agosto a tutti gli esemplari dei 4 lotti fu praticata in condizioni identiche una seconda iniezione dei rispettivi ormoni. Agli esemplari dei lotti A, B, e C fu iniettato 1/2 cm^3 di soluzione ormonica, a quelli del lotto D, in considerazione della precedente esperienza, 1/5 di cm^3. Anche questa volta nei lotti C e D alcuni esemplari rimasero intorpiditi per qualche tempo, ma poi si ripresero.

Tutti i lotti furono tenuti in allevamento controllato fino al novembre del 1947. Gli esemplari venivano regolarmente alimentati con vermi (*Tubifex*) e con carne, fegato e milza tritati. La temperatura dell'acqua tra il giugno e il settembre si mantenne tra i 17 e i 23° C, nella seconda metà di ottobre scese fino a 13° e verso la fine di quest'ultimo mese a 12°.

Dal lotto A il giorno 7 novembre furono prelevate 10 anguilline; dopo un esame macroscopico generale e delle gonadi, queste furono fissate in liquido di Zenker acetico. La stessa operazione fu eseguita l'11 novembre su 10 esemplari del lotto B, il 13 su 10 del lotto C, il 18 su 10 del lotto D e il 27 su 10 del lotto di controllo E.

Al momento della fissazione in tutti gli esemplari permanevano tracce cospicue della soluzione oleosa iniettata, per cui si deve ritenere che gli ormoni abbiano agito lungamente con una lenta diffusione.

Durante il periodo degli allevamenti vi fu una limitata mortalità (7 nel lotto A, 6 nel B, 1 nel C, 3 nel D, 2 nell'E). Dopo il prelevamento di 10 esemplari per lotto gli altri furono abbandonati.

Le gonadi prelevate per l'esame furono incluse in paraffina e colorate in ematossilina ferrica [15].

L'esame delle sezioni può essere riassunto nei seguenti dati:

Struttura istologica della gonade	*Lotto A* Estradiolo	*Lotto B* Testosterone	*Lotto C* Desossicorticosterone	*Lotto D* Progesterone	*Lotto E* Controllo
1. Soli protogoni e deutogoni	2	8	7	8	9
2. Oltre ai predetti, anche nidi di lepto-pachitene più o meno numerosi	4	—	1	1	—
3. Anche qualche ovocita in auxocitosi . .	—	1	1	—	—
4. Ovociti in auxocitosi abbondanti	4	1	1	1	1

Gli individui compresi nella 1ª linea devono essere considerati completamente indifferenziati. Quelli delle linee 2ª e 3ª presentano un inizio di differenziamento sessuale, quelli della 4ª devono esser considerati già differenziati in senso femminile. Dato che nell'anguilla, come è noto [16], il differenziamento in senso femminile è riconoscibile molto prima che quello in senso maschile, si può ritenere che anche gli esemplari delle linee 2ª e 3ª presentino un inizio di differenziamento femminile.

I risultati dell'esperienza appaiono quindi ben definiti e precisi. Mentre l'azione del testosterone, del desossicorticosterone e del progesterone non ha sensibilmente influito sul normale differenziamento della gonade, l'Ovociclina ha decisamente favorito il differenziamento in senso femminile [17].

(15) Ringrazio la sig.na Marcella Fidora che mi ha aiutato nell'allestimento dei preparati.

(16) U. D'ANCONA, *Nuove ricerche sulla determinazione sessuale dell'Anguilla*. «Arch. Ocean. Limnol.», anno III, p. 159 (1943).

(17) La diversità dei risultati dei singoli lotti non può essere attribuita a variazioni di grandezza degli esemplari, chè questi entro i limiti di lunghezza presi in considerazione erano distribuiti in modo simile, come appare dalla seguente tabellina.

Lunghezze (cm)	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Lotto A	—	—	1	2	1	2	3	1	—	—
» B	—	3	—	2	2	1	2	—	—	—
» C	1	1	—	3	2	1	2	—	—	—
» D	—	1	4	—	2	2	1	—	—	—
» E	—	2	1	1	2	2	—	—	1	1

In tutti i lotti i proto– e deutogoni presentavano gli aspetti strutturali abituati, ben noti per gli esemplari normali [18]; alcuni apparivano in profase o metafase mitotica, ma senza che si potesse rilevare una differente frequenza di tali aspetti nei diversi lotti. Non era quindi apprezzabile una influenza di alcuno degli ormoni sulla moltiplicazione dei proto– e deutogoni; una diversa tendenza alla moltiplicazione potrebbe essere, come è noto, un indice di precoce orientamento sessuale (Rodolico [19], Mazzeschi e Vannini).

Anche gli aspetti degli elementi in profase meiotica (lepto– e pachitene) riuniti in nidi più o meno numerosi, erano quelli già da me altrove descritti. Gli ovociti in auxocitosi presentavano il primo stadio della vitellogenesi con ovoplasma granuloso e corpi siderofili, nucleo in profase meiotica. Nell'esemplare di controllo in corso di differenziamento femminile gli ovociti arrivavano a diametri di 25.0–32.8 × 34.3–45.2 μ con nuclei di 14.0–15.6 × × 17.2–21.8 μ. Press'a poco a queste grandezze giungevano gli ovociti più grandi anche negli esemplari trattati con l'Ovociclina e con il Percorten. L'esemplare a gonadi femminili trattato con Lutociclina aveva invece ovociti che arrivavano a diametri di 20.3–29.6 × 31.2–35.9 μ con nuclei di 12.5–17.2 e quello trattato con Perandren soltanto a un massimo di 15.6 × × 21.8 con nuclei di 9.4 × 10.9 μ.

Una tendenza a organizzazione della gonade in senso maschile non fu rilevata in alcun caso. Talvolta fu notata la presenza o l'inizio della comparsa del deferente; così in 3 esemplari del lotto B, in 2 del lotto C, in uno del D. Questi dati sono però troppo poco significativi, anche in rapporto al fatto che il riconoscimento del deferente negli stadi iniziali è spesso incerto e difficile.

Nel complesso dalle esperienze compiute si può trarre la conclusione che l'ormone femminile (dipropionato di estradiolo) ha agito sulle gonadi delle anguille stimolandone il differenziamento in senso femminile; gli altri ormoni usati non hanno svolto una influenza sicuramente apprezzabile.

L'estradiolo ha esercitato una azione stimolante dell'ovogenesi provocando la meiosi e l'auxocitosi. Un'azione inibitrice, nè da parte di questo nè da parte di altri ormoni, non ha potuto essere rilevata. La presenza di singoli esemplari in ovogenesi in ciascuno dei lotti, depone in senso contrario a una tale azione; la presenza di ovociti più piccoli nell'esemplare femminile trattato con propionato di testosterone è argomento insufficiente per ammettere una simile influenza.

In altri casi, nei Teleostei stessi, oltre a una influenza stimolatrice degli ormoni sessuali, sono state invece riscontrate anche influenze inibitrici, così Padoa e Berkowitz hanno ottenuto inibizioni del testicolo per mezzo

(18) Vedi D'Ancona 1943 loc. cit.

(19) A. Rodolico, *Differenziamento dei sessi ed ovo-spermatogenesi nell'Anguilla.* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. XIII, 1933.

di ormoni estrogeni e Regnier inibizione rispettivamente dell'ovario per mezzo del testosterone e del testicolo per mezzo dell'estradiolo.

Per gli Anfibi poi Vannini [20] ha di recente potuto dimostrare che almeno entro dati limiti di concentrazione, l'estradiolo esercita una azione ginostimolatrice e il testosterone una androstimolatrice, mentre invece il desossicorticosterone esercita un'azione androinibitrice e il progesterone una ginoinibitrice.

Nelle mie esperienze sono stati impiegati questi 4 ormoni anche con l'intenzione di vedere con quale meccanismo essi esplicano la loro azione nella gonade dei Teleostei, che secondo i risultati delle mie ricerche ha un'organizzazione diversa da quella dei Vertebrati superiori [21]. Conviene ricordare che il desossicorticosterone e il progesterone sui Teleostei sono stati finora usati soltanto da Eversole con risultati negativi.

Per ora i risultati conseguiti con le presenti esperienze dànno soltanto una risposta parziale ai quesiti che mi ero proposti; essi dimostrano però chiaramente che i risultati negativi ottenuti dal Lepori non possono essere attribuiti a una mancata reattività della gonade dell'anguilla, ma dipendono dallo stadio di sviluppo troppo precoce degli esemplari impiegati. Sperimentando a uno stadio appropriato anche nell'anguilla gli ormoni sessuali riescono a stimolare il differenziamento della gonade, per lo meno il dipropionato di estradiolo è in grado di agire in modo analogo a quello del differenziatore sessuale femminile.

Caratteristica per l'anguilla è comunque la scarsa suscettibilità di fronte agli ormoni sessuali, in perfetto accordo con la lentezza con cui in questa specie avviene il differenziamento naturale delle gonadi. I risultati soltanto parziali ottenuti in queste ricerche sono probabilmente da attribuire al fatto che l'azione sperimentale è stata esercitata per un periodo troppo breve; in una seconda serie di esperienze, in atto, l'azione ormonica verrà perciò protratta per un periodo più lungo in modo da poter precisare se soltanto l'ormone femminile o se anche altri ormoni steroidi sono in grado di influire sul differenziamento sessuale di questa specie.

(20) E. Vannini, *Ricerche sul differenziamento sessuale nei Vertebrati.* «Ricerca Scientifica», suppl. vol. XVII, 1947.

(21) U. D'Ancona, *Ermafroditismo e intersessualità nei Teleostei.* «Atti XIII Congr. Int. Zool.» (in pubblicazione).

Fisiologia. — *Sulla presumibile natura riflessa della epilessia idiopatica* (*). Nota (**) di A. Alibrandi, presentata dal Socio C. Ciaccio.

Secondo mie precedenti osservazioni, la locale applicazione di prostigmina su un centro corticale sensitivo-motore (corrispondente al muscolo orbicolare delle palpebre) di cani non predisposti alla epilessia da eccitamenti afferenti, è capace di indurre uno stato analogo a quello della spontanea disposizione a questo fenomeno. In tal caso, solo il centro trattato con prostigmina e stricnina diventa epilettogeno; e non è possibile ottenere in via riflessa nessun accesso epilettiforme da altri centri sensitivo-motori, trattati con sola stricnina, stimolandone la rispettiva zona cutanea riflessogena. Impiegando, in tali circostanze, una concentrazione di prostigmina relativamente elevata, si riesce invece ad ottenere l'accesso epilettico, non solamente mediante la esclusiva stimolazione dell'area cutanea riflessogena in più stretta connessione funzionale col centro preparato colle due sostanze, ma anche mediante la sola stimolazione di una delle aree cutanee da cui, secondo le ricerche di Rizzolo (1), si dipartono impulsi capaci di elevare (in misura però sempre notevolmente minore) la eccitabilità del centro corticale dell'orbicolare. Mediante la stimolazione della zona cutanea corrispondente al centro omolaterale dei mm. estensori delle dita dell'arto anteriore fu, infatti, possibile ottenere (quale effetto apparentemente diretto ed esclusivo) l'insorgenza del clono del muscolo orbicolare palpebrale, il suo successivo accentuarsi ed infine un accesso epilettiforme generalizzato e completo. Questo accesso si dipartì in maniera indubbia dal centro dell'orbicolare (trattato con prostigmina al 0,5 ‰ e stricnina all'1 %) (2).

Quest'ultimo fenomeno va, secondo le vedute della nostra Scuola, interpretato come un fenomeno di facilitazione, dovuto agli impulsi che provengono dalla zona stimolata e che elevano la eccitabilità del centro epilettogeno rendendo così efficaci quegli altri impulsi, in condizioni ordinarie subliminari, che, in assenza di qualunque artificiale stimolazione, continuamente si originano dalla zona cutanea col suddetto centro epilettogeno in più diretta connessione funzionale.

Questo fenomeno di facilitazione ci dà ragione della indipendenza tra l'attività convulsiva del centro epilettogeno e gli eccitamenti a questo inviati dalla propria zona riflessogena: indipendenza che, secondo le vedute della nostra Scuola, non può essere che apparente.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana della Università di Messina.
(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1948.
(1) Rizzolo, « Annali di clin. terap. », VI (1926).
(2) Alibrandi, Questi « Rendiconti », ser. 8ª, vol. IV, fasc. II (1948).

Una simile indipendenza tra eccitamenti afferenti ed attività convulsiva tipicamente si osserva nei casi di epilessia idiopatica ed io ho pensato che, completando opportunamente la surriferita esperienza, si potesse ottenere una conferma della fondamentale identità che, secondo le vedute della nostra Scuola (Amantea), esiste tra l'epilessia idiopatica e l'epilessia riflessa.

Se la combinata applicazione di prostigmina e di stricnina è capace di rendere un centro epilettogeno a tal punto da rendere non necessaria per lo scoppio dell'accesso la stimolazione della relativa zona riflessogena, è evidente che, in tali condizioni, colla anestesia di tale zona si possa ottenere la prova della sua necessaria partecipazione o meno all'attività convulsiva del centro.

Tale prova ho pertanto cercato di ottenere colle semplici esperienze che sto per esporre.

In un cane operato di craniectomia e preparato colla combinata applicazione di stricnina e prostigmina [3] sul centro dell'orbicolare riuscii facilmente a determinare, mediante la esclusiva stimolazione meccanica della zona cutanea riflessogena corrispondente al centro dei mm. estensori delle dita dell'arto anteriore, la comparsa del clono del muscolo orbicolare palpebrale e la insorgenza di un accesso epilettiforme generalizzato e completo dipartentesi con sicurezza dal centro corticale a tale muscolo corrispondente. Una volta ottenuto l'accesso, anestetizzai, con stovaina, la zona cutanea riflessogena corrispondente al centro dell'orbicolare e la mucosa congiuntivale dello stesso lato; in tali condizioni non fu possibile ottenere nè scosse cloniche del m. orbicolare nè accessi epilettici per effetto della stimolazione della zona cutanea riflessogena corrispondente ai mm. estensori delle dita dell'arto anteriore nè per effetto della stimolazione di alcuna altra zona cutanea.

Operato il cane sull'opposto emisfero, preparai il centro dell'orbicolare colla applicazione di stricnina e di prostigmina ed ottenni successivamente, per stimolazione della zona riflessogena cutanea corrispondente ai mm. estensori delle dita dell'arto anteriore, scosse cloniche del muscolo orbicolare che si andarono sempre più accentuando sino a sboccare in un accesso epilettiforme generalizzato e completo. Fu successivamente infiltrata, come nella precedente esperienza, la zona cutanea riflessogena corrispondente al centro dell'orbicolare sostituendo alla soluzione anestetica liquido di Ringer. In tali condizioni, la stimolazione meccanica della zona cutanea riflessogena corrispondente al centro dei mm. estensori delle dita dell'arto anteriore continuò a manifestarsi fortemente epilettogena pel centro dell'orbicolare. Il mancato scoppio dell'accesso durante la prima parte dell'esperienza, in seguito alla anestesia della zona non poteva, come in taluni casi succede, essere attribuito pertanto alla facile esauribilità dei centri dell'animale, che, talvolta, non permette di provocare in via riflessa più di un accesso epi-

3) Abbiamo adoperato la stricnina (nitrato) in soluzione all'un per cento e la prostigmina « Roche » in soluzione al 0,5 ‰. Applicammo le suddette sostanze mediante dischetti di carta bibula di due mm. di diametro.

lettico. Tale esperienza, colle medesime modalità, venne eseguita in altri due cani, ottenendo sempre il medesimo risultato su descritto.

Queste elementari esperienze credo che costituiscano un solido argomento a favore della fondamentale identità del meccanismo di produzione delle due forme apparentemente diverse di epilessia e, nel contempo, della concezione della nostra Scuola sulla necessità degli impulsi provenienti dalla zona cutanea riflessogena nel determinare lo stato attivo del corrispondente centro. Ed infatti, gli impulsi facilitanti, sia che essi pervengano ai centri da una via congenita, come in queste ultime esperienze, sia che pervengano da una via acquisita, come allorchè sono originati in seguito ad uno stimolo condizionato (4), si dimostrano del tutto inefficaci a scatenare fenomeni motorii riflessi quando si è provocata l'anestesia della zona riflessogena.

L'epilessia idiopatica ci sembra invece che differisca dalla epilessia riflessa propriamente detta appunto per la maggiore importanza che in quella possono assumere i fenomeni di facilitazione. Una importante caratteristica dell'artificiale fattore disponente alla epilessia riflessa, da me individuato nella prostigmina, parrebbe essere appunto quella di esaltare i fenomeni di facilitazione; e l'epilessia idiopatica potrebbe pertanto essere caratterizzata da una netta prevalenza del fattore predisponente sugli altri due fattori, che, secondo Amantea, entrano in gioco nel determinismo della epilessia riflessa. A sostegno di tale ipotesi va ricordato il fatto che nei cani fortemente predisposti, preparati alla epilessia secondo la nota tecnica di Amantea, non è infrequente l'insorgenza di accessi epilettici apparentemente spontanei.

Da qualunque cosa dipenda la notevolissima azione della prostigmina, quale artificiale fattore disponente, non si può non prendere in considera-

(4) Secondo i concetti della nostra Scuola i riflessi condizionati motorii di difesa, dei quali un tipico esempio è costituito dal riflesso condizionato dell'ammiccamento, ripetono il loro intimo meccanismo appunto in un fenomeno di facilitazione. Sotto l'azione di uno stimolo condizionato, il quale, come abbiamo osservato, è capace di elevare l'eccitabilità del centro del muscolo orbicolare, diventano efficaci impulsi in condizioni ordinarie subliminari che continuamente pervengono dalla zona riflessogena con questo centro connessa.

In tali circostanze prima delle nostre esperienze era sfuggita a tutti i precedenti ricercatori, compreso il PAVLOV, l'importanza della zona cutanea riflessogena nel determinismo del riflesso condizionato. Dieci anni or sono, a conferma della concezione suesposta del meccanismo dei riflessi condizionati, ci riuscì di dimostrare come l'anestesia della zona cutanea riflessogena sia capace di impedire il manifestarsi del riflesso condizionato dell'ammiccamento. In tal caso è chiaro come gli impulsi facilitanti siano da soli inefficaci a provocare il riflesso. Questi risultati sono anche in armonia con i noti risultati di MARTINO. Questo Autore ha dimostrato che la stessa stimolazione faradica di un centro s. m. corticale è incapace di provocare alcun effetto motore allorchè essa venga eseguita durante l'anestesia della zona riflessogena. La necessità degli impulsi dipartentisi dalla zona riflessogena nel determinare lo stato attivo del centro sembrerebbe pertanto un fatto ormai dimostrato, tanto nel caso del riflesso condizionato che nel caso del riflesso congenito. I fattori capaci di esaltare l'eccitabilità del centro, quali la stricninizzazione e la faradizzazione, e gli impulsi facilitanti prodotti dallo stimolo condizionato, sarebbero pertanto del tutto incapaci da soli di promuovere lo stato attivo del centro.

zione la elevata azione anticolinesterasica di questa sostanza giacchè le esperienze di Bonnet e Bremer [5] e di Moruzzi [6] costituiscono un solido argomento a favore della ipotesi che il fenomeno di facilitazione possa essere dovuto a liberazione di acetilcolina a livello delle sinapsi interneuroniche del sistema nervoso centrale. Che l'accumulo di acetilcolina, in quantità sufficiente, a livello dei centri corticali sensitivo–motori possa costituire un fattore indispensabile, anche se non l'unico, necessario a determinare lo stato di disposizione, si potrebbe pensare in base al fatto che farmaci capaci di comportarsi come artificiali fattori predisponenti quali la morfina (Amantea) sono dotati di una azione anticolinesterasica (Bernheim e Bernheim [7]) ed hanno bisogno per agire in questo senso di un certo lasso di tempo. Questo lasso di tempo potrebbe appunto essere necessario all'accumulo nell'organismo dell'animale della acetilcolina che continuamente si libera a livello delle terminazioni nervose colinergiche.

Sto approntando ricerche intese a chiarire questo punto mediante la contemporanea somministrazione di morfina ed acetilcolina in animali non predisposti; ma, qualunque sia la natura delle sostanze la cui presenza nel sangue è responsabile della disposizione alla epilessia riflessa, io credo che le attuali ricerche mi autorizzino a sospettare che, mentre una certa concentrazione di esse a livello dei centri corticali determina questo fenomeno, una concentrazione più elevata delle medesime possa invece, sempre attraverso il medesimo meccanismo, essere responsabile del fenomeno della epilessia idiopatica.

Patologia. — *Studi sull'effetto della vitamina « P » e del dicumarolo sulla formazione della protrombina.* Nota di D. BALDUCCI, presentata [*] dal Corrisp. G. VERNONI.

In questi ultimi anni le numerose indagini sul processo di coagulazione del sangue hanno messo in luce numerosi nuovi elementi, dai quali le classiche teorie di Schmidt, Morawitz, Bordet, ecc. risultano ulteriormente chiarite.

Seguendo il comune schema della coagulazione del sangue, prima si attribuiva l'attivazione della protrombina alle piastrine, agli estratti di tessuto, o meglio ad un lipoide termostabile: la cefalina. Rimaneva però inspiegato il meccanismo di queste attivazioni tanto più che si mettevano questi tre fattori attivanti su di uno stesso piano mentre, come chiarisce Fredericq [1], malgrado una similitudine apparente, la loro azione differisce

(5) BONNET e BREMER, «C. R. Soc. biol.», *126*, 1271 (1937).
(6) MORUZZI, «Arch. internat. Physiol.», *49*, 33 (1939).
(7) BERNHEIM e BERNHEIM, «J. Pharmacol.», *57*, 427 (1936).
(*) Nella seduta del 9 giugno 1948.
(1) P. FREDERICQ, «Actualitès Biochimiques», *5* (1946).

in più punti. Infatti gli estratti di tessuto e le sospensioni di piastrine coagulano il plasma su vetro nudo altrettanto rapidamente quanto su vetro paraffinato, mentre i lipoidi hanno scarsa azione su vetro paraffinato. Poi, mentre l'iniezione endovenosa di lipoide è inoffensiva, quella di estratti di tessuto è seguita da coagulazione intravascolare. Infine il plasma conservato che sappiamo coagulare meno rapidamente e che, secondo quanto ha visto Quick [2], [3], presenta un allungamento del tempo di protrombina, secondo Fredericq [4] contiene invece una quantità normale di protrombina come lo dimostra la sua attivazione da parte di una sospensione di piastrine fresche in presenza di calcio o della piocianeo coagulasi prodigioso coagulasi e actinomiceto coagulasi. E ciò si è potuto spiegare solo allorchè è stata trovata, nel siero e nel plasma fresco, una sostanza ad azione trombochinasica che sarebbe la vera attivatrice diretta della protrombina [5], [6], [7], [8], [9]. Per cui lo stesso Quick [10], che prima aveva pensato che la protrombina si alterasse con la conservazione, è giunto alla conclusione che la protrombina è un complesso di due fattori A e B riuniti dallo ione calcio. Il componente A è una sostanza che si inattiva con riscaldamento per 30′ a 56° e con la conservazione e non sarebbe altro che la trombochinasi plasmatica. Il componente B invece è una sostanza che si inattiva a 60° e che scompare nell'avitaminosi K e nella intossicazione da dicumarolo. Si tratterebbe di una euglobulina [11].

Breda [12] ricollegando i nuovi concetti alle classiche teorie sulla coagulazione, dice che la trombochinasi plasmatica o sostanza A, che avrebbe i caratteri di una triptasi, attivata dagli agenti tromboplastici, da fenomeni di superficie ed, in vivo, da una probabile trombocatalisina ad azione simil-tripsinica agirebbe, in presenza di calcio sulla sostanza B o protrombina determinando la rottura della grossa molecola di euglobulina in due o più molecole più piccole ed attive [11]. Questa azione può essere anche esercitata dalla tripsina, dai veleni di alcuni serpenti e da estratti batterici, come la sunnominata piocianeo coagulasi, che non sarebbero altro che degli enzimi proteolitici capaci di agire direttamente sulla protrombina anche in assenza di calcio. Comunque però il calcio accelera sempre la loro azione. Le molecole più piccole ottenute dalla rottura della grossa molecola della protrombina non sarebbero altro che la trombina la quale, a differenza della protrombina,

(2) A. J. Quick, « Amer. J. Clin. Path. », *10*, 220 (1940).
(3) A. J. Quick, « Amer. J. Physiol. », *131*, 455 (1940).
(4) P. Fredericq, « Arch. Internat. Physiol. », *52*, 73 (1942).
(5) F. Widenbauer und C. Reichel, « Klin. Wschr. », 1129 (1941).
(6) F. Widenbauer und C. Reichel, « Klin. Wschr. », 524 (1942).
(7) F. Widenbauer und C. Reichel, « Biochem. Z. », *311*, 307 (1942).
(8) C. Reichel, « Klin. Wschr. », *2*, 1081 (1942).
(9) C. Reichel, « Klin. Wschr. », *1*, 258 (1943).
(10) A. J. Quick, « Amer. J. Physiol. », *140*, 212 (1943).
(11) T. Astrup, *Biochemistry of Blood Coagulation*. « Acta Physiol. Scand. F. », supp. *21*.
(12) Breda, *Teoria e Metodologia nello studio della coagulazione del sangue*. Ed. Ambrosiana.

è stata isolata e sarebbe capace di essere dializzata attraverso membrane di cellofan. Questa trombina oltre ad avere i caratteri di un fermento proteolitico potrebbe essere considerata come una fibrinogenodenaturasi per cui la gelificazione del fibrinogeno in fibrina sarebbe dovuta alla parziale denaturazione di questa proteina plasmatica già di per sè tendente alla denaturazione spontanea [1].

La protrombina. – Dopo questo rapido accenno alla coagulazione del sangue è bene prendere in considerazione l'elemento che a noi più interessa: la protrombina. Finora non la si è mai potuto isolare in quanto non si è riusciti a separarla dalla trombochinasi plasmatica [12] per cui ben poco si sa di preciso sulla sua costituzione. Si suppone si tratti di una euglobulina inattiva con peso molecolare di circa 150.000, prodotta per la massima parte, se non completamente, dal fegato [13], [14]. Anche il meccanismo di produzione è quasi del tutto sconosciuto. L'unico dato importante da diversi anni acquisito, ed oggi universalmente accettato, è costituito dalla necessità della presenza di vitamina K nel fegato per far sì che venga prodotta la protrombina. Le diete carenzate determinano delle sindromi emorragiche accompagnate da diminuzione dell'attività protrombinica [15]. Poichè la vitamina K, come è noto, è per la massima parte sintetizzata dalla flora intestinale, e riassorbita in presenza di bile, tutte le volte che, con dei farmaci attivi contro la flora intestinale, si distruggano i germi putrefattivi, oppure, tutte le volte che vi sia un ostacolo al flusso biliare, si evidenzia uno slivellamento della percentuale di attività protrombinica che si può dimostrare con il metodo di Quick. Non insisto qui sulla letteratura riguardante l'argomento, essendo il fenomeno ormai studiato estesamente sia nel campo sperimentale, sia in quello clinico.

Negli ultimi anni le ricerche sulla ipoprotrombinemia sono state ulteriormente estese con lo studio dell'azione del dicumarolo [16]. Si tratta del 3, 3′ metilene bis (4 idrossicumarina) che, somministrato sia per bocca che per via parenterale determina una forte caduta del tasso di protrombina accompagnata da manifestazioni emorragiche dovute anche alle lesioni tossiche sui capillari del suddetto farmaco [15]. Si suppone che esso agisca quale inibitore della formazione della protrombina nel fegato, ma che contemporaneamente provochi, direttamente od indirettamente, la distruzione o la neutralizzazione di quella già esistente nel plasma, come dimostra il forte aumento del tempo di protrombina che si ha in 24-72 ore con dosi anche minime [17]. Naturalmente si è cercato subito di studiare una possibile interferenza di azione tra vitamina K e dicumarolo. Ricercatori americani pen-

(13) H. Smith, E. D. Warmer and K. M. Brinkhaus, « J. esper. Med. », *66*, 801 (1937).

(14) W. D. W. Andrus, J. W. Lord and R. A. Moore, « Surgery », *6*, 899 (1939).

(15) H. Dam and F. Schonheyder, « Nature », *135*, 652 (1935).

(16) A. J. Quick, « Physiol. Reviews », *24*, 297 (1944).

(17) A. J. Quick, « J. Biol. Chem. », *161*, 33 (1945).

sano che il dicumarolo blocchi i sistemi enzimatici che agiscono nella sintesi della protrombina esplicando, a livello del substrato, un'azione antagonista [18]. Questa ipotesi sarebbe suggerita dalla similitudine delle formule chimiche ed inoltre la somministrazione di vitamina K a conigli riduce sempre l'effetto del dicumarolo [18]. Questa azione antagonista aumenterebbe allorchè alla vitamina K si unisce la vitamina C [19], [20].

Ma un nuovo antagonista dell'azione del dicumarolo ho potuto identificare nella vitamina P o *citrina*. Essa si è dimostrata capace non solo di annullare l'azione del dicumarolo, ma anche di determinare un notevole aumento del tasso di attività protrombinica.

RICERCHE PERSONALI. - È stato constatato che conigli trattati contemporaneamente con dicumarolo e vitamina P dimostrano una minore labilità dei capillari, per cui le emorragie, anche con dosi massime e subentranti di dicumarolo diventano nettamente distrettuali oppure non si verificano e l'animale continua a vivere in perfetto benessere. Inoltre si è potuto osservare che l'attività protrombinica in queste condizioni diminuisce più lentamente e talvolta dopo un primitivo slivellamento viene reintegrata per lo meno in parte [21].

Dovendo escludere per ricerche ormai note [22] una capacità di assuefazione al farmaco, abbiamo pensato che realmente esistesse un antagonismo tra l'azione della vitamina e quella del dicumarolo. Però avendo fatto le prime titolazioni su plasma intero abbiamo creduto opportuno ripetere l'esperimento con direttive più precise e titolando su plasma diluito al 10 %.

Così si sono presi quattro conigli di circa due anni e del peso di kg 2,500. Questi conigli sono stati seguiti per 10 giorni prima di iniziare l'esperimento onde stabilire con esattezza le oscillazioni del tasso di attività protrombinica. Constatato che questo oscillava tra il 90 % e 110 %, abbiamo somministrato a 2 animali mg 1 pro kg di dicumarolo e a due altri mg 20/kg. di vitamina P (mg 10/kg endovena + mg 10/kg per bocca).

Abbiamo notato nei primi due una diminuzione transitoria del tasso di attività protrombinica e negli altri due invece un transitorio aumento. Dopo una ventina di giorni si è ripetuto l'esperimento invertendo i farmaci e cioè ai due conigli ai quali erano stati dati mg 20/kg di vitamina P è stato somministrato mg 1/kg di dicumarolo mentre a quelli che avevano avuto mg 1/kg di dicumarolo sono stati somministrati mg 20/kg di vitamina P. Il risultano è stato il medesimo di prima. Dopo altri 20 giorni, i farmaci con le stesse

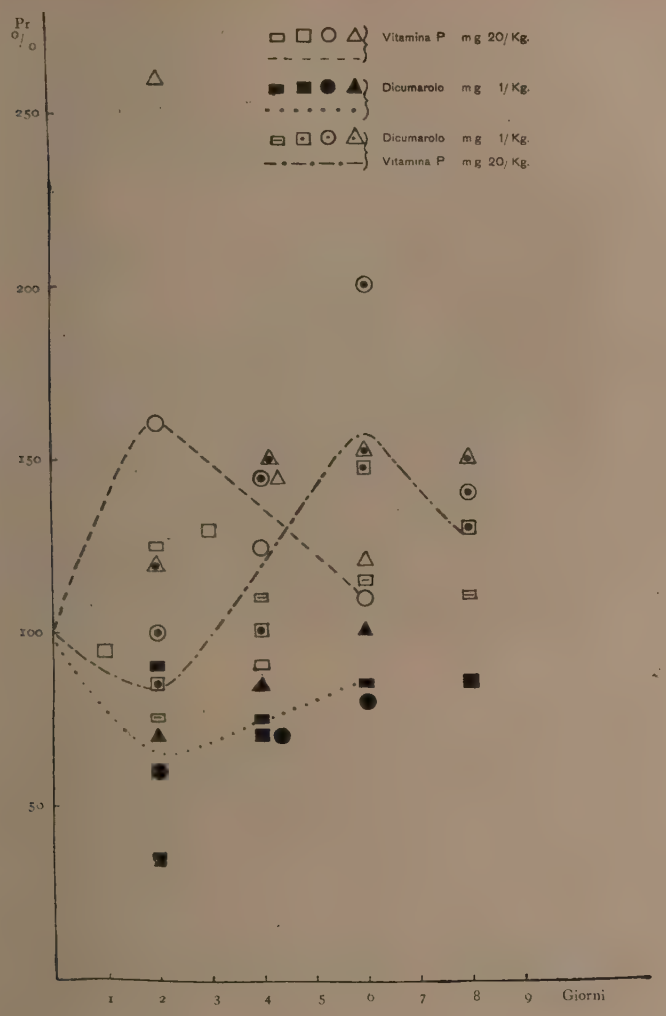
(18) OVERM, STAHMANN, SULLIVAN, HULBNER, CAMPBELL and LINK, « J. Biol. Chem. », *142*, 941 (1942).

(19) R. S. OVERMAN, M. A. STAHMANN and K. P. LINK, « J. Biol. Chem. », *145*, 155 (1942).

(20) GLAVIND and KNUD F. JANSEN, « A. Phys. Scand. », *8* (1944).

(21) D. BALDUCCI, « Boll. Soc. Biol. Sper. », *3*, 243 (1948).

(22) H. A. CAMPELL, W. L. SMITH, KP. ROBERTS and LINK, « J. Biol. Chem. », *138*, I (1941).



dosi sono stati somministrati contemporaneamente. Nei primi due giorni seguenti la percentuale di attività protrombinica ha avuto una certa tendenza a diminuire per poi, però, risalire nettamente mettendo in evidenza l'azione della vitamina P, che si è manifestata al completo se pure con maggiore lentezza. Le curve annesse riportano i risultati raggiunti. Gli esperimenti sono stati condotti con « Citrina » Bayer e dicumarolo Squibb. Il tempo di protrombina è stato eseguito secondo le modalità suggerite da G. Tancredi [23].

(23) G., TANCREDI, « Minerva Medica », *35*, 210 (1943).

Lesioni epatiche. – Caratteristiche necrosi da dicumarolo sono state descritte da alcuni ricercatori [24], [25] nei topi, nei conigli e nei ratti; altri invece dichiarano di aver trovato i fegati normali [26], [27], [28].

Noi abbiamo messo a confronto i fegati di otto conigli di circa kg 2,500 trattati con il solo dicumarolo (100 mg in 10 giorni circa) con quelli di altri otto a cui era stato somministrato oltre al dicumarolo anche della vitamina P (circa 100 mg ciascuno in 3–4 volte).

I preparati istologici dei fegati di conigli trattati con solo dicumarolo ci hanno presentato un quadro di degenerazione torbida diffusa. Talvolta piccole zone in degenerazione grassa. Qualche cellula necrotica. In quasi tutti i casi, infiltrazioni leucocitarie delle zone necrotiche più o meno accentuate o mobilizzazione degli endoteli. In due degli otto preparati dei fegati di conigli trattati con solo dicumarolo erano evidenti delle zone di necrosi estese, con intensissima infiltrazione leucocitaria, specie intorno alle vene centrolobulari. Questo quadro istologico non è stato osservato in nessuno degli otto fegati di conigli trattati anche con la vitamina, in cui per lo più anche le lesioni degenerative sono meno accentuate.

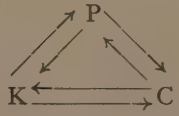
Questo ci fa presumere che una certa azione protettiva verso il fegato da parte della vitamina si è avuta, tanto più se si pensa che le dosi totali di dicumarolo sono state leggermente più elevate nei conigli trattati con la vitamina e che le dosi stesse della vitamina erano ben lungi dal controbilanciare quelle del dicumarolo.

Discussione. – Sembra evidente da questi nostri primi risultati che un antagonismo esiste tra vitamina P e dicumarolo. La vitamina P insieme con la K diventa uno dei fattori che, indirettamente e, forse, con un meccanismo combinato e collegato con la vitamina C, influisce sulla coagulazione del sangue. La vitamina P svolgerebbe un'azione di protezione sulla vitamina C onde, in assenza di citrina, il bisogno di vitamina C oltrepasserebbe largamente il normale apporto alimentare e si avrebbe anche l'inverso [29]. Anche le lesioni capillari dello scorbuto sperimentale regrediscono perfettamente solo se alla vitamina C si aggiungono piccole quantità di vitamina P [30]. Il meccanismo d'azione della citrina sarebbe legato a quello dell'acido ascorbico nel senso che agirebbero di conserva in fenomeni ossidoriduttivi [31]. D'altra parte proprio con lo studio dell'azione del dicumarolo si è notata non solo un'azione antagonista, probabilmente indiretta, della sola

(24) Richards and Cortele, « Proc. Soc. Exper. Biol. and Med. », *50*, 237 (1942).
(25) Rose, Harris, Chen, « Proc. Soc. Exper. Biol. and. Med. », *50*, 228 (1942).
(26) Bingham, Meyer, Pohle, « Am. J. Sci. », *202*, 563 (1941).
(27) Bollman, Preston, « J. A. M. A. », *120*, 201 (1943).
(28) Butt, Allen and Bollman, « Proc. Staff. Meet Mayo Clin. », *16*, 388 (1941).
(29) Parrot, Coterreau, « C. R. Soc. Biol. », *1*, 61 (1946).
(30) F. Bicknell, F. Prescott, *The vitamins in Medicine*, ediz. II^a^. Londra 1947.
(31) P. Baulanger, « Exp. Ann. Bioch. Med. », IV (1944).

vitamina C [32], ma anche un'integrazione dell'antagonismo della vitamina K la quale, solo se associata alla C, riesce ad annullare completamente l'azione del dicumarolo [19].

Già da questi primi dati comincia ad emergere la relazione esistente fra queste tre vitamine. Si tratta di tre biocalizzatori, che si possono porre ai vertici di un triangolo, strettamente interfluenzantisi.



Infatti l'azione della vitamina P sui capillari sarebbe collegata con quella della vitamina C, mentre la sua energica azione sull'attività protrombinica, svelata dal nostro esperimento, la collegherebbe alla vitamina K. L'interferenza di azione fra dicumarolo e vitamina P, se è dimostrata nei fatti esposti nella presente Nota, non è ancora spiegabile se non in via di ipotesi arbitrarie. Alla formulazione di queste, tuttavia, ci sembra non dovrebbe essere estranea la considerazione della analoga composizione molecolare del dicumarolo (cumarina) e della Citrina (almeno secondo Szent-Gyorgji) [33] e quindi di una possibile loro competizione su uno stesso determinabile substrato.

Patologia. — *Ricerche comparative sull'azione tossica per via muscolare e per via orale del curaro, della stricnina e dello iodo-metilato di stricnina* [*]. Nota IV di E. Biocca e E. Tarantino, presentata [**] dal Corrisp. V. Puntoni.

In precedenti comunicazioni Biocca e coll. [1],[2],[3] avevano posto in evidenza che il curaro viene preparato dagli Indi Makù mediante una decozione lenta di cortecce e radici diverse e che durante la prolungata ebollizione si produce una trasformazione delle proprietà fisiche, chimiche e biologiche del decotto.

(32) W. R. Sullivan, E. O. Gangstad and K. P. Link, « J. Biol. Chem. », *151*, 477 (1943).

(33) P., Rondoni, « Biochimica », vol. II, p. 616, ediz. 1945.

(* Lavoro eseguito nell'Istituto d'Igiene dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) E. Biocca, *Preparazione del curaro da parte degli Indi Makù. Piante usate. Attività.* (Regione dell'Alto Rio Negro-Amazzoni). Nota I. « Rend. Acc. Naz. Lincei » (Classe Sc. fis. mat. nat.), *2*, 689-696 (1947).

(2) E. Biocca e M. Ippolito, *Ricerche chimico-biologiche sulla composizione del curaro Makù*. Nota II. Ibidem, *2*, 872-878 (1947).

(3) E. Biocca e M. Ippolito, *Ricerche chimico-biologiche sul metodo indio di preparazione del curaro Makù*. Ibidem, *3*, 162-165 (1947).

La preparazione infatti è considerata finita quando la massa ha assunto un aspetto denso e pastoso come di miele molto spesso. Gli estratti semplici delle piante usate dagli Indi per fare il curaro non producono negli animali inoculati parenteralmente una sintomatologia curarica, ma provocano la morte in seguito a una lunga agonia accompagnata da spasmi, tremori e convulsioni. Sottoponendo a un processo di iodometilazione questi estratti si ottiene un forte aumento dell'azione tossica e la morte pone fine ad un tipico avvelenamento curarico. La iodometilazione del curaro già preparato dagli Indi non riesce invece a modificarne le proprietà biologiche.

È risaputo che anche la stricnina, in seguito a iodometilazione assume proprietà curarizzanti, come è noto che il curaro posto direttamente a contatto con i centri nervosi provoca convulsioni. A differenza della stricnina però il curaro attraversa con molta difficoltà le mucose gastro-intestinali. Questa importantissima proprietà infatti è quella che permette agli Indi di nutrirsi impunemente di animali uccisi col curaro.

Considerando che probabilmente quelle ragioni di indole fisico-chimica che ostacolano il passaggio del curaro attraverso alle mucose siano le stesse che permettono al curaro di esplicare elettivamente la sua azione paralizzante periferica, ci è sembrato interessante studiare il rapporto tra la quantità di curaro necessaria per uccidere un animale per via muscolare e quella necessaria per ucciderlo per via boccale.

Dato il crescente interesse suscitato dal curaro in terapia ci siamo già in precedenza occupati della possibilità di valutare effetti tossici collaterali del curaro, usando gli embrioni di pollo [4] che hanno la possibilità di sopravvivere a una completa curarizzazione, perchè la loro respirazione e nutrizione non dipendono da movimenti volontari. Lo studio del rapporto tra dose minima letale per via muscolare e per via boccale si presta, a nostro avviso, ad utili applicazioni pratiche permettendo probabilmente una classificazione biologica sia di curari di provenienze diverse, sia di sostanze ad azione curarizzante.

A compimento delle nostre ricerche abbiamo volutó determinare anche il rapporto tra la dose minima mortale per via muscolare e la minima mortale per via boccale della stricnina, e dello iodometilato di stricnina.

Queste ultime prove ci avrebbero dimostrato se la semplice iodometilazione della stricnina avrebbe, contemporaneamente alla trasformazione del veleno da convulsivante in paralizzante, rallentato anche il suo assorbimento attraverso alle mucose.

Per quanto si riferisce alla letteratura sul curaro inviamo al recente libro di Mc Intyre [5] nel quale sono riportate quasi tutte le più importanti citazioni bibliografiche.

(4) E. Biocca e P. Rodrigues, *Estudos etno-biologicos sôbre os indios da região do Alto Rio Negro Amazonas*. Nota III. *(g) Comportamento dos embriões de galinha ao envenenamento com curare Makù: possibilidades de evidenciar ações tóxicas colaterais de uma mostra de curare*. «Arq. de biol.», *30*, 134-138 (1946).

(5) A. R. Mc Intyre, *Curare. Its history, nature and clinical use*. The Univ. of Chicago Press. Chicago 1947.

Nelle nostre ricerche abbiamo usato due diversi campioni di curaro indio: il primo campione era stato raccolto dal Biocca presso gli Indi Makù dell'Alto Rio Negro ed era conservato in vasetto di terra cotta, mentre il secondo campione, di provenienza amazzonica non ben determinata, era conservato in zucchina ed era stato gentilmente ceduto dal prof. Rocha e Silva dell'Istituto Biologico di S. Paulo.

La stricnina è stata utilizzata nella forma di alcaloide base. La iodometilazione della stricnina è stata eseguita dal dott. E. Del Pianto, assistente presso l'Istituto di Chimica dell'Università di Roma, al quale esprimiamo i nostri ringraziamenti, seguendo il metodo di Stahlschmidt [6] e partendo dalla stessa stricnina base usata nelle esperienze.

L'animale di esperimento è stato la cavia del peso oscillante sui 300 grammi. Per ogni dosaggio sono stati usati come minimo quattro animali. Le iniezioni endomuscolari venivano praticate disciogliendo quantità crescenti del prodotto da saggiare in 2 cm^3 di soluzione fisiologica e inoculando nei muscoli della coscia. Il dosaggio dell'azione velenosa per via orale veniva eseguito mantenendo l'animale 24 ore a digiuno e introducendo poi la sostanza con una spatolina nella bocca, mantenuta forzatamente aperta. Abbiamo incorporato sia la stricnina che lo iodometilato di stricnina con burro, che facilitava la somministrazione.

Risultati. – I due campioni di curaro, pur essendo di origine diversa hanno dato risultati quasi indifferenziabili. La dose minima mortale per via orale, sia col primo che col secondo campione è stata da ottanta a novanta volte più elevata di quella capace di provocare la morte per via muscolare. Infatti circa un mg di curaro inoculato per via endomuscolare è stato sufficiente per uccidere le cavie, mentre ne occorrevano da 80 a 90 per via boccale. La morte degli animali avvelenati per via orale avveniva in seguito a sintomi in cui era evidente anche una intossicazione nervosa centrale (tremori, contrazioni muscolari, lievi convulsioni ecc.), come se il filtro gastro–intestinale avesse lasciato passare elettivamente quelle tracce di alcaloidi ad azione nervosa centrale ancora esistenti nel curaro. L'agonia era più prolungata che nel tipico avvelenamento curarico consecutivo ad inoculazione parenterale.

La stricnina, come era conosciuto, ha avuto un comportamento totalmente differente dal curaro. Il rapporto infatti, tra la dose minima mortale per via muscolare e quella per via orale invece di essere 1:80, 1:90 come nel curaro è stato di circa 1:5. Un milligrammo di stricnina inoculato per via muscolare uccideva le cavie (dose corrispondente a quella dei due campioni di curaro studiati), però solo 5 mg erano sufficienti a provocare la morte se somministrati per via boccale. L'avvelenamento, rapidamente mortale, seguiva dopo pochi minuti dall'introduzione dell'alcaloide nella bocca della cavia.

(6) C. Stahlschmidt, « Pogg. Ann. », *108*, 513.

Lo iodometilato di stricnica infine ha ucciso le cavie per via muscolare nella dose di 2 cg. Lo stato paralitico colpiva l'animale in forma più improvvisa e rapida che in seguito ad avvelenamento da curaro. L'introduzione di 50 cg di iodometilato di stricnina per via orale, corrispondenti a circa 25 dosi minime letali per via muscolare, ha determinato i primi sintomi gravi di avvelenamento dopo circa un'ora e ha provocato la morte della cavia dopo circa tre ore, in seguito a periodi alterni di prostrazione estrema dell'animale, con scosse e tremori muscolari, seguìti da sempre più brevi intervalli di relativo miglioramento. La somministrazione per bocca di 30 cg di iodometilato di stricnina uccideva con una sintomatologia analoga che si manifestava in forma grave dopo più di un'ora e si protraeva per oltre sei ore. Infine 20 cg introdotti nelle vie digerenti non provocavano disturbi evidenti.

Conclusioni. – Il rapporto tra dose minima letale per via muscolare e dose minima letale per via orale, usando la cavia come animale di esperimento, è, per il curaro indio da noi studiato, di circa 1 : 80, 1 : 90 e, per la stricnina, di circa 1 : 5.

La iodometilazione della stricnina oltre a conferire all'alcaloide le conosciute proprietà paralizzanti, modifica anche il rapporto esistente nella stricnina tra dose minima mortale per via muscolare e per via orale. Lo iodometilato di stricnina infatti attraversa con molta maggior lentezza della stricnina le mucose gastro-enteriche.

Patologia. — *Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale* (*). – II. *Sulla birifrangenza totale*. Nota di A. Ascenzi, presentata (**) dal Corrisp. G. Vernoni.

Le nostre conoscenze sulle proprietà birifrattive dell'osso risalgono ormai ad oltre un settantennio quando, specie per opera di Ebner (1) (1874) fu introdotto l'uso del microscopio a luce polarizzata nello studio della struttura istologica del tessuto osseo. Da allora molti autori (Gebhardt (2), Petersen (3), Jaffe (4), Schmidt (5), ecc.) si sono occupati dell'argomento, facen-

(*) Le ricerche che fanno oggetto di questa Nota sono state eseguite sotto la direzione del prof. E. Onorato e del suo Assistente dott. M. Fornaseri.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(1) V. Ebner, « Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. », Kl. III, *70*, 105 (1874).

(2) F. A. M. W., Gebhardt, « Arch. Entw. mechan. », *11*, 383 e *12*, 1, 167 (1901); *20*, 187 (1906).

(3) H. Petersen, « Verh. physik.-med. Ges. Würzburg », *51*, 132 (1926); « Roux Arch. », *112*, 112 (1927); *Die Organe des Skeletsystems*, in « Handb. d. mikr. Anat. d. Menschen, herausg. v. Moellendorf », vol. 2, parte II, 521 (1930).

(4) H. L. Jaffe, « Arch. Surg. », *19*, 24 (1929); « Am. J. Pathol. », *5*, 323 (1929); « Arch. Surg. », *20*, 355 (1930).

(5) W. J. Schmidt, « Ber. d. Oberhess. Ges. f. Nat. u. Heilkunde zu Giessen », *15*, 219 (1933).

done oggetto di Memorie del più alto interesse. Le ricerche hanno però sempre avuto carattere puramente qualitativo e descrittivo e non è fatto mai accenno a determinazioni numeriche quantitative delle proprietà ottiche relative.

Solo recentemente un tentativo è stato fatto da due autori belgi Dallemagne e Mélon [6] i quali hanno determinato la potenza birifrattiva del femore di bue, la curva di birifrangenza di forma e la birifrangenza propria della frazione minerale, ricavandone, insieme a considerazioni sull'indice di rifrazione e sui rapporti volumetrici relativi tra frazione organica e minerale, ardite conclusioni sui rapporti strutturistici tra sostanza organica e componente minerale dell'osso.

Prendendo lo spunto da queste osservazioni, ho eseguito una serie di rilievi sulla potenza birifrattiva totale, sulla birifrangenza di forma e la birifrangenza propria dell'osso umano normale. Nella presente Nota riferisco i risultati sulla potenza birifrattiva totale della diafisi del femore.

MATERIALE E METODO DI STUDIO. – Come materiale di studio ho usato il tratto medio della diafisi femorale di 7 dei 20 soggetti umani che hanno fatto argomento della precedente Nota sull'indice di rifrazione dell'osso e precisamente i casi contrassegnati F. M., ♂, 1 a.; N. G., ♀, 3 a.; P. A., ♂, 7 a.; P. E., ♂, 11 a.; C. A., ♂, 25 a.; L. G. B., ♂, 51 a.; A. A., ♂, 81 a.

Per la determinazione della potenza birifrattiva dell'osso totale ho prestato particolare cura alla scelta delle parti dell'osso più atte allo scopo, alle modalità di preparazione delle sezioni, al metodo di misura.

Poichè la potenza birifrattiva viene dedotta in base alle misure dei ritardi e degli spessori è necessario che le zone in cui si pratica la determinazione soddisfino al duplice requisito della omogeneità e della non sovrapposizione di piani di differente orientazione ottica.

Le misure sono state eseguite quasi esclusivamente sui sistemi haversiani con gli accorgimenti seguenti:

1° Considerando la frequenza con la quale all'indagine microscopica con luce polarizzata nella diafisi del femore di adulti si rinvengono osteoni combinati del primo sottotipo, secondo la classificazione di Gebhardt (Amprino e Bairati [7]), costituiti da una zona centrale di lamelle illuminate in sezione trasversale ed estinte in sezione longitudinale, da una zona intermedia, di maggiori dimensioni, di lamelle omogeneamente estinte in sezione trasversale ed illuminate in sezione longitudinale ed, infine, da una zona marginale di lamelle illuminate in sezione trasversale ed estinte in sezione longitudinale, mi sono attenuto per i casi contrassegnati P. E., ♂, 11 a., C. A., ♂, 25 a., L. G. B., ♂, 51 a., A. A., ♂, 80 a., agli stessi criteri metodologici stabiliti da Dallemagne e Mélon per il femore di bue, praticando le misure su sezioni longitudinali o lievemente oblique a livello della zona intermedia.

Ritengo necessario precisare che, a differenza del femore di bue, gli osteoni misti del femore umano appartenenti al tipo suddescritto hanno diametro maggiore di 170 μ, dato da Dallemagne e Mélon per il bue, esso si aggira specie negli adulti di media età, su valori che spesso superano i 200 μ. Ne consegue pertanto che la zona delle lamelle intermedie mostra spessore maggiore, permettendo così un più largo margine nell'allestimento delle sezioni che possono anche raggiungere lo spessore massimo di 60 μ.

Debbo ancora rilevare che i fenomeni di osteoporosi senile con allargamento dei canali haversiani e conseguente riduzione di spessore degli osteoni, come nel caso A. A., ♂, 80 a.

(6) M. J. DALLEMAGNE e J. MÉLON, « Bull. Soc. Roy. Sc. Liège », *13*, 254 (1944); « J. Washington Acad. of Sc. », *36*, 181 (1946).

(7) R. AMPRINO e A. BAIRATI, « Z. Zellfschg. », *24*, 439 (1936).

rende particolarmente indaginosa l'individuazione di elementi con i suddescritti requisiti strutturali ed ottici.

2° Per il femore del caso N. G., ♀, 3 a. ed in gran parte anche per quello del caso P. A., ♂, 7 a., non ho potuto attenermi agli stessi criteri in quanto gli osteoni, non solo hanno diametro minore, ma hanno, per lo più, costituzione diversa appartenendo alla categoria degli osteoni semplici o fondamentali e, più precisamente, al sottotipo cosiddetto a fibrille verticali cioè con lamelle omogeneamente estinte in sezione trasversale ed omogeneamente illuminate in sezione longitudinale. Per il femore del caso F. M., ♂, 1 a. non mi è stato possibile individuare che qualche raro osteone idoneo alla misurazione della potenza birifrattiva anche dopo esame minuzioso di qualche decina di sezioni, ho quindi eseguito la massima parte delle determinazioni – a scopo di semplice orientamento – sulle lamelle del sistema fondamentale esterno.

Credo di aver soddisfatto in questi casi ai requisiti di omogeneità e di non sovrapposizione dei piani di differente orientazione ottica, ricorrendo agli accorgimenti seguenti:

a) Ricerca diligente e scrupolosa degli osteoni a fibre ripide su sezioni longitudinali o lievemente oblique di spessore sicuramente inferiore al loro diametro; individuazione del canale haversiano; controllo dell'andamento della curva dei ritardi lungo una linea perpendicolare all'asse dell'osteone.

b) Per le determinazioni a livello del sistema fondamentale esterno (caso F. M., ♂, 1 a.) che – come ripeto – hanno carattere puramente orientativo, data l'impossibilità di controllare l'omogeneità ottica di questa zona, le cui lamelle hanno spesso orientamento molto variabile, mi sono servito di sezioni longitudinali od oblique, quindi variamente orientate – in modo da aumentare la probabilità statistica che l'asse ottico fosse orientato perpendicolarmente al tubo del microscopio – ho scelto aree costituite da lamelle a ritardo press'a poco costante, ho ridotto al minimo lo spessore delle sezioni.

Le sezioni, di dimensioni 3×5, 4×4 o 6 × 6 mm., sono state allestite mediante un grosso microtomo Leitz (con slitta nella base e avanzamento automatico dell'oggetto) direttamente da cubetti di osso fresco o secco, quindi non sottoposto ad alcun trattamento preventivo.

Cura tutta particolare ho usato nella misura degli spessori. Non ho fatto riferimento ai dati del microtomo perchè la durezza del tessuto è tale che le sezioni non solo hanno spessore affatto uniforme, ma questo è di solito notevolmente superiore a quello segnato dalla vite micrometrica. Dopo tentativi, lungamente ripetuti, ho dovuto abbandonare anche il metodo di determinazione indiretta, mediante lo spessore apparente (S_{app}) e l'indice di rifrazione (n), secondo la ben nota formula di Chaulnes:

$$S = S_{app} \cdot n$$

poichè i risultati erano tutt'altro che attendibili data la difficoltà di individuare esattamente la superficie superiore ed inferiore della sezione e quindi lo spessore apparente.

Non essendo d'altra parte applicabile all'osso il metodo indiretto di confronto con mezzi a potenza birifrattiva nota, usato costantemente nello studio microscopico delle rocce in sezione sottile, e pur riconoscendo insieme con Berek (8) la incertezza dei metodi di determinazione diretta, ho eseguito la misura degli spessori mediante un comparatore millesimale Käfer.

Con particolari accorgimenti di cui dirò in seguito, ho cercato di ridurre al minimo possibile le cause di errore, eseguendo le misure in corrispondenza dell'osteone o rispettivamente della zona del sistema fondamentale esterno di cui avevo in precedenza determinato il ritardo.

Credo opportuno rilevare che ho potuto controllare l'esattezza del metodo, eseguendo parecchie misurazioni di controllo su laminette di sfaldatura di gesso di potenza birifrattiva nota.

(8) M. Berek, *Microscopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmetoden*. Gebrüder Borntraeger, Berlin, 1924.

Tabella I.

F. M., ♂, 1 a.		N. G., ♀, 3 a.		P. A., ♂, 7 a.		P. E., ♂, 11 a.		C. A., ♂, 25 a.		L. G. B., ♂, 51 a.		A. A., ♂, 80 a.	
spessore in μ	potenza birifrattiva	spessore in μ	potenza birifrattiva	spessore in μ	potenza birifrattiva	spessore in μ	potenza birifrattiva	spessore in μ	potenza birifrattiva	spessore in μ	potenza birifrattiva	spessore in μ	potenza birifrattiva
13	0,0024	35	0,0033	39	0,0024	25	0,0033	40	0,0018	23	0,0037	38	**0,0040**
15	0,0026	35	0,0033	39	0,0029	25	**0,0039**	40	0,0017	55	0,0018	32	0,0024
13	0,0039	35	0,0032	30	0,0033	25	0,0036	25	0,0018	57	0,0019	36	0,0020
13	0,0025	40	**0,0038**	30	0,0028	41	0,0030	29	0,0030	46	0,0018	38	0,0027
14	0,0038	25	0,0032	42	0,0029	38	0,0037	33	0,0024	45	0,0022	18	0,0022
13	0,0029	35	0,0017	32	0,0027	20	0,0032	36	0,0028	36	0,0021	21	0,0028
6	**0,0041**	51	0,0028	27	0,0024	18	0,0029	46	0,0026	46	0,0031	36	0,0022
35	0,0036	55	0,0022	27	0,0022	45	**0,0039**	46	**0,0033**	36	0,0022	28	0,0027
40	0,0040	45	0,0030	26	0,0017	45	0,0034	45	0,0020	42	0,0023	28	0,0026
45	0,0039	45	0,0026	32	0,0025	45	0,0036	25	0,0026	42	0,0023	28	0,0026
48	0,0033	20	0,0023	27	**0,0035**	40	0,0037	31	0,0026	42	0,0024	28	0,0024
55	0,0032	20	0,0024	31	0,0030	34	0,0038	31	0,0024	46	**0,0038**	12	0,0034
43	0,0023	20	0,0030	39	0,0030			35	0,0021	46	0,0029	21	0,0021
25	0,0040			39	0,0028								
				30	0,0031								
				30	0,0024								

N. B. – I numeri in grassetto corrispondono ai valori massimi della potenza birifrattiva.
I gruppi di valori inquadrati da punteggiata sono stati misurati in punti diversi di uno stesso osteone.

Le sezioni provenienti dal microtomo sono state conservate in soluzione fisiologica quindi, al momento della misura della potenza birifrattiva, sono state asciugate con carta bibula ed incluse in bromoformio.

La ricerca degli osteoni che soddisfino ai requisiti già esposti, è spesso indaginosa e lunga. Non è rara l'eventualità che si renda necessaria l'esplorazione sistematica di decine di sezioni. I ritardi sono stati misurati mediante il compensatore di Berek, orientando le sezioni in modo che l'asse dei canali haversiani ovvero la direzione delle lamelle del sistema fondamentale esterno fossero perpendicolari all'asse di rotazione del compensatore stesso ed a 45° rispetto al piano di polarizzazione dei Nicol.

Alla determinazione dei ritardi ho fatto seguire le misure dello spessore nel punto corrispondente. A tal fine, dopo aver individuato la situazione esatta dell'osteone o rispettivamente della zona del sistema fondamentale esterno, ho isolato l'uno o l'altra, mediante successivi ritagli concentrici della sezione, controllati di volta in volta al microscopio, facendo uso di forbici a punta molto sottile. In questo modo sono riuscito non solo ad isolare degli osteoni (meglio sezioni longitudinali o lievemente oblique di osteoni), ma addirittura a sezionare i più lunghi in due o tre segmenti e quindi a misurare la potenza birifrattiva in più punti della stessa zona, ma situati a varia altezza.

Per ogni caso ho eseguito da 12 a 16 determinazioni della potenza birifrattiva.

Il numero delle misure è stato limitato dalla particolare laboriosità del metodo.

Discussione dei risultati. – Ho riassunto i risultati delle singole misurazioni nella tabella I. Ritengo necessario precisare che per i casi in cui la potenza birifrattiva è stata determinata a livello della zona intermedia di osteoni combinati, secondo Gebhardt, ho potuto avere un elemento, se non proprio una riprova assoluta che in questo tratto non esisteva sovrapposizione di piani di differente orientazione ottica, registrando le variazioni dei ritardi lungo una linea perpendicolare all'asse del canale haversiano.

L'annessa fig. 1 mostra appunto lo spaccato di una sezione di un osteone di tipo misto che risponde ai requisiti esposti a proposito della metodologia ed in alto la curva corrispondente dei ritardi. Come è facile rendersi conto, nella parte centrale dell'osteone ove lo spessore effettivo della sezione è ridotto dalla presenza del canale centrale ed esiste inoltre sovrapposizione di piani di differente orientazione ottica il ritardo è minimo. Va quindi rapidamente e, per lo più, simmetricamente aumentando per raggiungere valori massimi nel tratto otticamente omogeneo costituito dalla sola zona intermedia, per scendere di nuovo alla periferia, ove si ha dapprima sovrapposizione di piani di differente orientazione, quindi una zona otticamente omogenea, ma con orientazione diversa da quella della zona intermedia. Ne consegue che il ritardo a livello della zona in corrispondenza della quale va misurata la birifrangenza dell'osso raggiunge valori massimi, rispetto a quelle centrali e rispettivamente periferiche, e pertanto è facilmente individualizzabile.

Come è stato osservato da Dallemagne e Mélon, anch'io ho potuto notare che, aumentando lo spessore della sezione osteonica, l'ampiezza del tratto dei ritardi massimi della curva va progressivamente diminuendo ed il grafico assume andamento a cuspide molto ripida.

Per quanto riguarda gli osteoni semplici, cosidetti a fibre ripide, sui quali sono state praticate le misure della potenza birifrattiva nei casi N. G., ♀, 3 a. e P. A., ♂, 7 a., debbo rilevare che l'andamento della curva dei ritardi

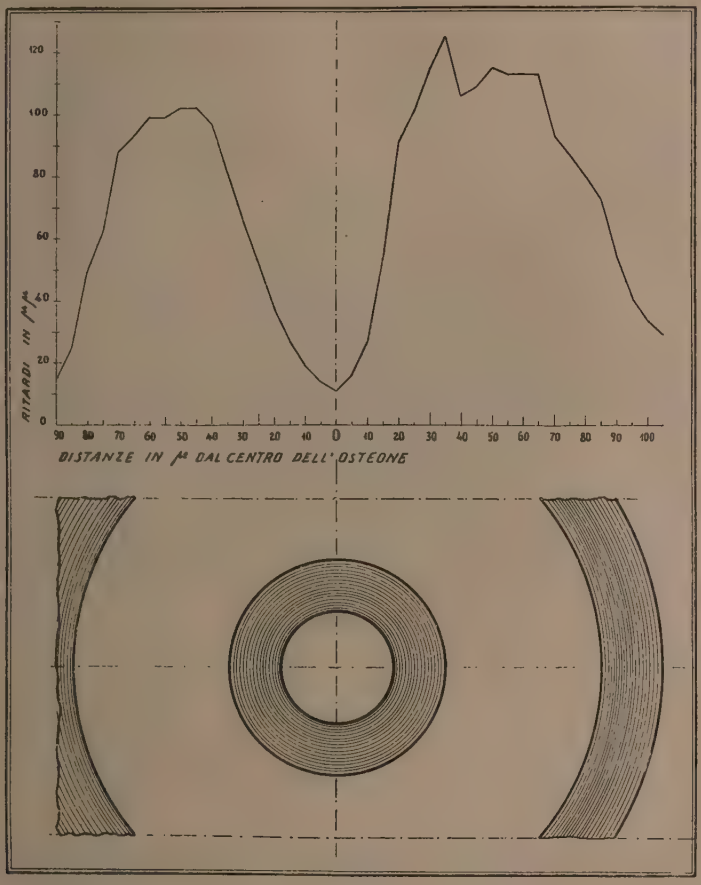


Fig. 1.

è press'a poco quello del grafico della fig. 1 salvo che di solito, a parità di spessore relativo della sezione, i valori misurati nella parte centrale (zero ed intorno di zero) sono più elevati, non verificandosi sovrapposizione di strati ad orientazione ottica diversa.

L'osservazione della curva dei ritardi si presta ancora ad una considerazione interessante. Il tratto corrispondente alla porzione otticamente omogenea presenta in effetti delle sensibili irregolarità nell'andamento (vedi fig. 1). Qualora, si escludano modificazioni locali di spessore della sezione nonchè si accetti il presupposto, sul quale è d'altra parte implicitamente basata la presente ricerca, cioè la omogeneità di struttura submicroscopica dell'osteone [9] – tale andamento può verosimilmente venire interpretato come dipendente da variazioni minime nell'orientamento ottico di lamelle contigue.

(9) M. J. Dallemagne e J. Mélon, «Arch. de Biol.», *56*, 243 (1945).

Tornando ora a considerare i risultati della tabella I ritengo anzitutto necessario mettere in rilievo le notevoli oscillazioni dei valori misurati nei singoli casi. Se si tien conto che, salvo per il caso F. M., ♂, 1 a., le determinazioni sono state praticate su sezioni dirette in senso longitudinale rispetto all'asse del canale haversiano, che i ritardi e gli spessori sono stati misurati con il massimo rigore consentito dai metodi di ricerca, credo si possa ritenere che le oscillazioni registrate siano da imputare in maniera prevalente, se non esclusiva, a modificazioni nell'orientamento ottico in zone corrispondenti delle singole unità ossee. Considerazioni del genere insieme all'accuratezza con la quale ho cercato di determinare gli spessori mi hanno indotto ad assumere come valori della potenza birifrattiva, quelli massimi registrati nei singoli casi. Ciò a differenza di Dallemagne e Mélon i quali data la poca attendibilità delle misure degli spessori desunti direttamente dai dati del microtomo hanno dovuto necessariamente attenersi a valori medi opportunamente integrati da considerazioni preliminari sull'angolo d'orientamento ottico delle lamelle rispetto all'asse dell'osteone [10].

Malgrado non abbia creduto opportuno attenermi per i miei casi a considerazioni sugli angoli d'inclinazione ottica delle lamelle, data la diversità di struttura degli osteoni esaminati nonchè la differenziazione morfologica di alcuni di essi che supera quella dei comuni schematismi classificativi, ritengo tuttavia che i valori massimi registrati si avvicinano molto, – se proprio non corrispondono esattamente, – a quelli della potenza birifrattiva assoluta. Mi sono fatto questa convinzione in base alle constatazioni seguenti:

a) L'univocità dei valori massimi nei singoli casi che oscillano da + 0,0033 a + 0,004.

b) La valutazione degli spessori determinata con la massima esattezza possibile.

c) La determinazione delle misure non solo su sezioni longitudinali, ma anche lievemente oblique in modo da aumentare la probabilità statistica che l'asse ottico, di solito lievemente inclinato rispetto all'asse anatomico dell'osteone, fosse orientato perpendicolarmente al tubo del microscopio.

d) Alcune determinazioni di controllo dei valori massimi misurati, facendo uso del tavolino universale di Fedorow, non hanno dimostrato apprezzabili variazioni per inclinazioni comprese entro limiti di 20° (— 10°, + 10°).

I valori massimi registrati con misure sugli osteoni – quindi prescindendo dal caso F. M., ♂, 1 a., – corrispondono a quelli ottenuti da Dallemagne e Mélon per l'osso di bue. Infatti la media di codesti valori massimi è + 0,0037 cioè uguale alla media delle 228 misurazioni effettuate dagli autori belgi. Il valore di + 0,004 dato da Dallemagne e Mélon per la birifrangenza assoluta è desunto da quello di + 0,0037 in base a considerazioni sugli angoli d'inclinazione dell'asse ottico rispetto all'asse dell'osteone s'identifica col il valore massimo ottenuto per il caso A. A., ♂, 80 a.

(10) M. J. Dallemagne e J. Mélon, « Bull. Soc. Roy. Sc. Liège », *12*, 558, 607 (1943).

Sempre per le già citate considerazioni nella metodologia e sulla tecnica, penso che anche per il femore umano questa cifra vada assunta quale valore della potenza birifrattiva massima. Ritengo inoltre che le minime variazioni nei valori massimi registrati nei singoli casi non possano venire interpretate come modificazioni della potenza birifrattiva in rapporto all'età. Nel caso F. M., ♂, 1 a. in cui la potenza birifrattiva dalla 3ª misurazione in poi è stata determinata a livello del sistema fondamentale esterno, i risultati corrispondono press'a poco a quelli degli altri casi salvo un lieve aumento del valore massimo: + 0,0041.

A chiusura di queste considerazioni ritengo interessante osservare come le poche misure praticate a varia altezza su uno stesso osteone tendono a confermare le osservazioni di Filogamo[11] e cioè che in linea generale l'orientazione obliqua delle lamelle non varia sensibilmente.

Riassumo brevemente i risultati delle ricerche che fanno oggetto della presente Nota nelle seguenti proposizioni conclusive:

1° *La potenza birifrattiva assoluta dell'osso umano normale (tratto medio del femore destro) – determinata con particolari accorgimenti tecnici atti ad assicurare l'omogeneità ottica del materiale e dedotta da un complesso di 94 misurazioni su 7 soggetti di 1, 3, 7, 11, 25, 50 e 80 anni – si aggira intorno a + 0,004.*

2° *Le oscillazioni dei valori massimi registrati nei singoli casi non possono venire interpretate come variazioni della potenza birifrattiva assoluta in rapporto all'età.*

3° *L'esiguo numero di misure praticate a varia altezza su un medesimo osteone conferma, in linea di massima, la scarsa variabilità nell'orientamento ottico delle lamelle.*

(11) G. Filogamo, *Ricerche di Morfologia, 22* (1946).

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1948 – Settembre–ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Teoria dei numeri. — *Sui numeri perfetti*. Nota II (*) del Socio G. Armellini.

1. In una Nota preliminare (Cfr. « Rend. Lincei », 1948, sem. I) sui numeri perfetti – e cioè su quei numeri interi positivi che sono eguali alla somma dei loro divisori – abbiamo visto con nuove dimostrazioni, molto semplici, che se esistono numeri perfetti *non binari* (vale a dire composti di più di due fattori primi *distinti*), essi soddisfano alle seguenti proprietà:

1° Sono *dispari*; e quindi il loro fattore primo più basso α deve essere *almeno* eguale a 3.

2° Tutti i fattori primi vi compaiono elevati a potenze *pari*, tranne un unico fattore q – che noi abbiamo chiamato fattore *caratteristico* – il quale ha la forma $q = 1 + 4m$ e compare, elevato a potenza *dispari*, con esponente della forma $1 + 4n$ (*Teorema di Eulero*).

3° Non esistono numeri perfetti *ternari*, cioè composti di soli tre fattori primi distinti.

Ciò posto, nella ricerca dei numeri perfetti non binari, la prima questione che logicamente si presenta – e che non mi risulta sia stata fin ad ora trattata – riguarda lo studio di quei numeri perfetti (se esistono) in cui *tutti i fattori primi ordinari* (escluso ovviamente il fattore caratteristico) compaiono elevati alla *seconda* potenza. Per brevità, chiameremo questi numeri col nome di *numeri perfetti semplici*, e di essi ci occuperemo nella presente Nota, dimostrando la loro *inesistenza*.

Per entrare in argomento, premettiamo anzitutto alcuni

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1948.

2. LEMMI FONDAMENTALI. – Sia N un numero perfetto *semplice* ed indichiamo con $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu$ i suoi fattori primi ordinari, disposti in ordine *crescente*, e con q il fattore caratteristico, il quale – come vedemmo nella Nota I – deve essere certamente *maggiore* [1] del fattore primo più basso α. Avremo immediatamente

$$(1) \qquad N = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \cdots \mu^2 q^{1+4n}$$

e quindi, dovendo N essere eguale alla somma dei propri divisori, risulterà:

$$(2) \qquad 2N = 2\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \cdots \mu^2 q^{1+4n} = (1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2) \cdots (1 + \mu + \mu^2) Q$$

dove, per brevità, abbiamo posto

$$(3) \qquad Q = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{1+4n} = (1 + q)(1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{4n}).$$

Ciò posto, osserviamo subito che il numero $A = 1 + \alpha + \alpha^2$ è necessariamente *primo*. Infatti, se A ammettesse due o più fattori primi distinti, uno almeno di essi dovrebbe essere minore di α e quindi 2 N avrebbe un divisore primo diverso da 2 (essendo A necessariamente dispari, perchè α è dispari) e minore del fattore primo più basso α, ciò che è assurdo. Se poi i fattori primi di A fossero eguali tra loro e cioè se si avesse $A = t^r$, dovendo l'esponente r essere certamente *dispari* (giacchè se si avesse $r = 2s$, essendo $\alpha^2 < A < (1 + \alpha)^2$, risulterebbe $\alpha < t^s < 1 + \alpha$ e quindi t non potrebbe essere intero) e perciò dovendo essere almeno eguale a 3, il numero t risulterebbe minore di α e quindi si ricadrebbe nel medesimo assurdo.

Chiamiamo ora con x un numero *primo* qualsiasi e consideriamo il trinomio $X = 1 + x + x^2$.

Si vede immediatamente che se x ha la forma $1 + 3k$, essendo k un intero positivo, il numero X risulta multiplo di 3; mentre se x ha la forma $2 + 3k$ il numero X ha la forma $1 + 3h$. Ora io dico che, in *ogni caso*, se X non è primo, tutti i suoi fattori primi dovranno anche essi avere la forma $1 + 3k$, oppure saranno eguali a 3.

Infatti, sia p un divisore primo di X che supponiamo diverso da 3; ovviamente p non potrà dividere $x + 1$, giacchè in tal caso, dividendo X e dividendo $x + 1$, dividerebbe pure la loro differenza e cioè x^2. Analogamente è facile vedere che p non può dividere $x - 1$, giacchè in tal caso, dividendo X ed $x - 1$, dividerebbe anche la somma $X + x - 1 = x(x - 1) + 3x$ e quindi dividerebbe $3x$; ciò che è impossibile essendo p primo e differente da 3 e da x.

Ne segue che il numero primo p non può dividere $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, mentre divide certamente $x^3 - 1$, avendosi $x^3 - 1 = X(x - 1)$; in altre parole, *il più piccolo* valore dell'esponente r per cui $x^r - 1$ risulta divisibile per p è eguale a 3.

(1) Infatti, poichè N è divisibile per $t = \frac{1+q}{2}$, il più piccolo fattore primo di t, dovendo comparire in N come fattore *ordinario*, sarà *almeno* eguale ad α.

Ma, per il teorema di Fermat, $x^{p-1} - 1$ è certamente divisibile per p; dunque $p - 1$ sarà multiplo di 3 e cioè p avrà la forma $1 + 3k$. C. d. d.

Premesse queste osservazioni, dimostriamo i seguenti nuovi teoremi:

3. TEOREMA I. – *Un numero perfetto semplice, se esiste, non può ammettere il divisore* 3.

Dimostrazione. – Supponiamo, se è possibile, che si abbia $\alpha = 3$. Allora la (2) diviene immediatamente

$$(4) \qquad 2N = 18\beta^2\gamma^2\cdots\mu^2 q^{1+\lambda+\mu} = 13(1+\beta+\beta^2)(1+\gamma+\gamma^2)\cdots(1+\mu+\mu^2)Q$$

dove (poichè nessuno dei fattori primi $\beta, \gamma, \cdots, \mu, q$ è eguale a 3) il secondo membro non sarà divisibile per nessuna potenza di 3 *superiore alla seconda.* In conseguenza, per quanto abbiamo visto nei lemmi precedenti, vi saranno *al più* due fattori primi ordinari, per esempio β e γ, della forma $1 + 3k$, mentre tutti gli altri fattori primi ordinari dovranno avere la forma $2 + 3k$. Inoltre, poichè l'ultimo membro della (4) contiene il fattore 13, uno dei fattori primi di N, tra cui eventualmente il fattore caratteristico q (essendo 13 della forma $1 + 4m$) sarà eguale a 13.

Esaminiamo separatamente i due casi:

I. Cominciamo a supporre che il fattore caratteristico q sia eguale a 13. Allora, essendo $1 + q = 14$, il numero Q contiene il divisore primo 7; onde uno dei fattori primi di N, per esempio β, sarà eguale a 7. In tal caso però si ha $B = 1 + \beta + \beta^2 = 57 = 3 \cdot 19$, onde un altro fattore primo di N, per esempio γ, sarà eguale a 19. Ma, se γ è eguale a 19, si ha $C = 1 + \gamma + \gamma^2 = 381 = 3 \cdot 127$, onde un successivo fattore primo di N, per esempio ε, sarà eguale a 127.

In conseguenza N ammetterà *almeno* tre fattori primi *ordinari* (e cioè i numeri 7–19 e 127) della forma $1 + 3k$, ciò che è impossibile. Dunque questo caso non può verificarsi.

II. Supponiamo invece che 13 figuri in N come fattore primo *ordinario* e sia per esempio eguale a γ. Allora, avendosi $C = 1 + \gamma + \gamma^2 = 183 = 3 \cdot 61$, il numero N ammetterà pure il fattore primo 61, il quale (avendo la forma $1 + 4m$) potrà eventualmente figurarvi anche come fattore caratteristico. Ora:

a) Se 61 figura in N come fattore caratteristico, avendosi $1 + q = 62$, il numero Q, e quindi anche il numero N, ammette il divisore primo 31. Ne risulta che, avendosi $1 + 31 + 31^2 = 993 = 3 \cdot 331$, il numero N dovrà anche ammettere il divisore primo 331, onde N avrà almeno tre fattori primi *ordinari* (e cioè i numeri 13-31–331) della forma $1 + 3k$, ciò che è impossibile.

b) Se invece 61 figura in N come fattore *ordinario*, avendosi immediatamente $1 + 61 + 61^2 = 3783 = 3 \cdot 13 \cdot 97$, in numero N avrà pure il fattore primo 97, il quale a sua volta può figurarvi sia come fattore ordinario, sia come fattore caratteristico avendo la forma $1 + 4m$.

Ma se 97 figura in N come fattore *ordinario*, il numero N ammette almeno tre fattori primi *ordinari* (13–61–97) della forma $1 + 3k$; cosa impossibile.

Se invece 97 figura in N come fattore *caratteristico*, avendosi subito $1 + q = 98 = 2 \cdot 7^2$, il numero N ammette anche il fattore 7 e cioè almeno tre fattori *ordinari* (7–13–61) della forma $1 + 3k$, ciò che è ancora impossibile.

Dunque N non può, in nessun caso, ammettere il fattore 3. C. d. d.

Osservazione. – Il numero minimo di fattori primi distinti che compaiono in un numero perfetto dispari N – supposto che esista – è incognito: secondo Sylvester («Comptes Rendus», T. CVI, p. 522 e sgg.) esso è *almeno* eguale a cinque.

Dobbiamo però notare che la dimostrazione del nostro teorema è completamente indipendente da tale questione. Con l'occasione notiamo pure che, secondo la (4), il fattore caratteristico q – non potendo evidentemente dividere Q – o sarà eguale a 13, oppure dividerà uno dei trinomi, per esempio $1 + \gamma + \gamma^2$; e quindi, secondo il lemma dato, avrà la forma $1 + 3k$. Vale a dire (avendo q necessariamente la forma $1 + 4m$) sarà $q = 1 + 12i$; appunto come abbiamo sempre trovato nella dimostrazione data e come poteva dedursi *a priori* da questa osservazione.

4. Teorema II. – *Non esistono numeri perfetti semplici.*

Dimostrazione. – Sia N un numero perfetto semplice. Poichè, come c'insegna il teorema precedente, N non può essere divisibile per 3, segue immediatamente dalla (2) e dalla (3) che il fattore caratteristico q deve avere la forma $q = 1 + 3k$. Ma q, essendo caratteristico, ha pure la forma $q = 1 + 4m$; dunque deve aversi necessariamente $q = 1 + 12i$, essendo i un intero positivo.

Inoltre, poichè N non ammette il divisore 3, *tutti* i suoi fattori primi *ordinari* $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \mu$ debbono necessariamente avere la forma $2 + 3k$; giacchè se si avesse per esempio $\beta = 1 + 3k$, il trinomio $B = 1 + \beta + \beta^2$ risulterebbe divisibile per 3 e quindi la (2) non potrebbe sussistere.

Ciò posto, consideriamo il trinomio $A = 1 + \alpha + \alpha^2$. Come abbiamo visto nei lemmi precedenti, il numero A sarà necessariamente *primo* ed avrà anzi la forma $1 + 3k$, avendo α la forma $2 + 3k$. Ma, nel secondo membro della (2), l'unico fattore primo della forma $1 + 3k$ è il fattore caratteristico q; dunque sarà necessariamente

$$A = 1 + \alpha + \alpha^2 = q \tag{5}$$

donde si ricava subito $q > \alpha$, come del resto già sapevamo dalla Nota I.

Con l'occasione, notiamo che, posto $B = 1 + \beta + \beta^2$, – poichè β ha la forma $2 + 3k$ – il numero B avrà pure la forma $1 + 3k$. Ora B *non* può essere primo, giacchè in tal caso N ammetterebbe un fattore primo della forma $1 + 3k$ maggiore di q, essendo $B > A$. Ma, se B non è primo, tutti i suoi divisori primi, secondo i lemmi precedenti, hanno la forma $1 + 3k$, mentre l'unico fattore primo di questa forma che compare in N è il fattore primo q che vi figura elevato alla potenza $1 + 4n$. Dunque, affinchè sussista la 2,

dovrà essere $B = q^r$ e cioè dovrà aversi (ed analogamente si dica per gli altri trinomi)

$$1 + \beta + \beta^2 = (1 + \alpha + \alpha^2)^r = q^r. \tag{6}$$

Ora si vede facilmente che l'esponente r *non* può essere pari; giacchè, come abbiamo detto poco fa, se si avesse $r = 2s$, essendo $\beta^2 < 1 + \beta + \beta^2 < (1 + \beta)^2$, ne risulterebbe subito l'ineguaglianza $\beta < q^s < 1 + \beta$ e quindi q non potrebbe essere intero. Ne segue che, non potendo essere $r = 1$ perchè $\beta > \alpha$, l'esponente r sarà almeno eguale a 3 e quindi risulterà $\beta > q$; vale a dire *il fattore caratteristico q sarà compreso tra α e β.*

Ciò posto, la (2) mostra che il numero N è certamente divisibile per il numero $t = \frac{1+q}{2}$; e cioè, avendo q la forma $1 + 12i$, il numero N ammette un divisore t della forma $1 + 6i$; o, ciò che è lo stesso, della forma $1 + 3k$.

Ora questo numero t non può evidentemente essere primo, giacchè in tal caso, avendosi $t < q$, il numero N ammetterebbe un divisore primo della forma $1 + 3k$ differente da q. Dunque t sarà decomponibile in fattori primi.

Ma dalla (5) abbiamo subito

$$t = \frac{1+q}{2} = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 - \alpha - 2}{2} \tag{7}$$

donde risulta che, essendo $\alpha > 3$, il numero t sarà *compreso tra α ed α^2* e sarà inoltre evidentemente minore di $\beta, \gamma, \cdots, \mu$ essendo minore di q. Quindi, poichè t non è primo, esso ammetterà certamente qualche divisore primo minore di α; onde il numero N, a sua volta, essendo multiplo di t dovrà ammettere qualche divisore primo minore del suo fattore primo più piccolo che è appunto α; ciò che è assurdo. Dunque, N non potrà soddisfare alle (2) e cioè non potrà essere perfetto C. d. d.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali.* Nota II di G. ZWIRNER, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

6. Passando ora all'altro argomento indicato al n. 1 (1), darò delle condizioni sufficienti perchè una funzione $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ definita in ogni punto z di una curva semplice γ e tale che il rapporto $\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$ (ove z e $z + \Delta z$ sono punti di γ) abbia per limite lo zero al tendere a zero di Δz, risulti costante su tutta γ.

(*) Nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Questi « Rendiconti », questo volume.

Raggiungo lo scopo servendomi, fra l'altro, di procedimenti analoghi a quelli svolti nel lavoro citato in [1] e a quelli svolti in una Nota precedente [2].

7. Siano

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (a \leq t < b),$$

le equazioni parametriche di una curva continua γ a punti semplici [3] e di origine A.

Supponiamo inoltre che la lunghezza s, contata a partire da A di ogni arco parziale AP di γ, sia finita ma che possa eventualmente crescere indefinitamente al tendere di t a b.

Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione definita in ogni punto $z = x(t) + iy(t)$ di γ ed ivi continua, ossia fissato un punto qualunque z_0 di γ e scelto un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario si può determinare corrispondentemente un $\delta > 0$ tale che per tutti i punti z di γ tali che $\overset{\frown}{z z_0} < \delta$, risulta $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Inoltre, posto

$$u(x(t), y(t)) = \varphi(t),$$

$$v(x(t), y(t)) = \psi(t),$$

ammettiamo che per ogni t dell'intervallo $a \leq t < b$, sia

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) + i[\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]}{x(t + \Delta t) - x(t) + i[y(t + \Delta t) - y(t)]} = 0. \tag{4}$$

In queste ipotesi risulta

$$f(z) = \text{costante}$$

su tutta la curva γ.

Detti P e Q due punti di γ, corrispondenti ai valori t e $t - \Delta t$ del parametro, e Δs la lunghezza dell'arco PQ di γ, dalla ipotesi (4) e da

$$\left| \frac{\Delta x + i \Delta y}{\Delta s} \right| \leq 1$$

segue

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi + i \Delta \psi}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \varphi + i \Delta \psi}{\Delta x + i \Delta y} \cdot \frac{\Delta x + i \Delta y}{\Delta s} \right] = 0$$

[2] G. ZWIRNER. *A proposito di una interpretazione geometrica del lemma fondamentale del Calcolo integrale.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova], vol. XV, pp. 139–143 (1946)].

(3) Cioè che corrisponda topologicamente all'intervallo (a, b).

Osserviamo esplicitamente che l'ipotesi che la curva γ sia a punti semplici non è affatto essenziale per la validità del teorema enunciato in questo numero. L'ammettiamo solamente per rendere più rapida la dimostrazione del teorema stesso.

ossia

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s} = 0$$

per ogni t dell'intervallo $a \leq t < b$.

Cioè le derivate delle funzioni continue $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ rispetto alla funzione $s(t)$ sono nulle, epperò, in virtù di un noto risultato [4] le $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sono costanti in $a \leq t < b$ e quindi $f(z)$ è costante su γ.

8. TEOREMA. – *Siano*

$$\begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \end{cases} \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

le equazioni parametriche di una curva continua Γ *a punti semplici e avente in ogni suo punto un'unica tangente.*

Sia $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ *una funzione definita e continua per* z *variabile su* Γ *e supponiamo inoltre che per ogni* t *dell'intervallo* $t_0 \leq t \leq t_1$, *sia*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{u[g_1(t + \Delta t), g_2(t - \Delta t)] - u[g_1(t), g_2(t)]}{g_1(t + \Delta t) - g_1(t) - i\,[g_2(t + \Delta t) - g_2(t)]} - \right.$$
$$\left. + i\, \frac{v[g_1(t - \Delta t), g_2(t - \Delta t)] - v[g_1(t), g_2(t)]}{g_1(t + \Delta t) - g_1(t) + i\,[g_2(t + \Delta t) - g_2(t)]} \right\} = 0 . \tag{5}$$

In tali ipotesi risulta

$$f(z) = \text{costante}$$

su Γ.

Posto

$$u[g_1(t), g_2(t)] = g_3(t) ,$$
$$v[g_1(t), g_2(t)] = g_4(t) ,$$

consideriamo nell'S_3 reale euclideo la curva continua C di equazioni

$$\begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \\ u = g_3(t) \end{cases} \qquad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

ed osserviamo innanzi tutto che l'ipotesi (5), ossia

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g_3 + i\, \Delta g_4}{\Delta g_1 + i\, \Delta g_2} = 0 , \tag{6}$$

assicura che il contingente in ogni punto di C è parallelo al piano xy.

Infatti, dalla (6) si ha

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g_3}{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2}} = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g_4}{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2}} = 0$$

[4] R. CACCIOPPOLI, *Sul lemma fondamentale del Calcolo integrale*. [Atti e Memorie dell'Acc. di Scienze, Lettere ed Arti di Padova», vol. 50, pp. 63-68 (1933-34).]

ed essendo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g_3}{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2 + \Delta g_3^2}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta g_3}{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2}}{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2 + \Delta g_3^2}} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta g_3}{\sqrt{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta g_3^2}{\Delta g_1^2 + \Delta g_2^2}}} \right] = 0$$

per ogni valore di t dell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$, segue che ogni semi-tangente alla curva C in un suo punto qualunque, risulta parallela al piano $x\,y$.

Di qui e dal fatto che la curva Γ ammette in ogni suo punto una sola tangente, segue che anche in ogni punto di C vi è un'unica tangente.

In virtù allora del teorema I (n. 2) risulta, in tutto l'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$,

$$u = g_3(t) = \text{costante}.$$

In modo perfettamente analogo si prova che in $t_0 \leq t \leq t_1$ risulta

$$v = g_4(t) = \text{costante}$$

e quindi $f(\zeta)$ è costante su Γ.

Geometria. — *Rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento e segmento obiettivo in geometria piana iperbolica.* Nota di M. Tortorici, presentata (*) dal Corrisp. C. Mineo.

Non mi risulta che l'argomento sia stato trattato nel caso di due rette non secanti nel piano iperbolico. Nel caso di due rette incidenti si dimostra, con considerazioni sintetiche, che, dato un angolo acuto arbitrario e un qualunque segmento sopra uno dei lati a partire dal vertice, il rapporto tra la proiezione ortogonale di questo segmento sull'altro lato e il segmento obiettivo è funzione decrescente del segmento stesso (1). Non so se di questa proprietà si sia data una dimostrazione analitica.

In questa Nota tratto analiticamente il caso delle rette non secanti, prendendo il segmento obiettivo a partire dal punto in cui una delle rette è incontrata dalla perpendicolare comune alle due rette date. Se come angolo di due rette non secanti si assume il complemento dell'angolo di parallelismo relativo alla minima distanza delle due rette, il caso delle rette non secanti si riconduce formalmente a quello delle rette incidenti.

Il metodo da me seguìto è quello del prof. C. Mineo (2), consistente nel considerare la geometria piana iperbolica come geometria della pseudosfera,

(*) Nella seduta del 15 maggio 1948.

(1) Vedi G. Fano, *Geometria non euclidea*. Bologna, Zanichelli, p. 38 (1935).

2) Vedi C. Mineo, *Conferenze sulla geometria non euclidea*. Palermo, Tip. « Boccone del Povero », 1937.

o concependola addirittura come una particolare *immagine euclidea*, come elegantemente fa il Picard (3).

Per questa via la questione si tratta in maniera diretta e con semplicità di mezzi.

1. Prendendo due assi ortogonali Ox e Oy nel piano euclideo, il piano iperbolico non è altro che il semipiano delle y non negative. *Punto* e *angolo* hanno lo stesso significato che in geometria euclidea, ma i punti dell'asse x vengono pure considerati come punti all'infinito del piano iperbolico. Come *rette* del piano iperbolico si assumono le semicirconferenze del predetto semipiano ortogonali all'asse x, comprendendovi le semirette euclidee ortogonali

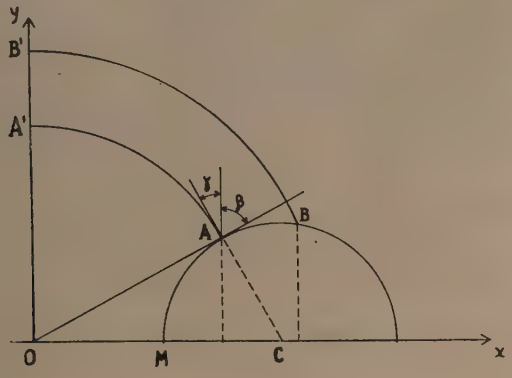


Fig. 1.

all'asse x aventi l'origine sull'asse stesso. Come movimenti del piano iperbolico si assumono le ∞^3 affinità circolari di Möbius (a parametri reali) del piano euclideo. Ne segue che il quadrato dell'elemento lineare ds del piano iperbolico è dato dalla formula:

$$ds^2 = \frac{R^2}{y^2}(dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

dove R è un parametro (*la costante metrica assoluta* della particolare geometria iperbolica considerata).

Ciò posto, consideriamo le due rette iperboliche rappresentate dalla semicirconferenza di equazione

$$y = +\sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2} \tag{2}$$

dove è

$$\alpha > r, \tag{3}$$

e dalla retta (euclidea)

$$x = 0. \tag{4}$$

(3) Vedi E. PICARD, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*. Paris, Gauthiers-Villars, pp. 21–41 (1928).

Per la condizione (3), le due rette iperboliche (2) e (4) sono non secanti. Sia A, sulla (2), il punto in cui essa è incontrata dalla perpendicolare comune alle due rette. L'ascissa del punto A è

$$x_0 = \frac{\alpha^2 - r^2}{\alpha} \tag{5}$$

Sia B un secondo punto di (2), di ascissa x tale che sia

$$\alpha + r > x > x_0 . \tag{6}$$

Sia A'B' la proiezione ortogonale del segmento iperbolico AB sulla (4). Si ponga

$$AB = l \quad , \quad AB' = l' . \tag{7}$$

Le due lunghezze l' e l, per la (1), che costituisce la scala metrica del piano iperbolico, sono date dalle formole

$$l' = \frac{R}{2} \log \frac{2\alpha x - (\alpha^2 - r^2)}{\alpha^2 - r^2} \quad , \quad l = \frac{R}{2} \log \frac{(\alpha + r)(r + x - \alpha)}{(\alpha - r)(r - x + \alpha)} . \tag{8}$$

Segue dalle (8)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{l'}{l} = \frac{r}{\alpha} = \cos\beta \quad , \quad \lim_{x \to \alpha + r} \frac{l'}{l} = 0 ; \tag{9}$$

dove β, secondo la nostra definizione, è l'angolo delle due rette (2) e (4).

Poniamo

$$u = \frac{\alpha x - (\alpha^2 - r^2)}{\alpha x} = \frac{x - x_0}{x} \quad , \quad v = \frac{\alpha x - (\alpha^2 - r^2)}{r x} = \frac{\alpha}{r} u , \tag{10}$$

essendo manifestamente

$$0 < u < 1 \quad , \quad 0 < v < 1 . \tag{11}$$

Segue

$$\frac{l'}{R} = \log \frac{1 + u}{1 - u} \quad , \quad \frac{l}{R} = \log \frac{1 + v}{1 - v} . \tag{12}$$

Quindi

$$\frac{l'}{l} = \frac{u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 \cdots}{v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 \cdots} ;$$

dalla quale si deduce

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{l'}{l}\right) = \frac{x_0}{x^2 D^2} \left\{ 2 \frac{\alpha}{r} \frac{u^3}{3} \left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) + 4 \frac{\alpha}{r} \frac{u^5}{5} \left(1 - \frac{\alpha^4}{r^4}\right) + \cdots \right\} \tag{13}$$

essendo

$$D = v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 + \cdots .$$

Ora i termini della serie a 2° membro dentro la parentesi della (13) sono tutti negativi. Infatti il termine generale della serie è

$$\frac{\alpha}{r}\left\{\frac{2n}{2n+1}\left(1-\frac{\alpha^{2n}}{r^{2n}}\right)+\frac{2n-4}{3(2n-1)}\frac{\alpha^2}{r^2}\left(1-\frac{\alpha^{2n-4}}{r^{2n-4}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2n-8}{5(2n-3)}\frac{\alpha^4}{r^4}\left(1-\frac{\alpha^{2n-8}}{r^{2n-8}}\right)+\cdots+t\right\}u^{2n+1},$$

dove è

$$t=\begin{cases}\dfrac{4}{(n-1)(n+3)}\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^{n-2}\left(1-\dfrac{\alpha^4}{r^4}\right) & \text{per } n \text{ pari},\\[2ex] \dfrac{2}{n(n+2)}\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^{n-1}\left(1-\dfrac{\alpha^2}{r^2}\right) & \text{per } n \text{ dispari}.\end{cases}$$

Dunque l'/l è funzione decrescente di x. E poichè, dalla 2ª delle (12), badando alla (10), si ha

$$x=\frac{l^{\frac{2l}{R}}(\alpha^2-r^2)}{l^{\frac{2l}{R}}(\alpha-r)-(\alpha+r)}\quad,\quad \frac{dx}{dl}>0,$$

ne segue:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{l'}{l}\right)<0.$$

Dunque: *Date due rette non secanti nel piano iperbolico e preso un segmento qualunque su una di esse a partire dal punto in cui è incontrata dalla perpendicolare comune alle due rette, il rapporto tra la proiezione ortogonale di questo segmento sull'altra retta e il segmento obiettivo è funzione decrescente del segmento stesso. Al tendere a zero del segmento obiettivo, il rapporto tende al coseno dell'angolo delle due rette, intendendo per questo angolo il complemento dell'angolo di parallelismo relativo alla minima distanza delle due rette non secanti.*

Dalle (12) si deduce

$$u=th\frac{l'}{R}\quad,\quad v=th\frac{l}{R};$$

quindi

$$\frac{th\frac{l'}{R}}{th\frac{l}{R}}=\cos\beta. \tag{14}$$

Il caso delle due rette incidenti corrisponde all'ipotesi $0<\alpha<r$, e si tratta analogamente; allora $\alpha\, r$ è il coseno dell'angolo delle due rette. E vale sempre la (14), che nel caso delle rette incidenti è una nota formola di trigonometria iperbolica.

Geometria. — *Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici.* Nota (*) di S. Golab, presentata dal Socio E. Bompiani.

Nel 1928 al Congresso internazionale dei Matematici in Bologna, Veblen, parlando sulle generalizzazioni dei tensori e affinori, ha usato il termine « oggetto astratto ». Il termine introdotto dal Veblen è diventato familiare nella geometria e la nozione stessa è stata precisata per la prima volta dal Wundheiler nel 1934 al Congresso dei tensorialisti in Mosca. Alla classificazione degli oggetti geometrici è stato consacrato poi un lavoro comune di Schouten e Haantjes. Durante la guerra e nel periodo dopo la guerra mi era difficile di studiare il progresso della teoria degli oggetti geometrici. Conosco i lavori del Wagner e Pensow soltanto dal compendio contenuto nel « Mathematical Reviews ».

Nel presente rapporto (1) mi limito alla citazione di alcuni miei risultati conseguiti prima e dopo la guerra. Alcuni dei risultati sono già pubblicati, altri sono in stampa, altri sono in via di elaborazione. I miei risultati concernono i problemi di determinare tutti gli oggetti delle determinate classi.

La teoria degli oggetti geometrici è proprio una parte della teoria dei gruppi. Nondimeno ella non fa appello ai risultati della teoria dei gruppi prendendo il punto di vista più generale, cioè a dire, non supponendo il carattere analitico delle funzioni.

Anzitutto alcune inevitabili definizioni.

Sia dato nel suo spazio n-dimensionale X_n un gruppo (o pseudogruppo) delle trasformazioni G. Assunto nel nostro spazio un sistema di riferimento, viene automaticamente definito secondo il gruppo G un insieme di sistemi di riferimento che denoteremo colle lettere B_i.

Se al punto P dello spazio X_n e ad ogni sistema di riferimento B corrisponde univocamente la serie dei numeri:

$$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k, \tag{1}$$

dove k è indipendente della dimensione n, allora diciamo che nel punto P è definito un oggetto. I numeri (1) sono detti componenti dell'oggetto nel sistema B.

L'oggetto è detto *geometrico*, se la trasformazione delle componenti nel passaggio da un sistema B_1 ad un altro B_2 può essere scritta sotto la forma simbolica:

$$\Omega_2 = f(\Omega_1 ; T_{12}), \tag{2}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1948.

(1) Presentato al III Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana (Pisa, 23–26 settembre 1948).

dove il simbolo Ω sta per la serie dei k numeri e T_{12} simboleggia la trasformazione del gruppo G, la quale conduce dal sistema B_1 al sistema B_2.

Sia

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1) \tag{3}$$

l'equazione simbolica della trasformazione T_{12}, dove – come prima – una lettera ξ sta per brevità in luogo delle n coordinate del punto P.

Se la funzione f nell'equazione (2) dipende esplicitamente dalle funzioni φ e dalle loro derivate fino all'ordine p, allora diciamo che l'oggetto è della classe p.

Per esempio gli scalari rappresentano gli oggetti della classe zero; i vettori, tensori, affinori e densità sono gli oggetti della prima classe, i parametri della connessione lineare sono gli oggetti della classe seconda.

Se la funzione f dipende soltanto dalle derivate e non dipende dalle funzioni φ stesse, allora abbiamo un oggetto *puramente differenziale*.

Dopo queste premesse posso accennare ai miei risultati.

In un lavoro (di anteguerra) ho determinato tutti gli oggetti a una componente ($k = 1$) che soddisfano alla legge di trasformazione

$$\Omega_2 = f(\Omega_1, \Delta), \tag{4}$$

dove Δ significa il jacobiano della trasformazione (3). Esistono esattamente quattro tipi di tali oggetti. Bisogna accentuare che l'applicazione del metodo classico di Lie non permette d'ottenere tutti i 4 tipi di oggetti, perchè la densità nel senso di Weyl avente la legge di trasformazione

$$\Omega_2 = |\Delta| \cdot \Omega_1 \tag{5}$$

non rappresenta una funzione analitica.

Poi mi sono occupato della determinazione di tutti gli oggetti puramente differenziali della classe seconda e terza a una componente.

Più tardi ho dimostrato che non esistono oggetti a una componente di classe superiore alla terza. Questo risultato è soltanto in apparenza un caso particolare del noto teorema di Lie sulla non esistenza di gruppi a una variabile, dipendenti da più che tre parametri essenziali.

Vazewski ha dimostrato l'esistenza di tali gruppi dipendenti da 4 parametri essenziali nell'ipotesi che la funzione sia della classe C_∞ (avente derivate di ogni ordine).

Ecco ora un altro mio risultato. Sia dato un oggetto geometrico puramente differenziale a una componente della prima classe, ma in uno spazio n dimensionale. La legge di trasformazione della componente Ω sarà *a priori* la seguente

$$\Omega_2 = f\left(\Omega_1 ; \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi^k}\right). \tag{6}$$

La funzione f dipende dalle $n^2 + 1$ variabili indipendenti. Ho dimostrato che f deve avere la forma

$$f = g(\Omega, \Delta), \tag{7}$$

dove Δ significa il jacobiano della trasformazione. Il metodo della dimostrazione è, sotto le condizioni di regolarità assai generali, complicato, diverso nel caso $n = 2$ e $n \geqq 3$.

Poi ho determinato tutti gli oggetti a una componente della classe zero.

Uno dei miei allievi s'è occupato del problema degli oggetti della prima classe, ma non puramente differenziali, un altro si occupa del problema degli oggetti della prima classe nello spazio a una dimensione ma con m componenti.

Una sezione particolare della teoria degli oggetti occupa la nozione della derivata covariante. A questa parte della teoria ho dedicato due lavori. Nel primo io determino la forma generale della derivata covariante di un oggetto della prima classe nello spazio n-dimensionale. La forma classica ben nota è un caso particolare della mia formola.

Nel lavoro secondo dò la spiegazione del perchè gli oggetti della classe seconda non hanno la derivata covariante.

Il ciclo dei lavori in questa direzione non è ancora terminato. Basta menzionare che non ho ancora ottenuto tutti gli oggetti puramente differenziali della prima classe a due componenti nello spazio a due dimensioni.

I risultati della teoria dei gruppi continui paiono indicare che un problema analogo nel caso $n \geqq 3$ sarà molto difficile.

Tutti i risultati valgono nel caso in cui G è un gruppo infinito il più generale di trasformazioni, sufficientemente regolari. Se per esempio G_0 rappresenta il gruppo infinito unimodulare, allora i risultati sono essenzialmente differenti. Si può dimostrare per esempio l'esistenza di oggetti a una componente e di classe arbitraria p. Analogamente si può dimostrare l'esistenza della derivata covariante degli oggetti della classe seconda.

Ciò è quanto volevo comunicare.

Matematica (Geometria). — *Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche* (*). Nota I di M. Villa, presentata (**) dal Socio L. Berzolari.

1. Nel presente lavoro espongo due proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche di curve piane algebriche, intimamente collegate fra loro. Una delle due proprietà è la seguente (n. 2):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete R *di curve piane algebriche d'ordine* $n > 1$ *sia omaloidica è che la curva generica di* R *intersechi*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

la Jacobiana J *di* R *soltanto nei punti base e che in questi* J *si comporti regolarmente.*

Data una rete di curve piane algebriche d'ordine > 1 (a Jacobiana non indeterminata) chiamo *tangente stazionaria* in un punto P della curva Jacobiana (non base della rete) la tangente comune alle curve della rete passanti per P. Ciò posto, l'altra proprietà è la seguente (n. 3):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete R *di curve piane algebriche d'ordine* $n > 1$ *sia omaloidica è che in ogni punto della Jacobiana* J *di* R *la tangente stazionaria sia ivi tangente alla Jacobiana (oppure sia indeterminata, oppure, se di* J *fa parte una curva* C *contata* $\nu > 1$ *volte e se il punto appartiene a* C, *che la tangente stazionaria coincida con la tangente ivi a* C) *e che nei punti base* J *si comporti regolarmente.*

Da questo teorema seguono subito (nn. 4, 5) condizioni analitiche necessarie e sufficienti, affinchè, dati tre polinomi f, φ, ψ omogenei in tre variabili x_1, x_2, x_3, dello stesso grado, linearmente indipendenti, a Jacobiano non identicamente nullo, la rete

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ parametri})$$

sia omaloidica; in altri termini, affinchè la trasformazione

$$y_1 = f \quad , \quad y_2 = \varphi \quad , \quad y_3 = \psi$$

sia cremoniana.

La condizione fondamentale è che il polinomio

$$(1.1) \qquad (f\varphi_1 - \varphi f_1) J'_2 - (f\varphi_2 - \varphi f_2) J'_1$$

sia divisibile per J', *oppure sia identicamente nullo* (dove J' coincide con l'Jacobiano di f, φ, ψ oppure si ottiene da esso nel modo indicato nel n. 4 e gli indici in basso indicano derivate parziali).

Nel n. 2 pervengo alla relazione

$$(1.2) \qquad \Sigma r (3r - 1) x_r = 3n(n - 1)$$

dalla quale deduco le due classiche relazioni di Cremona [1]

$$(1.3) \qquad \Sigma r^2 x_r = n^2 - 1 \quad , \quad \Sigma r x_r = 3(n - 1) .$$

Segue che *le due relazioni di Cremona, in definitiva, ne costituiscono una sola: la* (1.2).

Il ragionamento del n. 2 inverte, in un certo senso, il ragionamento di Cremona [2].

Nel n. 6 considero certe curve covarianti proiettive di una rete di curve piane algebriche pervenendo ad una nuova forma del teorema del n. 3 sulle reti omaloidiche.

Nel n. 7 ricordo un mio teorema recente sulle trasformazioni puntuali.

(1) Si veda: *Opere matematiche di Luigi Cremona*, vol. II, Hoepli, Milano, pp. 56, 194 (1915).

(2) Op. cit., pp. 55, 56 e pp. 194–198.

Dalla condizione (1. 1), o meglio da quella che si ottiene sostituendo ad J' l'Jacobiano J, scende forse un metodo utile, di carattere puramente algebrico, per la determinazione delle reti omaloidiche (delle trasformazioni cremoniane), ma su questo argomento ritornerò forse in altro lavoro. Com'è ben noto, il metodo fin qui seguìto è quello aritmetico che risale allo stesso Cremona e che si fonda sulla risoluzione del sistema formato dalle (1. 3) [3].

Delle estensioni dei precedenti teoremi a spazi di dimensione > 2 mi occuperò altrove.

2. Data una rète di curve piane algebriche [4], in un punto base O di multiplicità s, con punti base infinitamente vicini $O_1, O_2, \cdots$ di multiplicità $s_1, s_2, \cdots$ nell'intorno del 1° ordine, con punti base infinitamente vicini $O_{11}, O_{12}, \cdots$ di multiplicità $s_{11}, s_{12}, \cdots$ nell'intorno del 2° ordine, $\cdots$, la Jacobiana J della rete ha in O almeno la multiplicità $3s - 1$, in $O_1, O_2, \cdots$ almeno le multiplicità (eventualmente *virtuali*) $3s_1 - 1, 3s_2 - 1, \cdots$, in $O_{11}, O_{12}, \cdots$ almeno le multiplicità $3s_{11} - 1, 3s_{12} - 1, \cdots$ [5]. Quando le multiplicità (eventualmente *virtuali*) di J in $O, O_1, O_2, \cdots, O_{11}, O_{12}, \cdots$ sono *esattamente* $3s - 1, 3s_1 - 1, 3s_2 - 1, \cdots, 3s_{11} - 1, 3s_{12} - 1, \cdots$, si dirà che J in quella singolarità base si comporta *regolarmente*.

Ciò posto, sussiste il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete R *di curve piane algebriche d'ordine* $n > 1$ *sia omaloidica è che la curva generica di* R *intersechi la Jacobiana* J *di* R *soltanto nei punti base e che in questi* J *si comporti regolarmente.*

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Sia $n > 1$ l'ordine delle curve della rete R e indichiamo con x_1 il numero dei punti base semplici di R, con x_2 quello dei punti base doppi, $\cdots$, con x_r quello dei punti base r–pli, $\cdots$, con x_{n-1} quello dei punti base $(n-1)$–pli, tutti questi punti base essendo fra loro distinti o infinitamente vicini.

Siccome, per ipotesi, una curva generica C_n di R interseca J solo nei punti base, essendo J d'ordine $3(n-1)$ ed avendo in un punto base r–plo esattamente la multiplicità $3r - 1$, si ha:

$$\sum r(3r - 1)x_r = 3n(n - 1). \qquad (2.\ 1)$$

Dimostriamo ora che le curve di R sono razionali.

(3) Per i numerosissimi lavori sull'argomento, rimando all'articolo di BERZOLARI, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, « Enzykl. d. Math. Wiss. », III C 11, Teubner, Berlin, 1933, pp. 1952–2037.

(4) Le reti di curve che verranno considerate si supporranno prive di componenti fisse.

(5) Si veda, ad esempio: VILLA, *Sulle singolarità della Jacobiana di* $r + 1$ *ipersuperficie dello spazio ad* r *dimensioni*, « Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », ser. III, vol. XIII, pp. 180, 181 (1931). La proprietà sussiste anche per punti infinitamente vicini come appare dall'esame diretto o anche considerando le singolarità straordinarie come singolarità–limiti.

Una curva generica C_n di R, per un ben noto teorema di Bertini, non ha punti multipli fuori dei punti base. Segue, indicando con p il genere di C_n,

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{r(r-1)}{2} x_r ,$$

cioè:

$$\Sigma r x_r = \Sigma r^2 x_r - n^2 + 3n - 2 + 2p . \tag{2.2}$$

D'altra parte la (2. 1) può scriversi

$$\Sigma r x_r = 3 \Sigma r^2 x_r - 3n^2 + 3n . \tag{2.3}$$

Uguagliando le due espressioni di $\Sigma r x_r$ date dalle (2. 2), (2. 3) si ottiene

$$p = \Sigma r^2 x_r + 1 - n^2 . \tag{2.4}$$

Ma il secondo membro della (2. 4) è ≤ 0.

Infatti due curve generiche C_n, C'_n di R passanti per un punto generico Q del piano, hanno complessivamente n^2 punti comuni, dei quali ciascun punto base r-plo ne assorbe r^2 e Q ne assorbe un altro. Le intersezioni assorbite complessivamente dai punti base e da Q sono quindi

$$\Sigma r^2 x_r + 1$$

ed è perciò

$$n^2 \geq \Sigma r^2 x_r + 1 .$$

Il secondo membro della (2. 4) è quindi ≤ 0.

D'altra parte è $p \geq 0$. Dovendo sussistere la (2. 4) si conclude $p = 0$, cioè la curva C_n generica della rete è razionale.

La (2. 4) diviene quindi

$$\Sigma r^2 x_r = n^2 - 1 . \tag{2.5}$$

La (2. 3), per la (2. 5), diviene

$$\Sigma r x_r = 3(n-1) . \tag{2.6}$$

Le (2. 5), (2. 6) sono le classiche relazioni di Cremona [6] che si sono così ritrovate per altra via.

La (2. 5) dimostra che la rete R è omaloidica.

La condizione del nostro teorema è dunque sufficiente.

La condizione è necessaria. Infatti, se la rete è omaloidica sussistono le (2. 5), (2. 6). Moltiplicando la (2. 5) per 3 e sottraendo da essa, membro a membro la (2. 6), si ottiene la (2. 1) la quale dimostra appunto che la J e

(6) Com'è ben noto, il CREMONA (op. cit., pp. 55, 56) perviene a due relazioni, equivalenti alle (2. 5), (2. 6), considerando una trasformazione birazionale fra due piani, le curve della rete corrispondenti a rette, il numero dei punti comuni a due curve della rete e il numero delle condizioni a cui sono soggette le curve della rete. Sostanzialmente: scrivendo che la rete è omaloidica e che le curve della rete sono razionali.

la curva generica C_n della rete s'intersecano solo nei punti base e che in questi punti la J si comporta regolarmente.

3. Esporremo ora un'altra proprietà caratteristica delle reti omaloidiche.

Data una rete di curve piane algebriche d'ordine > 1 (a Jacobiana non indeterminata) chiamo tangente stazionaria in un punto P della curva Jacobiana (non base della rete) la tangente comune alle curve della rete passanti per P. Ciò posto, la proprietà è la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete R *di curve piane algebriche d'ordine* $n > 1$ *sia omaloidica, è che in ogni punto della Jacobiana* J *di* R *la tangente stazionaria sia ivi tangente alla Jacobiana (oppure sia indeterminata, oppure, se di* J *fa parte una curva* C *contata* $\nu > 1$ *volte e se il punto appartiene a* C, *che la tangente stazionaria coincida con la tangente ivi a* C) *e che nei punti base* J *si comporti regolarmente.*

Dimostriamo che la condizione è sufficiente.

Poniamo $J \equiv J'$ se la J non ha componenti multiple, mentre nel caso opposto indichiamo con J' la curva costituita da tutte le componenti di J ciascuna contata una volta sola (sicchè J' non ha componenti multiple).

Consideriamo le curve di R passanti per un punto generico Q del piano (fuori della curva Jacobiana). Queste curve formano un fascio F. Siccome la tangente stazionaria in un punto P di J' (non base) è la tangente in P alla curva di F passante per P, coincidendo questa tangente con quella di J' (o essendo indeterminata), ne verrebbe che una curva di F sarebbe tangente a J' (o avrebbe punto doppio almeno) ovunque la intersechi. I gruppi di punti della serie lineare g segata da F su J' avrebbero punto doppio variabile (anzi ogni punto di un gruppo di g sarebbe doppio almeno). Ma ciò è assurdo [7]. Segue che g deve ridursi ad un gruppo di punti fissi. D'altra parte, essendo Q un punto generico del piano, tale gruppo di punti fissi non varia al variare di F, in quanto, curve di due fasci diversi individuano a loro volta un fascio a cui appartengono. Per questi punti fissi devono passare dunque tutte le curve di R. Essi sono, cioè, punti base di R [8].

Si conclude che una curva generica di R interseca J soltanto nei punti base di R. Siccome poi nei punti base J si comporta regolarmente, per il teorema del n. 2 si conclude che la rete R è omaloidica.

(7) Infatti la curva J' farebbe parte dell'inviluppo di F, mentre un fascio non ha curva inviluppo. Si veda pure, ad esempio: SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, p. 55 (1926).

(8) Se in un punto P di J (non punto base della rete R) la tangente stazionaria è indeterminata, le ∞^1 curve di R passanti per P hanno in P punto doppio (almeno) e J ha in P punto doppio (almeno). Se la tangente stazionaria è indeterminata in tutti i punti di una curva C (che sarà necessariamente componente di J contata almeno due volte), la C sarà curva base (contata almeno due volte) per le curve di un fascio F (costituito di curve di R) e quindi si conclude ancora che i punti in cui una curva di R, non appartenente a F, sega C sono punti base.

La condizione è necessaria: consideriamo infatti una rete omaloidica. Com'è ben noto (9), le curve della rete passanti per un punto P della Jacobiana J (non punto base della rete) si spezzano in una curva γ (*curva fondamentale*) passante per P, facente parte di J, e in una curva residua che varia in un fascio (di cui P non è punto base). Se γ non è componente multipla per le curve della rete passanti per P, la tangente stazionaria in P è la tangente in P alla curva γ, la quale è appunto componente di J.

Se γ fa parte di J contata una sola volta, la tangente stazionaria coincide quindi con la tangente alla Jacobiana. Se infine γ è componente multipla per le curve della rete passanti per P, la tangente stazionaria nei punti di γ è indeterminata.

Osservazione: Si noterà che il precedente teorema, come pure quello del n. 2, permette di dedurre una proprietà relativa al comportamento della rete in tutto il piano da altra relativa al comportamento sopra una curva (la Jacobiana). Il precedente teorema precisa il comportamento della Jacobiana in un suo punto generico, nei punti base della rete e nelle sue eventuali curve multiple.

Matematica. — *Sul prolungamento analitico.* Nota (*) di M. CARAFA, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. PREMESSA. – Se si conosce il valore di una funzione $f(z)$ lungo una curva chiusa C interna al suo campo di regolarità (insieme al dominio D di cui essa è il contorno), la notissima formula di Cauchy:

$$(1,1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z}\, dt$$

permette di ottenere la $f(z)$ in ogni punto z interno a C, mentre per calcolarla nei punti non interni a C si deve ricorrere al *prolungamento analitico*, cioè, determinare gli *infiniti* coefficienti dello sviluppo di Taylor della $f(z)$ relativo ad un punto interno alla C e quindi poi sommare detto sviluppo per ottenere il valore della funzione in un campo più ampio e da quì procedere infine in modo analogo per successivi *prolungamenti* fino al punto prescelto.

In questa Nota si dimostra che il *prolungamento analitico* può ottenersi invece più semplicemente con una sola integrazione ed una sola derivazione e precisamente che a partire dai valori della $f(z)$ lungo la C, si può dare una formula analoga alla (1, 1) ma valida non solo dentro la C o dentro un cerchio di centro a come avviene con l'ordinario sviluppo di Taylor, ma in tutta la *stella* di Mittag–Leffler con lo stesso centro a.

(9) *Opere Matematiche di Luigi Cremona*, pp. 196, 197.

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1948.

La formula a cui si giunge è la seguente

$$(1,2) \qquad f(z) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-a} P\left(\frac{z-a}{t-a}, \theta\right) f(t)\, dt$$

dove la $P(\lambda, \theta)$ con $\lambda = (z-a)/(t-a)$ è una particolare funzione *indipendente dalla* $f(z)$ *e dalla* C, che sostituisce la funzione $1/(t-z)$ della formula (1, 1) di Cauchy; θ è un parametro ausiliario.

Pensando di restringere comunque la C intorno ad a si può anche dire che la (1, 2) opera il *prolungamento analitico* della $f(z)$ dall'intorno del punto a a tutta la *stella* relativa allo stesso punto.

Prima di entrare in argomento si richiamano brevemente i risultati del Mittag–Leffler sullo sviluppo in serie di polinomi di una funzione analitica.

2. I RISULTATI DEL MITTAG–LEFFLER [1]. – Data una funzione analitica $f(z)$ (eventualmente polidroma) e considerato un qualunque suo punto a di regolarità, si dice *stella* di Mittag Leffler della $f(z)$ relativa al punto a, la regione costituita dal piano complesso z privato di tutte le semirette che partono da un punto singolare per la $f(z)$ e sono tali che il loro prolungamento passa per a. La *stella* di Mittag–Leffler della $f(z)$ relativa al punto $z = a$ verrà indicata con $S_{f(a)}$. È chiaro che $f(z)$ è regolare per z in $S_{f(a)}$ [2].

Sia ora r il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze della $f(z)$ relativo al punto $z = a$; detto sviluppo verrà indicato con $f(z \mid a)$, cioè:

$$(2,1) \qquad f(z \mid a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k.$$

Costruiamo poi mediante la (2, 1) lo sviluppo in serie di potenze della $f(z)$ relativamente ad un punto ξ interno al cerchio di convergenza (a, r), si ottiene:

$$(2,2) \qquad f(z \mid \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\xi \mid a)}{k!} (z-\xi)^k$$

serie che avrà un raggio di convergenza ρ soddisfacente alle relazioni:

$$(2,3) \qquad r - |\xi - a| \leq \rho \leq r + |\xi - a|.$$

Ma dato che ξ è interno al cerchio $|z-a| \leq r$ possiamo scrivere dalla (2, 1):

$$(2,4) \qquad f^{(k)}(\xi \mid a) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f^{(h+k)}(a)}{h!} (\xi - a)^h \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

(1) Cfr. MITTAG–LEFFLER, « Acta Mathematica », t. 23, p. 4362; t. 24 p. 183; t. 26, p. 353; t. 29, p. 101; t. 42, p. 285. Cfr. anche: « Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici », vol. I, p. 67, Roma 1908.

(2) Per costruzione quando z varia in $S_{f(a)}$, la $f(z)$ assume il valore di un suo ramo monodromo. Nel seguito con $f(z)$ intenderemo sempre di indicare uno di detti rami della $f(z)$ stessa.

e sostituendo le (2, 4) nella (2, 2), si ricava:

$$(2,5)\qquad f(z,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{f^{(h+k)}(a)}{h!\,k!}(\xi-a)^h(z-\xi)^k$$

che è una serie doppia certo convergente per $|\xi-a|<r$ e per $|z-\xi|<r-|\xi-a|$.

Se nella (2, 5) poniamo:

$$\xi-a=\frac{z-a}{2}$$

per cui è pure

$$z-\xi=\frac{z-a}{2}$$

si ottiene la serie:

$$(2,6)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{f^{(k+h)}(a)}{k!\,h!}\left(\frac{z-a}{2}\right)^{k+h}$$

dove la sommatoria esterna va intesa come somma delle somme delle serie interne. Il Mittag-Leffler ha dimostrato che la serie (2, 6) converge in una regione che *contiene* il cerchio di convergenza $|z-a|\leq r$. Proseguendo il prolungamento della $f(z)$ oltre detta regione, dopo n prolungamenti, si vede facilmente che si arriva alla seguente rappresentazione della $f(z)$, analoga alla (2, 6):

$$(2,7)\qquad f(z)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{f^{(k_1+\cdots+k_n)}(a)}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{z-a}{n}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_n}$$

che converge in una regione che tende alla *stella* $S_{f(a)}$ quando n tende all'∞. Per $n>3$ detta regione può non essere contenuta in $S_{f(a)}$, se però si presenta il limite della (2, 7), per $n\to\infty$, nella seguente forma:

$$(2,8)\qquad f(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k_1=0}^{n^2}\sum_{k_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{k_n=0}^{n^{2n}}\frac{f^{(k_1+\cdots+k_n)}(a)}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{z-a}{n}\right)^{k_1+\cdots+k_n}$$

si dimostra che la convergenza è uniforme in ogni dominio interno ad $S_{f(a)}$ e che inoltre questa *stella* è proprio il campo di convergenza per la (2, 8).

Posto poi:

$$(2,9)\qquad Q_n f(z)=\sum_{k_1=0}^{n^2}\sum_{k_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{k_n=0}^{n^{2n}}\frac{f^{(k_1+\cdots+k_n)}(a)}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{z-a}{n}\right)^{k_1+\cdots+k_n};\quad Q_0 f(z)=f(a)$$

è chiaro che la serie di polinomi:

$$(2,10)\qquad f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}(Q_{n+1}f(z)-Q_n f(z))$$

converge uniformemente in ogni dominio interno ad $S_{f(a)}$ verso la $f(z)$. Lo sviluppo (2, 10) verrà chiamato *lo sviluppo della* $f(z)$ *in serie di Mittag-Leffler*. Si osservi che i polinomi $Q_n f(z)$ sono essenzialmente formati *con gli stessi coefficienti* $f^{(k)}(a)$ dello sviluppo (2, 1) moltiplicati per numeri reali positivi *indipendenti* dalla $f(z)$ e quindi ben a ragione lo sviluppo (2, 10)

viene considerato come la naturale estensione dello sviluppo in serie di potenze di Taylor.

3. Una particolare funzione. – Consideriamo la funzione:

$$g(z) = \frac{1}{t - z} \tag{3, 1}$$

e fissato il punto $z = a$ ed una qualunque curva chiusa C che lo contenga, supporremo sempre nel seguito che t si trovi su detta curva o sia esterno ad essa. Per $(|z - a|/|t - a|) < 1$ la $g(z)$ ammette il seguente sviluppo nell'intorno di $z = a$:

$$g(z) = \frac{1}{t - a}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{z - a}{t - a}}\right) = \frac{1}{t - a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - a}{t - a}\right)^k. \tag{3, 2}$$

La funzione (3, 1) è singolare nel solo punto $z = t$ e perciò la *stella* $S_{z(a)}$ è in questo caso determinata dalla sola semiretta uscente dal punto $z = t$ e tale che il suo prolungamento passa per il punto $z = a$. Dalla (2, 9), si trova:

$$Q_n g(z) = \frac{1}{t - a}\sum_{k_1=0}^{n^2}\sum_{k_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{k_n=0}^{n^{2n}}\frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!}\left(\frac{z - a}{n(t - a)}\right)^{k_1 + \cdots + k_n} \tag{3, 3}$$

da cui lo sviluppo in serie di Mittag-Leffler della $g(z)$ (cfr. la (2, 10)):

$$g(z) = \frac{1}{t - a} + \sum_{n=0}^{\infty}(Q_{n+1} g(z) - Q_n g(z)). \tag{3, 4}$$

Si osservi ora che la funzione $g(z)$ può anche scriversi

$$g(z) = \frac{1}{t - a}\,\frac{1}{1 - X} \tag{3, 5}$$

avendo posto $X = (z - a)/(t - a)$, essa quindi come funzione della X è singolare nel solo punto $X = 1$ ed il polinomio n^{esimo} di Mittag-Leffler relativo alla sua *stella* di centro in $X = 0$ è il seguente:

$$\frac{1}{t - a} Q_n \frac{1}{1 - X} = \frac{1}{t - a}\sum_{k_1=0}^{n^2}\sum_{k_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{k_n=0}^{n^{2n}}\frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!}\left(\frac{X}{n}\right)^{k_1 + \cdots + k_n} \tag{3, 6}$$

che coincide per $X = (z - a)/(t - a)$ con quello dato dalla (3, 3). Quindi per $|X| = \left|\dfrac{z - a}{t - a}\right| < 1$ [3], risultando X interno al cerchio $|X| \leq 1$ contenuto nella suddetta *stella* della (3, 5) di centro $X = 0$, sappiamo che in

(3) Per non complicare inutilmente le formule, si è scelto il numero 1/2, ma si fa osservare che più generalmente si potrebbe mettere al suo posto un qualunque altro numero positivo minore dell'unità.

corrispondenza ad un qualsiasi ε positivo comunque piccolo, esiste un $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ risulta (qualunque sia X interno alla *stella*):

$$(3,7) \qquad \left| \frac{1}{t-a} \frac{1}{1-X} - \frac{1}{t-a} Q_n \frac{1}{t-X} \right| < \varepsilon$$

e per quanto si è prima detto, si può affermare che qualunque sia $(z-a)/(t-a)$ tale che $|z-a|/|t-a| \leq 1/2$ si ha sempre per $n > \bar{n}$:

$$(3,8) \qquad |g(z) - Q_n g(z)| < \varepsilon .$$

Se allora t è variabile sulla C o fuori della C e δ è la minima distanza del punto a dai punti della curva C, per $|X| = \left| \frac{z-a}{t-a} \right| \leq 1/2$ dalla (3, 2) si ricava:

$$(3,9) \qquad |g(z)| \leq \frac{1}{|t-a|} \frac{1}{1-1/2} \leq \frac{2}{\delta}$$

e quindi dalla (3, 8), per $n > \bar{n}$:

$$(3,10) \qquad |Q_n g(z)| \leq \frac{2}{\delta} + \varepsilon .$$

perciò se M_ε è un numero positivo tale che per $n = 1, 2, \cdots, \bar{n}$, $|Q_n g(z)| < M_\varepsilon$ quando t non è interno a C e z è tale che $(|z-a|/|t-a|) \leq 1/2$, indicato con M il maggiore tra M_ε e $(2/\delta + \varepsilon)$, per la (3, 10) si avrà nel sopradetto campo di variabilità della t e della z, *qualunque sia n*

$$(3,11) \qquad |Q_n g(z)| < M .$$

Analogamente, se $\left| \frac{z-a}{t-a} \right| = |X| \geq 1/2$ essendo per la (3, 3)

$$(3,12) \qquad |Q_n g(z)| \leq \frac{1}{|t-a|} \sum_{k_1=0}^{n^2} \sum_{k_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{k_n=0}^{n^{2n}} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} \left(|X| \right)^{k_1 + \cdots + k_n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k_1 + \cdots + k_n}$$

se si mette nel secondo membro $2|X|(1/2)$ al posto di $|X|$, dalla (3, 11) si ricava:

$$(3,13) \qquad |Q_n g(z)| \leq \frac{(2|X|)^{n^2 + n^4 + \cdots + n^{2n}}}{|t-a|} \sum_{k_1=0}^{n^2} \cdots \sum_{k_n=0}^{n^{2n}} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{1/2}{n} \right)^{k_1 + \cdots + k_n} <$$

$$< M (2|X|)^{n^2 + n^4 + \cdots + n^{2n}}$$

Poniamo adesso:

$$(3,14) \qquad m_n = n^2 + n^4 + \cdots + n^{2n} = \frac{n^{2(n+1)} - n^2}{n^2 - 1}$$

e consideriamo la funzione avente lo sviluppo (si osservi la (3, 4)):

$$(3,15) \qquad \frac{1}{t-a} P\left(\frac{z-a}{t-a}, \theta \right) = \frac{\theta}{t-a} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{m_{n+1}}}{m_{n+1}!} (Q_{n+1} g(z) - Q_n g(z))$$

che per $|\theta| \leq 1$ e per $\left|\frac{z-a}{t-a}\right| \leq 1/2$ è totalmente convergente come serie di polinomi di $\left(\frac{z-a}{t-a}\right)$ dato che la serie dei moduli per t non interno a C è maggiorata dalla serie convergente:

$$\frac{1}{\delta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2M}{m_{n+1}!}. \tag{3, 16}$$

Inoltre la (3, 15) è anche totalmente convergente per $|\theta| \leq 1$ e per $\left|\frac{z-a}{t-a}\right| = |X| \geq 1/2$, dato che in questo caso la serie dei suoi moduli è maggiorata dall'altra serie [cfr. la (3, 13)]:

$$\frac{1}{\delta} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2M}{m_{n+1}!} (2|X|)^{m_{n+1}} \tag{3, 17}$$

che certo converge qualunque sia X finito. Si conclude quindi che la serie (3, 15) per $|\theta| \leq 1$ e per t non interno a C converge totalmente come serie di polinomi di $\frac{z-a}{t-a}$, qualunque sia z finito e quindi la sua somma risulta funzione intera della variabile z. La funzione P, data dalla (3, 15), può chiamarsi, per quanto si mostrerà nel numero seguente, la funzione di *prolungamento per la stella di Mittag–Leffler.*

4. Estensione della formula di Cauchy. – Sia $f(z)$ una funzione analitica regolare in un dominio semplicemente connesso D′ e sia C una qualunque curva chiusa interna a detto dominio; indichiamo con a un punto arbitrario interno a C.

Calcoliamo poi l'integrale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C Q_n \, g(z) f(t) \, dt = \tag{4, 1}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n^2} \sum_{k_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{k_n=0}^{n^{2n}} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{(t-a)^{k_1 + \cdots + k_n + 1}} \right) \left(\frac{z-a}{n} \right)^{k_1 + \cdots + k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n^2} \sum_{k_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{k_n=0}^{n^{2n}} \frac{f^{(k_1 + \cdots + k_n)}(a)}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{z-a}{n} \right)^{k_1 + \cdots + k_n} = Q_n f(z)$$

da qui per la totale convergenza ora dimostrata della (3, 10) integrando termine a termine avremo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-a} P\left(\frac{z-a}{t-a}, \theta \right) f(t)\, dt = \tag{4, 2}$$

$$= \theta f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{m_{n+1}!}}{m_{n+1}!} (Q_{n+1} f(z) - Q_n f(z))$$

che è una serie di potenze di θ convergente per $|\theta| \leq 1$ (qualunque sia z finito) quindi la sua serie derivata rispetto a θ:

$$(4, 3) \qquad f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{m_{n+1}-1} (Q_{n+1} f(z) - Q_n f(z))$$

converge certo per $|\theta| < 1$, inoltre quando z appartiene ad un qualunque dominio interno alla $S_{f(a)}$ la (4, 3) converge anche per $\theta = 1$ dato che per questo valore essa coincide con lo sviluppo in serie di Mittag-Leffler della $f(z)$ (cfr. la (2, 10). Per un noto teorema di Abel quando θ tende ad 1 in un settore di apertura inferiore a 180° e di vertice $\theta = 1$, tutto interno alla circonferenza $|\theta| = 1$, la (4, 3) converge verso la $f(z)$ uniformemente e quindi la sua somma è la derivata rispetto a θ della funzione a primo membro della (4, 2) anche per $\theta = 1$; derivando quindi la (4, 2) per esempio lungo l'asse reale delle θ nell'intorno sinistro di $\theta = 1$, avremo per quanto si è detto:

$$(4, 4) \qquad f(z) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t-a} P\left(\frac{z-a}{t-a}, \theta\right) f(t)\, dt$$

valida in ogni dominio D interno a $S_{f(a)}$ e per ogni a interno a C; dato poi che la (4, 4) non dipende dalla scelta del dominio interno a $S_{f(a)}$, ove si fa variare la z, essa **risulta valida in ogni punto z interno a detta stella** $S_{f(a)}$.

Come già si è fatto notare nella Premessa, la (4, 4) è molto simile alla formula di Cauchy (1, 1) di cui può considerarsi esserne una estensione; in essa la particolare funzione $\frac{1}{t-a} P\left(\frac{z-a}{t-a}, \theta\right)$, completamente *indipendente* dalla generica $f(z)$ e dalla curva C, sostituisce la funzione $g(z) = 1/(t-z)$ che figura nella (1, 1).

Si noti che la funzione P è stata costruita mediante la $g(z)$ nel modo indicato al n. 3.

Mediante la (4, 4) si può quindi *prolungare* la funzione $f(z)$ (o più generalmente uno dei rami della $f(z)$ monodromi in $S_{f(a)}$; cfr. nota [2]) dall'intorno di un punto regolare a ad un qualsiasi punto della *stella* $S_{f(a)}$, con un integrale definito ed una derivazione a partire dalla funzione P (che può ritenersi nota al pari della $1/(t-z)$) e dai valori della f su una curva chiusa C comunque ristretta intorno ad a.

Matematica (Geometria). — *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle congruenze rettilinee.* Nota (*) di G. Saban, presentata dal Corrisp. B. Segre.

1. La formula integrale di Gauss–Bonnet (1) è stata generalizzata dal Blaschke (2) alla teoria dualistica delle congruenze rettilinee. Questa generalizzazione porta a due equazioni reali per gli integrali doppi di alcuni invarianti di una congruenza rettilinea, integrali che nella suddetta estensione vengono a sostituire la « curvatura integra » di Gauss. Nel n. 2 di questa Nota ritorno brevemente su alcuni punti della teoria dualistica delle congruenze, utilizzando espressioni leggermente diverse da quelle usate dal Blaschke nella sua classica esposizione, e riprendendo anche la generalizzazione della formula di Gauss–Bonnet. Nel n. 3 poi, facendo uso di due risultati da me recentemente ottenuti (3), deduco alcune limitazioni per gli integrali di cui ho fatto cenno. Infine nel n. 4, espongo un'applicazione delle formule ottenute alle congruenze « chiuse ».

2. È noto come il vettore dualistico (4)

$$\vec{R}(u,v) = \vec{r}(u,v) + \varepsilon\vec{\bar{r}}(u,v) \qquad (\varepsilon^2 = 0\,,\ \vec{r}\times\vec{\bar{r}} = 0),$$

dove $\vec{r}$ è il versore d'una retta orientata ed $\vec{\bar{r}}$ denota il momento di tale versore rispetto ad un'origine determinata, rappresenti una congruenza di rette. Per ogni retta della congruenza passano infinite rigate, due delle quali sono le superficie coordinate $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ Per ogni rigata $\vec{R} = \vec{R}(t)$ della congruenza – ottenibile assumendo $u = u(t)$, $v = v(t)$ – si definisce una terna mobile, costituita dalla generatrice $\vec{R}_1 = \vec{R}$, dalla normale $\vec{R}_2$ nel punto centrale di essa, ed infine dalla retta $\vec{R}_3 = \vec{R}_1 \wedge R_2$: per i vettori dualistici di questo triedro valgono le formule di derivazione:

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1948.

(1) O. Bonnet, « Journal de l'École Polytechnique », vol. 19, p. 131 (1848).

(2) W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Bd. I, pp. 280–81.

(3) G. Saban, *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate*. « Rendiconti Accad. Naz. Lincei », vol. V, fasc. 1–2, pp. 24–30 (1948).

(4) Per lo studio dualistico delle congruenze cfr. W. Blaschke, op. cit., pp. 277 e sgg; ved. altresì le chiare esposizioni ed i bei risultati contenuti nei lavori di W. Haak sulle congruenze e sui complessi in « Math. Zeitschr. », Bd. 40, 41, 43, in « Monatsch. für Math. und Phys », Bd. 44, ecc., le tesi di Ph. Dwinger e N. H. Kuiper Università di Leida, e le pubblicazioni di Ph. Dwinger nei « Proceedings » della Nederl. Akademie van Wetenschappen, vol. XLIII, n. 8, ed altrove.

$$\begin{cases} \vec{R}_1' = \quad P\vec{R}_2, \\ \vec{R}_2' = -P\vec{R}_1 \quad + Q\vec{R}_3, \\ \vec{R}_3' = \quad -Q\vec{R}_2, \end{cases} \quad \text{dove:} \quad \begin{cases} P = \sqrt{\vec{R}_1'^2} = p + \varepsilon\bar{p}, \\ Q = \dfrac{(\vec{R}_1, \vec{R}_1', \vec{R}_1'')}{\vec{R}_1'^2} = q + \varepsilon\bar{q}. \end{cases}$$

Scegliendo in particolare quale parametro t la lunghezza d'arco dell'indicatrice sferica delle generatrici, s, si ottiene

$$P = 1 + \varepsilon\delta,$$

dove δ è il parametro di distribuzione della superficie, mentre una nuova funzione sostituisce la precedente Q. Infine, utilizzando quale parametro sulla rigata la funzione dualistica S definita da

$$dS = P\,ds = (1 + \varepsilon\delta)\,ds,$$

si ottengono le formule di derivazioni seguenti:

$$\begin{cases} \vec{R}_1' = \quad \vec{R}_2 \\ \vec{R}_2' = -\vec{R}_1 \quad + \sigma\vec{R}_3 \\ \vec{R}_3' = \quad -\sigma\vec{R}_2. \end{cases}$$

Qui appare la funzione $\sigma = Q/P$, detta la curvatura sferica dualistica della superficie rigata (5); tale superficie risulta definitiva dalle equazioni dualistiche

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_1(S) \quad , \quad S = s + \varepsilon\int_0^s \delta\,ds.$$

La congruenza di rette $\vec{R} = \vec{R}(u, v)$ può essere definita similmente mediante le tre equazioni dualistiche

$$\vec{R} = \vec{R}(U, V) \quad , \quad U = u + \varepsilon\int_0^u \delta_u\,du \quad , \quad V = v + \varepsilon\int_0^v \delta_v\,dv,$$

nelle quali u e v sono le lunghezze d'arco delle indicatrici delle generatrici delle superficie coordinate, e δ_u, δ_v denotano i parametri di distribuzione rispettivi. La forma fondamentale della congruenza è allora

$$dS^2 = d\vec{R}^2 = \left(\frac{\partial\vec{R}}{\partial U}\,dU + \frac{\partial\vec{R}}{\partial V}\,dV\right)^2 = dU^2 + 2\cos\Psi\,dU\,dV + dV^2 \quad \left(\cos\Psi = \frac{\partial\vec{R}}{\partial U} \times \frac{\partial\vec{R}}{\partial V}\right).$$

(5) I risultati qui esposti, utilizzati per la prima volta da G. SABAN, « Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul », vol. XIII, 1, sono la sintesi di quelli contenuti nei lavori di HAAK citati in (4), e nella Nota di K. ERIM apparsa nelle « Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul », vol. X, 1-4, ove viene introdotta la curvatura sferica dualistica.

Si dimostra che per raggio della congruenza passano due superficie particolari, dette fondamentali, i cui punti centrali sulla generatrice comune coincidono, e le cui normali centrali risultano ortogonali tra loro; assunte tali superficie come superficie coordinate, sí ha dunque

$$\cos \Psi = 0 \quad , \quad dS^2 = dU^2 + dV^2 = (1 + \varepsilon\delta_1)^2\, du^2 + (1 + \varepsilon\delta_2)^2\, dv^2 ,$$

dove δ_1 e δ_2 denotano i parametri di distribuzione delle superficie fondamentali della congruenza: questi sono precisamente i valori estremi che il parametro di distribuzione può assumere per quel determinato raggio.

Richiamiamo ora la classica formula di Gauss–Bonnet:

$$\int K\, do + \oint \varkappa_g\, ds = 2\pi ,$$

dove K è la curvatura totale della superficie, $\varkappa_g$ e ds denotano rispettivamente la curvatura geodetica e l'elemento d'arco della curva chiusa $\mathfrak{C}$ cui va esteso il secondo integrale, la $\mathfrak{C}$ limitando sulla superficie considerata - di elemento d'area do – la regione cui va esteso il primo integrale. Per una superficie sferica di raggio unitario si ha K = 1, ed inoltre

$$\varkappa_g = (\vec{r}, \vec{r}_s, \vec{r}_{ss}) \quad , \quad \varkappa_g\, ds = \frac{(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')}{\vec{r}'^2}\, dt ,$$

essendo $\vec{r}$ il vettore che traccia la curva $\mathfrak{C}$, $\vec{r}_s$ ed $\vec{r}_{ss}$ le sue derivate rispetto all'arco s di $\mathfrak{C}$, $\vec{r}'$ ed $\vec{r}''$ le sue derivate rispetto ad un parametro t qualsiasi, onde la formula precedente diventa

$$\int do + \oint \frac{(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')}{\vec{r}'^2}\, dt = 2\pi .$$

Rammentiamo infine che, in ogni caso, $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ essendo i coefficienti della forma fondamentale della superficie, risulta:

$$do = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}\, du \cdot dv .$$

Per generalizzare la formula ottenuta alle congruenze rettilinee, basta – come mostra il Blaschke – sostituirvi ad ogni elemento reale il corrispondente dualistico. Così si passa alla formula dualistica

$$\int d\Omega + \oint \frac{(\vec{R}_1, \vec{R}_1', \vec{R}_1'')}{\vec{R}_1'^2}\, dt = 2\pi ;$$

in essa $d\Omega$ può calcolarsi mediante i coefficienti della forma fondamentale della congruenza, ottenendosi

$$d\Omega = dU \cdot dV = \left(1 + 2\varepsilon \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) du \cdot dv = (1 + 2\varepsilon\bar{\delta})\, d\omega ,$$

dove $d\omega = du \cdot dv$ è l'elemento di superficie della rappresentazione sferica della congruenza, mentre $\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ riceve il nome di parametro di distribuzione medio della congruenza [6]. Facendo uso dell'espressione di Q precedentemente data, si perviene infine al risultato di Blaschke

$$\int (1 + 2\varepsilon\bar{\delta})\, d\omega + \oint Q\, dt = 2\pi ,$$

che ora, osservato che

$$Q\, dt = \frac{Q}{P} P\, dt = \sigma\, dS ,$$

modificheremo nell'equazione dualistica

$$\int d\Omega + \oint \sigma\, dS = 2\pi , \tag{1}$$

chiara generalizzazione della

$$\int d\omega + \oint \varkappa_g\, ds = 2\pi .$$

Nella (1), il secondo integrale va esteso all'indicatrice sferica delle generatrici d'una superficie rigata chiusa, la qual curva, che risulta chiusa, delimita la calotta sferica a cui va esteso il primo integrale; va rilevato che, affinchè la (1) si possa applicare, occorre che la calotta sferica sia completamente ricoperta dalla rappresentazione sferica delle generatrici.

3. La formula (1) si scinde nelle sue parti reale e dualistica:

$$\int d\omega + \oint q\, dt = 2\pi \tag{2}$$

$$-2\int \bar{\delta}\, d\omega = \oint \bar{q}\, dt . \tag{3}$$

La (2) esprime una relazione fra l'area della calotta sferica generata dall'indicatrice delle rette della congruenza, e la parte reale della torsione dualistica integrale della rigata chiusa della congruenza la cui indicatrice sferica limita la calotta considerata. La (3) esprime l'eguaglianza fra la parte dualistica della suddetta torsione dualistica integrale e l'opposto del doppio

(6) Cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. I, p. 279 e C. E. WEATHERBURN, *Differential Geometry of three Dimensions*, vol. I, p. 194.

dell'integrale, esteso alla calotta suindicata, del parametro di distribuzione medio.

In base ad un risultato altrove dimostrato [7] vale la limitazione

$$\oint q\, dt \geqq o_2 \qquad (0 < o_2 \leqq 2\pi),$$

dove o_2 denota il secondo orientamento della rigata chiusa considerata. In forza della (2) ne risulta che

$$\int d\omega \leqq 2\pi - o_2 \qquad (0 < o_2 \leqq 2\pi),$$

ossia:

L'area delimitata dall'indicatrice delle generatrici d'una rigata chiusa appartenente ad una congruenza, sull'immagine sferica della congruenza medesima non supera l'eccesso di 2π sul secondo orientamento della rigata chiusa considerata.

Facendo uso della formula

$$0 \leqq \oint \bar{q}\, dt \leqq L$$

dove L è la lunghezza della linea di strizione della rigata chiusa e l'integrale va esteso a tale linea [7], dalla (3) si deduce

$$-L \leqq 2 \int \delta\, d\omega \leqq 0,$$

e cioè

Il doppio dell'integrale del parametro di distribuzione medio di una retta generica d'una congruenza, esteso ad una regione dell'immagine sferica della congruenza delimitata dall'indicatrice delle generatrici d'una rigata chiusa, è sempre compreso fra zero e l'opposto della lunghezza della linea di strizione della rigata considerata.

4. Riferiamoci da ultimo ad una congruenza la cui immagine sferica sia l'intera sfera unitaria, ogni punto di questa provenendo da una sola retta della congruenza; gli esempi più semplici sono le congruenze di normali di superficie chiuse convesse, onde daremo a tali congruenze il nome di c o n g r u e n z e c h i u s e. Va però avvertito che tali esempi non esauriscono la totalità delle congruenze chiuse [8].

(7) Cfr. G. Saban (loc. cit in (3)).

8) In altri termini, *esistono congruenze chiuse che non sono congruenze di normali di superficie chiuse convesse*. Per provarlo, basta costruire una congruenza siffatta, ad esempio quella definita da

$$\vec{M} = \vec{p}(u, v) + \lambda \vec{r}(u, v),$$

È chiaro che l'indicatrice sferica d'una rigata chiusa estratta da una congruenza chiusa divide la rappresentazione sferica di questa, cioè la sfera unitaria, in due parti, e che, a seconda del verso secondo cui la linea di strizione della rigata chiusa vien percorsa, l'indicatrice della rigata – corrispondentemente orientata – delimita l'una o l'altra delle due porzioni della sfera indicatrice. Indichiamo brevemente con $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$ l'indicatrice sferica della rigata, descritta nei due versi, e con I e II le corrispondenti porzioni della sfera unitaria. In base alla (1) sussistono le relazioni

$$\int_{\mathrm{I}} d\Omega + \oint_{\mathcal{C}_+} \sigma\, dS = 2\pi,$$

$$\int_{\mathrm{II}} d\Omega + \oint_{\mathcal{C}_-} \sigma\, dS = 2\pi,$$

dove gli integrali curvilinei risultano uguali in valor assoluto ma di segni opposti. Dunque da esse, sommando a membro a membro, si deduce l'uguaglianza

$$\int d\Omega = 4\pi \tag{4}$$

nella quale l'integrale va esteso alla superficie totale della sfera unitaria. Scomponendo la (4) nelle sue parti reale e duale, si trova, insieme alla relazione evidente

$$\int d\omega = 4\pi,$$

l'equazione

$$\int \delta\, d\omega = 0$$

esprimente che

L'integrale del parametro di distribuzione medio, esteso all'intera sfera unitaria immagine d'una congruenza chiusa, è sempre nullo.

dove $\vec{p}(u, v) = (\cos y, \cos v, u/\sin u)$ ed $\vec{r}(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$, con u e v varianti nel campo reale fra 0 e 2π. Siccome in tali condizioni $\vec{r}$ descrive una volta sola la sfera unitaria, la congruenza risulta chiusa. D'altra parte si verifica immediatamente che la congruenza suddetta *non* verifica la relazione

$$\vec{p}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{p}_v \cdot \vec{r}_u$$

la quale, in virtù del teorema di HAMILTON (cfr., per esempio, C. E. WEATHERBURN, *Differential Geometry of three Dimensions*, vol. I, p. 196 (1939), Cambridge), è condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza sia congruenza di normali. L'osservazione enunciata risulta così dimostrata.

Analisi Matematica. — *Sulla integrazione dell'equazione integro–differenziale che regge il fenomeno della diffusione dei neutroni termici.* Nota (*) di C. AGOSTINELLI, presentata dal Socio U. AMALDI.

1. Il fenomeno della diffusione dei neutroni termici, nel caso di una distribuzione piana, quando cioè la funzione di distribuzione dipenda soltanto dalla coordinata x e dall'angolo θ che il vettore velocità forma con l'asse x, è retto dalla seguente equazione integro–differenziale (1)

$$(1) \qquad \frac{\partial f(x, \cos\theta, t)}{\partial t} + v\cos\theta \frac{\partial f(x, \cos\theta, t)}{\partial x} =$$

$$= N v \sigma_s \int_0^{\pi} f(x, \cos\theta', t) \frac{1 + 3P\cos\theta\cos\theta'}{2} \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' - f(x, \cos\theta, t) \cdot vN(\sigma_s + \sigma_c)$$

ove $f(x, \cos\theta, t)$ è la funzione di distribuzione dei neutroni ed $N, v, \sigma_c, \sigma_s, P$, sono delle costanti, per il significato delle quali rimando all'opera citata in (1).

Nell'ipotesi che la diffusione avvenga in un blocco di paraffina che riempie il semispazio $x \geq 0$, e che sulla superficie $x = 0$ non cadano neutroni dall'esterno, si tratterà di determinare la $f(x, \cos\theta, t)$ soddisfacente alla (1), e definita per $0 \leq x < \infty$, con la condizione al contorno

$$(2) \qquad f(x, \cos\theta, t) = 0 \quad , \quad \text{per} \quad x = 0 \quad , \quad \cos\theta \leq 0 .$$

In una Nota recente A. Pignedoli (2) ha dato della (1) un procedimento di integrazione per serie di potenze di x e di t nell'ipotesi che fossero assegnati i valori della f sul piano $x = 0$ e per $\cos\theta > 0$, servendosi della doppia trasformazione di Laplace.

In questa Nota mi propongo di assegnare in modo molto rapido, e sotto forma finita ed espressiva, indipendentemente dall'algoritmo delicato della trasformazione di Laplace, un integrale della (1), soddisfacente alla condizione (2), suscettibile di applicazione alla teoria indicata.

2. Ponendo per brevità

$$\omega = vN(\sigma_s + \sigma_c) \quad , \quad \omega_0 = vN\sigma_s$$

ed

$$(3) \qquad f(x, \cos\theta, t) = e^{-\omega t} F(x, \cos\theta, t)$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 agosto 1948.

(1) Vedi E. AMALDI e G. WICK, *Appunti di Fisica nucleare*, vol. II, tip. R. Pioda, Roma, 1946.

(2) A. PIGNEDOLI, *Sulla teoria della diffusione dei neutroni termici*. «Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena», vol. II, 1947–48).

si ha che la funzione $F(x, \cos\theta, t)$, definita ancora per $0 \leq x < \infty$, deve soddisfare alla nuova equazione integro-differenziale:

$$(1') \qquad \frac{\partial F(x, \cos\theta, t)}{\partial t} + v\cos\theta \cdot \frac{\partial F(x, \cos\theta, t)}{\partial x} =$$

$$= \omega_0 \int_0^{\pi} F(x, \cos\theta', t) \frac{1 + 3P\cos\theta\cdot\cos\theta'}{2} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta$$

con la condizione

$$(2') \qquad F(x, \cos\theta, t) = 0, \quad \text{per} \quad x = 0 \quad , \cos\theta \leq 0.$$

Vediamo di soddisfare formalmente alla (1') ponendo

$$(4) \quad F(x, \cos\theta, t) = \Phi(u, \cos\theta) + \Psi(x, t), \quad \text{con} \quad u = x - vt\cos\theta,$$

Poichè risulta

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v\cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

sostituendo nella (1') il valore (4) di F si ottiene

$$(5) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} + v\cos\theta \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \omega_0 \Psi = \frac{1}{2}\omega_0 [h(x, t) + 3P\cos\theta\, k(x, t)]$$

ove si è posto

$$6) \qquad h(x, t) = \int_0^{\pi} \Phi(x - vt\cos\theta, \cos\theta)\cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

$$7) \qquad k(x, t) = \int_0^{\pi} \Phi(x - vt\cos\theta, \cos\theta)\cdot \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Affinchè la (5) risulti una identità si dovrà avere

$$(8) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \omega_0 \Psi = \frac{1}{2}\omega_0 h(x, t)$$

$$(9) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{3P\omega_0}{2v} k(x, t).$$

Da quest'ultima, integrando da zero ad x, si ricava

$$(10) \qquad \Psi = \frac{3P\omega_0}{2v} \int_0^x k(x, t)\, dx,$$

e sostituendo nella (8) si ha la condizione

$$\frac{3P}{v} \int_0^x \left(\frac{\partial k}{\partial t} - \omega_0 k\right) dx = h(x, t),$$

che per le (6) e (7) e osservando che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u} v \cos\theta$$

si può scrivere

$$(11) \qquad \int_0^{\pi} \left\{ \frac{3P}{v} \cos\theta \int_0^{x} \left(v \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \omega_0 \Phi \right) dx + \Phi \right\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0 .$$

Il primo membro di questa equazione dovrà essere identicamente nullo per valori arbitrari di x, t. Derivando rispetto ad x, e osservando che $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$, avremo ancora

$$\int_0^{\pi} \left\{ \frac{3P}{v} \cos\theta \left(v \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \omega_0 \Phi \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0 ,$$

cioè

$$(12) \qquad \int_0^{\pi} \left\{ (3P\cos^2\theta + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{3P\omega_0}{v} \cos\theta \cdot \Phi \right\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0 .$$

Potremo soddisfare la (12) ponendo

$$(13) \qquad (3P\cos^2\theta + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{3P\omega_0}{v} \cos\theta \cdot \Phi = H(\cos\theta)$$

con $H(\cos\theta)$ funzione di $\cos\theta$ tale che

$$(12') \qquad \int_0^{\pi} H(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0 ,$$

e per questo basta che $H(\cos\theta)$ sia una funzione dispari di $\cos\theta$ e del resto per ora arbitraria.

Dalla (13) si ricava

$$(14) \quad \Phi = G(\cos\theta) \cdot e^{-\frac{3P\omega_0 \cos\theta}{v(3P\cos^2\theta+1)} u} + \frac{v}{3P\omega_0} \cdot \frac{H(\cos\theta)}{\cos\theta}, \qquad (u = x - vt\cos\theta),$$

essendo $G(\cos\theta)$ un'altra funzione anch'essa arbitraria di $\cos\theta$.

Sostituendo nella (11), e tenendo conto della (12'), essa si riduce alla seguente

$$\int_0^{\pi} G(\cos\theta) \cdot e^{-\frac{3P\cos^2\theta}{3P\cos^2\theta+1} \omega_0 t} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0 ;$$

e perchè il primo membro di questa equazione sia identicamente nullo per ogni valore di t, basta che anche $G\cos\theta$ sia una funzione dispari di $\cos\theta$.

Dopo ciò, avendo riguardo alla (12'), la (7) porge

$$k(x,t) = \int_0^{\pi} e^{-\frac{3P\omega_0 \cos\theta}{v(3P\cos^2\theta+1)}u} G(\cos\theta)\cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

e quindi per la (10)

$$\Psi = \frac{1}{2} e^{\omega_0 t} \int_0^{\pi} (1+3P\cos^2\theta)\, e^{-\frac{\omega_0 t}{3P\cos^2\theta+1}} \cdot \left[1 - e^{-\frac{3P\omega_0\cos\theta}{v(3P\cos^2\theta+1)}x}\right] G(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta . \tag{15}$$

La funzione F definita dalla (4), ove Φ e Ψ hanno i valori espressi rispettivamente dalle (14) e (15), con G (cos θ) e H (cos θ) funzioni dispari di cos θ, soddisfa dunque all'equazione (1') per ogni $x > 0$ e qualunque sia il valore di θ.

Per $x = 0$ risulta $\Psi = 0$, e per cos θ = 0 è G (cos θ) = 0, H (cos θ) = 0. Se inoltre si sceglie H in modo che per cos θ = 0 insieme ad essa si annulli anche la sua derivata prima, si avrà, come mostra la (14), $\Phi = 0$ per cos θ = 0. Ne segue che risulta

$$F = 0 \quad , \quad \text{per} \quad x = 0 \quad , \quad \cos\theta = 0 .$$

Assumento F = 0, per $x = 0$, cos θ < 0, le condizioni richieste per a F sul piano limite $x = 0$ sono soddisfatte.

Fisica Matematica. — *Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato.* Nota II (*) di T. MANACORDA, presentata dal Corrisp. G. SANSONE.

3. Nella Nota I abbiamo determinato l'omografia φ che, sostituita nella formula (9) di Burgatti, permette di esprimere le discontinuità delle derivate terze del potenziale gravitazionale di semplice strato. Ricordiamo a questo scopo una nota formula di calcolo omografico. Se α ed $\boldsymbol{u}$ sono una omografia ed un vettore funzioni derivabili del punto P in un campo S, vale la relazione

$$\frac{d\alpha\boldsymbol{u}}{dP} = \alpha\frac{d\boldsymbol{u}}{dP} + k\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u} \tag{21}$$ (1)

con l'operatore k definito da

$$k\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1948.

1) Cfr. C. BURALI FORTI R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, vol. I di *Analisi vettoriale generale*, Bologna, p. 165 (1929).

Scelta allora la terna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{n}$ come si è già detto, operando con l'iperografia $\frac{d\xi}{dP}$ sul versore $\boldsymbol{u}$, e tenendo conto della (21) si ha per la (9)

$$(22_1)\qquad \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{uu} = -4\pi f\left\{\rho\frac{\partial A_u}{\partial u} + 3A_u\frac{\partial\rho}{\partial u}\right\}\boldsymbol{u} -$$

$$-4\pi f\left\{A_u\frac{\partial\rho}{\partial v} + 2T_u\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial T_u}{\partial u}\right\}\boldsymbol{v} - 4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \rho\left(T_u^2 + 2A_u^2 + A_u A_v\right)\right\}\boldsymbol{n},$$

e analogamente

$$(22_2)\qquad \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{vv} = -4\pi f\left\{A_v\frac{\partial\rho}{\partial u} - 2T_v\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial T_v}{\partial v}\right\}\boldsymbol{u} -$$

$$-4\pi f\left\{3A_v\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\frac{\partial A_v}{\partial v}\right\}\boldsymbol{v} - 4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \rho\left(T_v^2 + 2A_v^2 + A_u A_v\right)\right\}\boldsymbol{n},$$

mentre applicandola a $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ si ha

$$(22_3)\qquad \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{vu} = \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{uv} = -4\pi f\left\{A_u\frac{\partial\rho}{\partial v} - 2T_v\frac{\partial\rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial T_v}{\partial u}\right\}\boldsymbol{u}$$

$$-4\pi f\left\{2T_u\frac{\partial\rho}{\partial v} + A_v\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial A_v}{\partial u}\right\}\boldsymbol{v} - 4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - 2\rho T_u\left(A_u + A_v\right)\right\}\boldsymbol{n}\ (2),$$

e ancora, per la (20)

$$(22_4)\qquad \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{un} = \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{nu} = \varphi\boldsymbol{u} = -4\pi f\left\{\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{grad}_\Sigma\rho - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}\cdot\sigma\boldsymbol{u} - \rho\sigma^2\boldsymbol{u}\right\} -$$

$$-4\pi f\left\{-\frac{\partial}{\partial u}(\rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}) - A_u\frac{\partial\rho}{\partial u} - T_u\frac{\partial\rho}{\partial v}\right\}\boldsymbol{n},$$

$$(22_5)\qquad \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{vn} = \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{nv} = \varphi\boldsymbol{v} = -4\pi f\left\{\frac{\partial}{\partial v}\operatorname{grad}_\Sigma\rho - \rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}\cdot\sigma\boldsymbol{v} - \rho\sigma^2\boldsymbol{v}\right\} -$$

$$-4\pi f\left\{-\frac{\partial}{\partial v}(\rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}) - A_v\frac{\partial\rho}{\partial v} + T_v\frac{\partial\rho}{\partial u}\right\}\boldsymbol{n},$$

e infine

$$(22_6)\qquad \left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{nn} = \varphi\boldsymbol{n} = -4\pi f\left\{-\operatorname{grad}_\Sigma(\rho\operatorname{div}\boldsymbol{n}) - \sigma\operatorname{grad}_\Sigma\rho + \right.$$

$$\left. + (\rho I_1\sigma^2 - \Delta_2\rho + \rho(\operatorname{div}\boldsymbol{n})^2)\boldsymbol{n}\right\}.$$

(2) Effettivamente applicando $\left[\frac{d\xi}{dP}\right]$ a $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$ si ottiene:

$$\left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{vu} = -4\pi f\left\{\rho\frac{\partial A_u}{\partial v} - 2T_v\frac{\partial\rho}{\partial u} + A_u\frac{\partial\rho}{\partial v}\right\}\boldsymbol{u} - 4\pi f\left\{\rho\frac{\partial T_u}{\partial v} + 2T_u\frac{\partial\rho}{\partial v} + A_v\frac{\partial\rho}{\partial u}\right\}\boldsymbol{v} -$$

$$-4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - 2T_u\operatorname{div}\boldsymbol{n}\right\}\boldsymbol{n},$$

che coincide con $\left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{uv}$ se si tiene conto che è $\frac{\partial A_u}{\partial v} = -\frac{\partial T_v}{\partial u}$; $\frac{\partial A_v}{\partial u} = \frac{\partial T_u}{\partial v}$ come si vede facilmente osservando che le formule precedenti equivalgono a $\frac{d\sigma}{dP} = k\frac{d\sigma}{dP}$ che è vera perchè σ è la derivata di un vettore. Cfr. *A. V. G.*, I, p. 164.

Se ora, fissato un generico punto P di Σ, consideriamo tre assi cartesiani fissi x, y, z paralleli ai versori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}$ relativi al punto P, è ad esempio: $\boldsymbol{v}\left[\frac{d\xi}{dP}\right]\boldsymbol{un} = \boldsymbol{v}\left[\frac{d^2\,\mathrm{grad}\,U}{dP^2}\right]\boldsymbol{un} = \boldsymbol{v}\left[\frac{\partial^2\,\mathrm{grad}\,U}{\partial u\,\partial n}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial n}\right]$ convenendo di scrivere ancora u, v, n al posto di x, y, z. Le formule (22_1)–(22_6) ci permettono allora di scrivere esplicitamente le espressioni delle discontinuità di tutte e dieci le derivate terze di U attraverso Σ. Il risultato è il seguente:

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^3}\right] = -4\pi f\left\{\rho\frac{\partial A_u}{\partial u} + 3A_u\frac{\partial\rho}{\partial u}\right\}\quad;\quad \left[\frac{\partial^3 U}{\partial v^3}\right] = -4\pi f\left\{\rho\frac{\partial A_v}{\partial v} + 3A_v\frac{\partial\rho}{\partial v}\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial n}\right] = -4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \rho\,(T_u^2 + 2A_u^2 + A_u A_v)\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial v^2\,\partial n}\right] = -4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \rho\,(T_v^2 + 2A_v^2 + A_u A_v)\right\};$$

(23)
$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial n}\right] = -4\pi f\left\{\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - 2\rho T_u\,(A_u + A_v)\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial v}\right] = -4\pi f\left\{A_u\frac{\partial\rho}{\partial v} + 2T_u\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial T_u}{\partial u}\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial v^2\,\partial u}\right] = -4\pi f\left\{A_v\frac{\partial\rho}{\partial u} - 2T_v\frac{\partial\rho}{\partial v} - \rho\frac{\partial T_v}{\partial v}\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial n^2\,\partial u}\right] = -4\pi f\left\{-\frac{\partial}{\partial u}\{\rho\,(A_u + A_v)\} - A_u\frac{\partial\rho}{\partial u} - T_u\frac{\partial\rho}{\partial v}\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial n^2\,\partial v}\right] = -4\pi f\left\{-\frac{\partial}{\partial v}\{\rho\,(A_u + A_v)\} - A_v\frac{\partial\rho}{\partial v} - T_u\frac{\partial\rho}{\partial u}\right\};$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial n^3}\right] = -4\pi f\left\{2\,(A_u^2 + A_v^2 + A_u A_v + T_u^2) - \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}\right\}.$$

Come si vede, anche qui come per le derivate seconde, tutte le derivate sono in generale discontinue e nella espressione delle loro discontinuità figurano non solo le curvature della superficie, ma anche le loro derivate. Anche se la superficie è omogenea e ci si riferisce alle direzioni principali di Σ uscenti da P, spariscono le discontinuità delle derivate tangenziali miste, ma non le altre, almeno in generale. In particolare, se la superficie è piana, oltre che omogenea, le curvature e le torsioni sono identicamente nulle, e quindi tutte le discontinuità delle derivate seconde e terze spariscono.

4. Applicando le (23) al caso di una superficie sferica omogenea di raggio R si trova

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^3}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial v^3}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial v}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial v^2\,\partial u}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial n}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial u}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial v}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^2\,\partial u}\right] = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial v^2\,\partial u}\right] = \frac{12\pi f\rho}{R^2}\quad,\quad \left[\frac{\partial^3 U}{\partial u^3}\right] = -\frac{24\pi f\rho}{R^2}.$$

È facile rilevare, poichè internamente alla superficie sferica il potenziale è costante, che i primi membri delle relazioni ora scritte sono le derivate terze del potenziale relativo ai punti esterni alla sfera valutate in superficie. Ciò si può verificare facilmente in modo diretto.

Un altro esempio è dato dal potenziale di un rettangolo omogeneo. Il rettangolo rientra come caso particolare di superficie piana omogenea nel caso considerato alla fine del numero precedente. Tutte le discontinuità delle derivate seconde e terze sono nulle, ciò che si verifica agevolmente per via diretta. Infatti se a e b sono i suoi lati e il punto potenziato P si trova sulla normale al rettangolo passante per uno dei suoi vertici, detta z la distanza di P dal rettangolo, d_1 e d_2 le distanze di P dai vertici adiacenti, d_3 quella dal vertice opposto, tale potenziale è dato da

$$U = f\rho \{ b \log (a + d_3)/d_2 + a \log (b + d_3)/d_1 - z \operatorname{arctg} (ab)/(zd_3) \} \text{ (3)}.$$

Il potenziale in un punto tale che la normale per esso alla lamina la incontri in un punto interno o sul contorno, è rispettivamente la somma di quattro e due funzioni di questo tipo. Si constata facilmente in modo diretto quanto si è affermato poco sopra.

Importa osservare che sul contorno o in un vertice, la discontinuità della derivata prima normale diventa rispettivamente la metà e la quarta parte di quella relativa ai punti interni del rettangolo. Ciò è conseguenza di una proprietà di carattere più generale che si può facilmente stabilire.

5. Sia P′ un punto del contorno di una lamina materiale che supporremo dapprima piana e omogenea. In generale sia P′ un punto angoloso e $\alpha \geqq 0$, $0 \leqq \alpha < 2\pi$, sia l'angolo formato dalle due tangenti in P′ al contorno e interno alla superficie. Se $\alpha = 0$, P′ è una cuspide, per $\alpha = \pi$ è un punto regolare, mentre a seconda che $\alpha < \pi$ o $\alpha > \pi$ P′ è un punto angoloso saliente verso l'esterno o verso l'interno della superficie. Con centro in P′ e raggio ε costruiamo un cerchio che taglia sulla superficie Σ un elemento Σ'. Per il calcolo delle discontinuità del potenziale attraverso P′ basta occuparsi del potenziale generato in un punto P della normale alla lamina in P′ da Σ'. Osserviamo poi che il potenziale generato da una distribuzione omogenea di masse nel settore Σ'' limitato dalle due tangenti in P′ e dal contorno della circonferenza e quello generato da Σ' differiscono per infinitesimi di ordine superiore al primo in ε. Se si immagina poi una distribuzione omogenea di masse con la densità ρ della lamina entro la circonferenza, per simmetria il potenziale U''' generato in un punto della normale in P′ a Σ' dal settore Σ'' è legato a quello U' generato dall'intero disco dalla relazione $U''' = \frac{\alpha}{2\pi} U'$.

(3) Cfr. ad esempio O. D. KELLOG, *Foundations of potential theory*. (Berlino. 1929), p. 57.

Ne viene che se Φ' è una qualsiasi delle derivate di U' discontinua attraverso P' e Φ la corrispondente derivata di U, sussiste la relazione

$$[\Phi'] = \frac{\alpha}{2\pi}[\Phi]. \tag{24}$$

Se la lamina non è omogenea, ammesso che la densità sia funzione continua in P', si ottiene subito che il potenziale generato da una distribuzione omogenea di masse su Σ' con la densità ρ' assunta da ρ in P', differisce da quello effettivo per infinitesimi di ordine superiore al primo in ε, ed è quindi ancora valida la formula (24).

Se infine la superficie materiale non è piana, ma è tale che il piano tangente ad essa nei suoi punti P'' tende ad un limite unico quando P'' tende comunque a P', si dimostra ancora facilmente la validità della (24).

Se in questa si fa in particolare $\alpha = \pi$ si ottiene che la discontinuità delle derivate del potenziale in un punto regolare del contorno dello strato è la metà di quello che si avrebbe se il punto fosse interno alla superficie. Cosa questa che avevamo già constatato in modo diretto nel caso del rettangolo.

Meccanica. — *Moti alla Cardano di un bipendolo.* Nota (*) di P. G. BORDONI, presentata dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMESSA. – Fin dal secolo scorso (1) è stato messo in evidenza che un bipendolo [cfr. fig. 1] può essere suscettibile di moti *rigidi*, nei quali, ad ogni istante, sia

$$\varphi = \varphi_1. \tag{1}$$

Per questo occorre e basta che i parametri geometrici e meccanici dei due pendoli siano legati dalla relazione

$$a = \frac{l - l_1}{1 + \frac{m_1}{m}\frac{l_1 - s_1}{s}}. \tag{2}$$

Riprendendo in esame il problema si è riconosciuto che l'aggiunta alla (2) dell'ulteriore relazione strutturale

$$\frac{m}{m_1} = \frac{s_1 - a}{s} \tag{3}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1948.

(1) W. VELTMANN, *Ueber die Bewegung einer Glocke*. «Dingler's polyt. Journal», vol. 220, p. 481 (1876).

permette anche moti d'insieme nei quali, in certo modo, è massimo il moto relativo dei due pendoli, in quanto essa fa sì che ad ogni istante sia

$$\varphi = -\varphi_1 \tag{4}$$

non appena inizialmente si abbia $\varphi = -\varphi_1$ e $\varphi = -\dot{\varphi}_1$.

Il verificarsi della (4) dà luogo [v. n. 2] a diverse particolarità del moto che interessano sia sotto l'aspetto cinematico, in quanto il moto del secondo pendolo è allora evidentemente un moto alla Cardano, sia sotto l'aspetto dinamico, in quanto è costantemente nullo il momento della quantità di

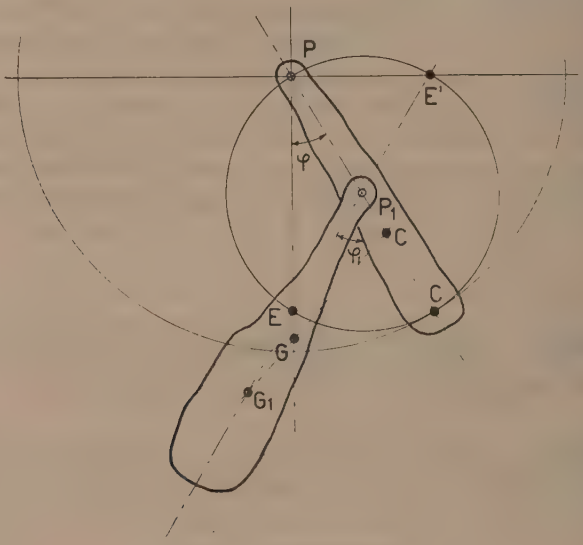


Fig. 1. – Bipendolo.

φ, φ_1 anomalie rispetto alla verticale; P, P_1 punti di sospensione; G, G_1 baricentri dei due pendoli; $\bar{G}$ baricentro del sistema; $|P, P_1| = a$, $|PG| = s$, $|P_1 G_1| = s_1$; ϱ, ϱ_1 = raggi di girazione; l, l_1 = lunghezze equivalenti; m, m_1 = masse; C centro istantaneo di rotazione.

moto dell'intero sistema, rispetto ad un asse normale al suo piano e passante per il punto fisso di sospensione; inoltre il baricentro del sistema appartiene sempre alla verticale passante per il punto fisso.

L'integrazione dell'equazione del moto dà luogo ad un integrale iperellittico, che può essere ricondotto ad un integrale ellittico di terza specie in un caso fisicamente interessante; si ottiene così incidentalmente la soluzione di un problema proposto da Eulero, e relativo al moto di un pendolo che abbia quale asse di sospensione l'asse di un cilindro circolare omogeneo vincolato a rotolare senza strisciare su di un piano orizzontale.

Si è inoltre attuato un bipendolo che soddisfa alle condizioni strutturali (2), (3), verificando sperimentalmente la possibilità di entrambi i moti (1) e (4), in corrispondenza ad opportune condizioni iniziali.

2. Giustificazione della 3. – Le equazioni del moto del bipendolo hanno la forma [2]

$$(5)\quad \begin{cases} (m\rho^2 + m_1 a^2)\,\ddot{\varphi} + m_1 a s_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + m_1 a s_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi - \varphi_1) = \\ \qquad -g(ms + m_1 a)\sin\varphi \\ m_1 \rho_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 a s_1 \ddot{\varphi}\cos(\varphi - \varphi_1) - m_1 a s_1 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \varphi_1) = -g m_1 s_1 \sin\varphi_1 \end{cases}$$

ed hanno come necessaria conseguenza l'integrale della forza viva:

$$(6)\quad (m\rho^2 + m_1 a^2)\,\dot{\varphi}^2 + m_1 \rho_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 m a s_1 \dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi - \varphi_1) - \\ - 2g(ms + m_1 a)\cos\varphi - 2 g m_1 s_1 \cos\varphi_1 = \mathrm{E}.$$

Supposto che inizialmente sia $\varphi = \varphi_1$ e $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$, perchè ad ogni istante sussista la (1), occorre e basta che si abbia

$$(7)\quad \frac{ms + m_1 a}{m_1 s_1} = \frac{m\rho^2 + m_1 a^2 + m_1 a s_1}{m_1 \rho_1^2 + m_1 a s_1}.$$

Questa relazione si traduce nella (2) non appena si facciano intervenire le lunghezze equivalenti dei pendoli $l = \rho^2/s$ e $l_1 = \rho_1^2/s_1$.

Supposto invece che inizialmente sia $\varphi = -\varphi_1$ e $\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_1$, perchè ad ogni istante sussista la (4), occorre e basta che si abbia

$$(8)\quad ms + m_1 a = m_1 s_1 \quad , \quad m\rho^2 + m_1 a^2 = m_1 \rho_1^2.$$

Questo sistema non differisce evidentemente da quello che si ottiene aggiungendo alla (2) la (3).

Le condizioni strutturali (8) relative ai moti del tipo (4) hanno un importante significato meccanico: la (8_I) non differisce dalla condizione che il baricentro $\overline{G}$ dell'intero bipendolo si muova sulla verticale per P; la (8_{II}) esprime l'annullarsi del momento $\overline{K}_z$ delle quantità di moto dell'intero bipendolo rispetto ad un asse z normale al piano del moto e passante per P.

Si ha infatti, per qualsiasi moto e per qualsiasi bipendolo, con evidente significato dei simboli

$$\overline{K}_P = K_P + K_{1,P} = K_P + K_{1,P_1} + PP_1 \wedge m_1 \boldsymbol{v}_{G_1}$$

nonchè

$$K_{1,P_1} = m_1 PG_1 \wedge \boldsymbol{v}_{P_1} + K^*_{1,P_1}$$

e

$$PP_1 \wedge \boldsymbol{v}_{G_1} + P_1 G_1 \wedge \boldsymbol{v}_{P_1} = PP_1 \wedge \boldsymbol{v}_{P_1} + PP_1 \wedge (\omega_1 \wedge P_1 G_1) + \\ + P_1 G_1 \wedge (\omega \wedge PP_1) = \omega a^2 + (\omega_1 + \omega)\, PP_1 \times PG_1;$$

onde risulta

$$\overline{K}_P = K_P + K^*_{1,P_1} + m_1 \omega a^2 + m_1 (\omega_1 + \omega)\, PP_1 \times P_1 G_1$$

e proiettando sull'asse z

$$\overline{K}_z = m\rho^2 \dot{\varphi} + m_1 \rho_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_1 \dot{\varphi} a^2 + m_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi})\, PP_1 \times PG_1.$$

[2] Cfr. ad esempio: Levi Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, parte 1ª, p. 19 e sgg., Bologna, Zanichelli (1927).

Per un moto del tipo (4) l'espressione di $\bar{K}_z$ si riduce quindi a

$$\bar{K}_z = \dot{\varphi}\{m\rho^2 + m_1 a^2 - m_1 \rho_1^2\}$$

che è appunto identicamente zero per la (8_{II}).

Essendo sempre $l_1 \geqq s_1$, la (2) e la (3) rendono evidente

$$l > l_1 \geqq s_1 > a$$

ed eliminando m/m_1 tra (2) e (3) si trova

$$l - a = \frac{s_1}{a}(l - l_1).$$

Le condizioni (2), (3) possono essere soddisfatte anche per due pendoli semplici, quando cioè sia $s = \rho = l$, e $s_1 = \rho_1 = l_1$; in questo caso si trova

$$(10) \qquad a = l - l_1, \qquad \frac{m}{m_1} = \frac{l - 2a}{l}.$$

Va però osservato che la sospensione dei pendoli non può essere realizzata con fili flessibili, perchè la reazione in P, per la (8_I) deve essere diretta verticalmente.

3. Equazioni del moto e calcolo del periodo. – Mi limito ormai allo studio dei moti del tipo (4) aventi carattere oscillatorio, ammettendo che per $t = 0$ sia $\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_1 = 0$, insieme a $\varphi = -\varphi_1 = \vartheta < \pi$. In queste condizioni l'integrale delle forze vive dà subito luogo a

$$(11) \qquad t = \sqrt{\frac{8\beta}{\gamma}} \int \frac{\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{8\beta} + k^2 \sin^2 x - k^4 \sin^4 x}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}\, dx$$

dove:

$$\alpha = m_1 \rho_1^2 = m\rho^2 + m_1 a^2$$

$$\beta = m_1 a s_1$$

$$\gamma = g m_1 s_1 = g(ms + m_1 a)$$

$$k = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

$$x = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{k}\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

La (11), estesa tra 0 e 2π dà il periodo delle oscillazioni; in essa figurano sotto il segno di integrale soltanto due parametri: α β 8β che riassume, per così dire, tutte le proprietà del bipendolo, e k che caratterizza l'ampiezza delle oscillazioni, è quindi possibile raccogliere in una tabella a doppia entrata i valori del periodo di tutti i possibili bipendoli, che ammettono moti del tipo A. La curva della fig. 2 indica a titolo di esempio, le variazioni

del periodo in funzione dell'ampiezza delle oscillazioni [3] per un valore 0,125 del parametro $(\alpha - \beta)/8\beta$ [4].

L'integrale iperellittico che figura nella (11) si semplifica, riducendosi ad un integrale ellittico di 3ª specie nel caso in cui le oscillazioni sono di ampiezza modesta $[k^2 \leqslant (\alpha - \beta)/8\beta]$ ma non necessariamente così piccole come quelle che si considerano nella teoria elementare, ed inoltre quanto è $(\alpha - \beta)/8\beta > 1$.

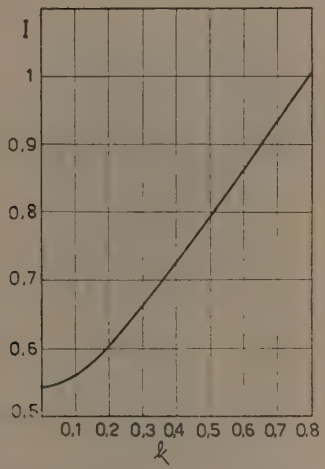


Fig. 2. – Periodo di oscillazione del bipendolo per $\varphi = -\varphi_1$ $\left(\text{a meno del fattore } 4\sqrt{\frac{8\beta}{\gamma}}\right)$ in funzione dell'elongazione massima.

Nel primo caso ponendo $\mu^2 = 8\beta k^2/(\alpha - \beta)$ la (11) si riduce a:

$$t = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\gamma}} \int \frac{\sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 x}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}\, dx \tag{12}$$

che è identica all'integrale [5] cui si giunge nel problema, proposto da Eulero, delle oscillazioni di un pendolo che abbia come asse di sospensione l'asse di

(3) Tale calcolo è stato cortesemente eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, al cui direttore, prof. M. Picone, l'autore desidera esprimere la sua viva gratitudine.

(4) Si può osservare che il periodo delle piccole oscillazioni di un bipendolo che soddisfi alle (8) è diverso, secondo che il moto è del tipo (1) o del tipo (4). Nel primo caso $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\rho^2 + m_1 a^2 + m_1 a s_1}{g(ms + m_1 a)}}$, nel secondo $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\rho^2 + m_1 a^2}{g(ms + m_1 a)}}$.

(5) La soluzione di tale problema indicata da A. Denizot: *Ueber ein Pendelproblem von Euler*. « Zeits. fur Math. u. Phys », *46*, p. 471 (1901), è inesatta in seguito ad una svista nei calcoli relativi al cambiamento di variabile $\sin^2\psi = z$ operato nell'integrale

$$2f\sqrt{\frac{c}{g}} \int \frac{\left(1 + \frac{\varkappa^2}{f^2}\sin^2\psi\right)}{(1 - \varkappa^2\sin^2\psi)\left(1 + \frac{\varkappa^2}{f^2}\sin^2\psi\right)}\, d\psi$$

un cilindro circolare omogeneo, di raggio c (fig. 3) vincolato a rotolare senza strisciare su di un piano orizzontale. Il calcolo dell'integrale (12) dà quindi incidentalmente anche la soluzione di questo problema e di conseguenza delle equazioni del primo ordine del tipo $y'^2(a\cos y + b) = c\cos y + d$ delle quali sembra [6] nota soltanto la soluzione inesatta data nel lavoro precedentemente citato [5]. Tale calcolo può essere effettuato ponendo

$$\frac{1 - k^2 \sin^2 x}{1 + \mu^2 \sin^2 x} = 1 - \lambda^2 \sin^2 y \tag{13}$$

e scegliendo $\lambda^2 = (k^2 + \mu^2)/(1 + \mu^2)$; l'integrale (12) si riduce allora ad un integrale ellittico di terza specie, il quale, sviluppando il binomio

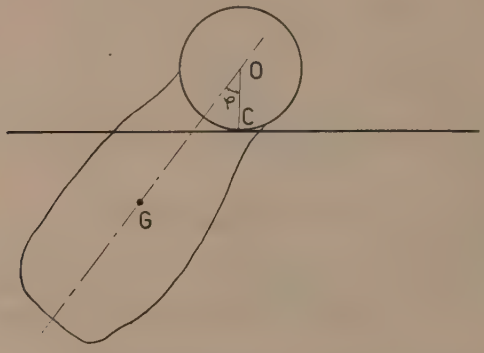


Fig. 3. – Pendolo di Eulero.

O asse; C centro istantaneo di rotazione; G baricentro; φ anomalia rispetto alla verticale; $|OG| = a$, $|OC| = C$, ϱ = raggio di girazione.

$\left(1 - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\sin^2 y\right)^{-1}$ che figura in esso, può essere ricondotto ad una somma di integrali del tipo $\int \frac{\sin^{2h} y}{\Delta}\, dy$ essendo Δ il radicale ellittico. Lo stesso si può fare nel caso in cui $(\alpha - \beta)/8\beta > 1$, e in definitiva si ottiene sempre t espresso da una serie di funzioni ellittiche di 1ª e 2ª specie.

4. Verifica sperimentale. – Le precedenti previsioni analitiche sono state controllate sperimentalmente attuando un bipendolo soddisfacente alle

l'integrale trasformato risulta infatti erroneamente moltiplicato per un fattore 7, che è conservato nei successivi sviluppi. Con i simboli della fig. 3, $\varkappa$ è il seno della semielongazione massima e $p^2 = \frac{\rho^2 + (a - c)^2}{4ac}$.

6) E. Kamke, *Differentialgleichungen*, Becker e Erler Ed., Leipzig, vol. I, p. 383 (1942), equazione 1.514.

condizioni strutturali trovate, e verificando che esso è suscettibile di moti del tipo (1) e del tipo (4) in corrispondenza ad opportune condizioni iniziali. Per semplicità si è scelto un sistema composto da due pendoli che possono essere considerati semplici con buona approssimazione (fig. 4), e si sono soddisfatte le condizioni (9) prendendo per a , l_1 , l valori proporzionali a 1, 3, 4 e per il rapporto $\frac{m}{m_1}$ delle masse il valore $\frac{1}{2}$.

Fig. 4. – Bipendolo sperimentale soddisfacente alle condizioni (10) con a , l_1 , l proporzionali a 1, 3, 4 e $m/m_1 = 1/2$.

La verifica è stata eseguita collegando ai due pendoli tre piccole lampadine con i filamenti collocati rispettivamente in E, E', C (fig. 1) e fotografandole durante il moto con un tempo di posa sufficientemente lungo, in modo da registrarne le traiettorie.

La fig. 5 *a* si riferisce al moto rigido dei due pendoli (condizioni iniziali $\varphi = \varphi_1$ e $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$); il punto E' resta immobile nel centro di rotazione P, mentre E e C sovrapposti descrivono un arco di cerchio di centro P.

La fig. 5 *b* si riferisce invece al moto alla Cardano del secondo pendolo (condizioni iniziali $\varphi = -\varphi_1$ e $\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_1$); i punti E' ed E descrivono rispettivamente (a parte le piccole deviazioni dovute ad inevitabili imperfezioni dell'apparato sperimentale) un segmento orizzontale ed un segmento verticale, mentre la traiettoria di C coincide con la base del moto.

Infine la fig. 5 *c* mostra a titolo di esempio le traiettorie dei punti E' e C relative a condizioni iniziali diverse, e precisamente a $\varphi = 0$, $\varphi_1 = \vartheta$, $\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_1 = 0$; in questo caso si osserva uno spiccato scambio di energia tra i due pendoli, e la traiettoria di E' è una curva intrecciata.

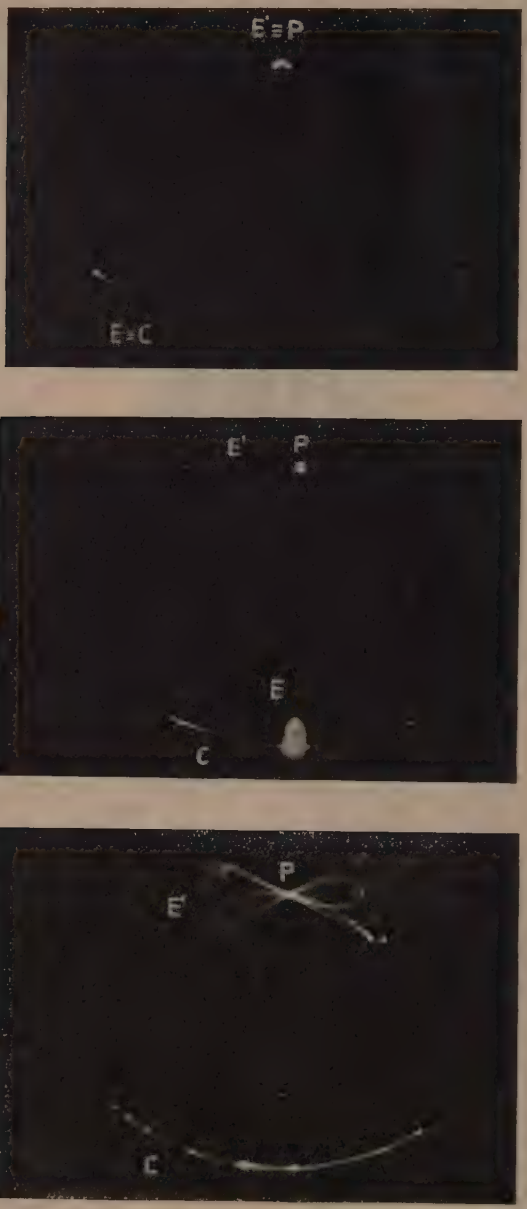


Fig. 5. – Verifiche sperimentali eseguite sul bipendolo della fig. 4.

a) m to rigido dei due pendoli; b) moto alla Cardano del secondo pendolo; c) traiettorie di E' e di C per le condizioni iniziali $\varphi = 0 \quad \varphi_1 = \vartheta$. $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 =$

Fisica. — *Guida d'onda dielettrica a sezione rettangolare compresa tra due piani metallici paralleli.* Nota (*) di R. MALVANO, presentata dal Socio E. PERUCCA.

1. Nel presente lavoro si studia la propagazione di un'onda elettromagnetica entro una guida dielettrica, a sezione rettangolare, compresa tra due piani metallici indefiniti e divisa dal mezzo circostante da superfici piane simmetricamente poste rispetto all'asse della guida (fig. 1).

Siano ε_1 μ_1 ε_2 μ_2 la permeabilità dielettrica e magnetica dei due mezzi dielettrici supposti perfetti. Scelto un sistema di coordinate cartesiane x, y, z orientate come in figura, si risolvono le equazioni dell'elettromagnetismo in regime permanente sinoidale di pulsazione $\omega = 2\pi f$, imponendo la condizione che le componenti del campo elettromagnetico si propaghino in direzione dell'asse z secondo l'operatore $e^{-j\beta z}$, essendo β la costante di fase, e che contemporaneamente soddisfino alle condizioni ai limiti imposte dalla presenza delle due superficie metalliche, supposte perfette.

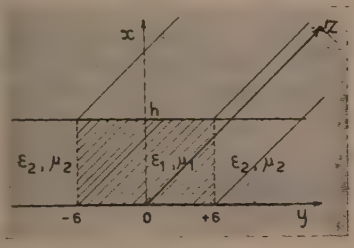


Fig. 1.

In queste condizioni le componenti del c. e. m. trasversali alla direzione di propagazione, hanno, nei due mezzi di natura diversa, le espressioni seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} E_x = -\dfrac{j}{k_i^2}\left(\omega\mu_i \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + \beta \dfrac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ E_y = -\dfrac{j}{k_i^2}\left(\omega\mu_i \dfrac{\partial H_z}{\partial x} - \beta \dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\ H_x = -\dfrac{j}{k_i^2}\left(\beta \dfrac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\varepsilon_i \dfrac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\ H_y = -\dfrac{j}{k_i^2}\left(\beta \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon_i \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right). \end{cases} \qquad (j = \sqrt{-1}) \qquad (i = 1, 2)$$

D'altra parte le componenti longitudinali E_z, H_z, che appaiono nelle (1) assumono nel mezzo I la forma:

$$(2)\qquad \begin{cases} E_z = (A_{11} \cdot \cos[\gamma_{y1} y] + A_{12} \cdot \sin[\gamma_{y1} y]) \cdot \sin(\gamma_x x) \\ H_z = (B_{11} \cdot \cos[\gamma_{y1} y] + B_{12} \cdot \sin[\gamma_{y1} y]) \cdot \cos(\gamma_x x) \end{cases}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1948.

mentre nel mezzo II, tenendo conto delle condizioni all'infinito, risultano, per $y \lessgtr 0$ rispettivamente:

$$(3)\qquad \begin{cases} E_z = \begin{pmatrix} A_{22} \\ A'_{22} \end{pmatrix} \cdot e^{\mp(\gamma_{y2} y)} \cdot \sin(\gamma_x x) \\ H_z = \begin{pmatrix} B_{22} \\ B'_{22} \end{pmatrix} \cdot e^{\mp(\gamma_{y2} y)} \cdot \cos(\gamma_x x) \end{cases}$$

dove:

$$(4)\qquad \gamma_x = n \cdot \frac{\pi}{b} \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

$$(5)\qquad \begin{cases} k_1^2 = n^2 \frac{\pi^2}{b^2} + \gamma_{y1}^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \beta^2 \\ k_2^2 = n^2 \frac{\pi^2}{b^2} - \gamma_{y2}^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \beta^2 . \end{cases}$$

Sostituendo le (2) (3) nelle (1) e imponendo la continuità delle componenti tangenziali E_x, E_z, H_x, H_z del campo elettricomagnetico attraverso le superficie di separazione tra i due mezzi dielettrici, definiti dalle equazioni $y = \pm b$, si ottiene un sistema di otto equazioni omogenee nelle variabili A_{11}, A_{12}, B_{11}, B_{12}, A_{22}, B_{22}, A'_{22}, B'_{22}, sistema che ammette soluzioni non nulle nel caso che sia nullo il determinante Δ dei coefficienti del sistema di equazioni.

2. Sviluppando il determinante Δ si giunge ad un'espressione, formata dal prodotto di due fattori, che, eguagliata a zero, dà origine a due condizioni possibili, corrispondenti ciascuna all'annullamento dell'uno o dell'altro dei due fattori costituenti il prodotto; si ha precisamente:

$$(6)\qquad \left(\mu_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{cotg}[\gamma_{y1} b] + \mu_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}\right)\left(\varepsilon_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{tg}[\gamma_{y1} b] - \varepsilon_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}\right) - n^2 \frac{\pi^2}{b^2}\left(\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{k_2^2}\right)\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right) = 0$$

$$(7)\qquad \left(\mu_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{tg}[\gamma_{y1} b] - \mu_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}\right)\left(\varepsilon_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{tg}[\gamma_{y1} b] + \varepsilon_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}\right) - n^2 \frac{\pi^2}{b^2}\left(\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{k_1^2} - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{k_2^2}\right)\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right) = 0.$$

La prima delle due relazioni sovrariportate vale nel caso in cui le costanti A_{11}, B_{12} siano identicamente nulle e quindi le componenti assiali E_z, H_z del campo elettrico e magnetico siano rispettivamente l'una funzione pari, e l'altra funzione dispari di y; la seconda espressione vale invece nel caso in cui siano nulle le costanti A_{12}, B_{11}, e quindi il comportamento analitico di E_z, H_z rispetto a y si scambia rispetto al caso precedente. Per mezzo delle relazioni (5), (6), (7), si riesce a determinare la relazione implicita che lega fra loro γ_{y1}, γ_{y2}, ω, β; le costanti A_{ij}, B_{ij} che appaiono nelle espressioni

delle componenti del campo elettromagnetico risultano infine legate, nei due casi, dalle relazioni seguenti:

I caso $(A_{12} = B_{11} = 0)$

$$(8) \qquad \frac{A_{22}}{A_{11}} = \frac{A'_{22}}{A_{11}} = \cos(\gamma_{y1} b) \cdot e^{(\gamma_{y2} b)}$$

$$(9) \qquad \frac{B_{22}}{A_{11}} = -\frac{B'_{22}}{A_{11}} = -\sin(\gamma_{y1} b) \cdot e^{(\gamma_{y2} b)}$$

$$(10) \qquad \frac{A_{11}}{B_{12}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{cotg}(\gamma_{y1} b) + \mu_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_1^2}}{\varepsilon_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{y1} b) - \varepsilon \cdot \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}}}$$

II caso $(A_{11} = B_{12} = 0)$

$$(8') \qquad \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{A'_{22}}{A_{12}} = -\sin(\gamma_{y1} b) \cdot e^{(\gamma_{y2} b)}$$

$$(9') \qquad \frac{B_{22}}{B_{11}} = \frac{B'_{22}}{B_{11}} = \cos(\gamma_{y1} b) \cdot e^{(\gamma_{y2} b)}$$

$$(10') \qquad \frac{A_{12}}{B_{11}} = \pm \sqrt{\frac{\mu_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{tg}(\gamma_{y1} b) - \mu_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}}{\varepsilon_1 \frac{\gamma_{y1}}{k_1^2} \cdot \operatorname{cotg}(\gamma_{y1} b) + \varepsilon_2 \frac{\gamma_{y2}}{k_2^2}}}.$$

3. Onde esaminare il comportamento delle (6), (7) è opportuno fare le seguenti posizioni:

$$(11) \qquad \theta = \gamma_{y1} b \;\; ; \;\; \eta = \gamma_{y2} b \;\; ; \;\; \varphi = n\pi \frac{b}{b} \;\; ; \;\; p = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 1$$

inoltre l'esame è limitato al caso di dielettrici normali, in cui può assumere:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

In questo modo le (6), (7) diventano:

$$(6') \qquad -\theta \cdot \operatorname{cotg}\theta = \begin{cases} f_1(\eta, \theta) \\ f_2(\eta, \theta) \end{cases} \qquad (7') \qquad \theta \cdot \operatorname{tg}\theta = \begin{cases} f_1(\eta, \theta) \\ f_2(\eta, \theta) \end{cases}$$

dove si è posto:

$$(12) \quad f_1(\eta, \theta) = \frac{1}{2\eta} \cdot \Big\{ [p(\eta^2 - \varphi^2) \cdot \frac{\theta^2 - \varphi^2}{\theta^2 + \varphi^2} - \frac{\eta^2 + \varphi^2}{\eta^2 - \varphi^2} \cdot (\theta^2 + \varphi^2) - \varphi^2 (p+1)] + \\ + \sqrt{[\cdots]^2 + 4\eta^2 \theta^2 p} \Big\}$$

$$(13) \quad f_2(\eta, \theta) = \frac{1}{2\eta} \cdot \Big\{ [p(\eta^2 - \varphi^2) \cdot \frac{\theta^2 - \varphi^2}{\theta^2 + \varphi^2} - \frac{\eta^2 + \varphi^2}{\eta^2 - \varphi^2} \cdot (\theta^2 + \varphi^2) - \varphi^2 (p+1)] - \\ - \sqrt{[\cdots]^2 + 4\eta^2 \theta^2 p} \Big\}.$$

Onde risolvere le (6'), (7') è opportuno riportare su uno stesso grafico in funzione di θ, $-\theta \cdot \operatorname{cotg}\theta$, $\theta \operatorname{tg}\theta$ e le due famiglie di curve che si ottengono tabulando per vari valori di η le funzioni $f_1(\eta, \theta)$, $f_2(\eta, \theta)$: i punti di intersezione determinano i valori di η, θ, corrispondenti, proprii delle quattro famiglie di regimi elettromagnetici. In figura 2 sono mostrate le due famiglie di curve e sono messi in evidenza i vari punti di intersezione.

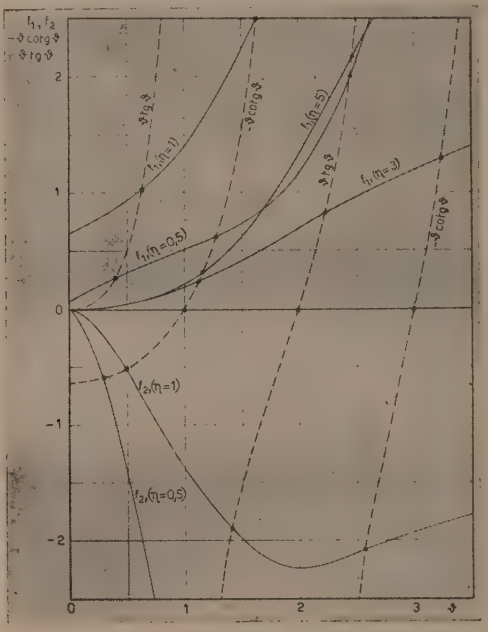


Fig. 2.

L'andamento asintotico delle due famiglie di curve rappresentative delle relazioni (12), (13), è sostanzialmente diverso a seconda che il parametro η sia minore o maggiore di φ: per $\eta < \varphi$ si ha infatti:

$$\lim_{\theta \to \infty} f_1(\eta, \theta) = +\infty \quad ; \quad \lim_{\theta \to \infty} f_2(\eta, \theta) = 0$$

mentre per $\eta > \varphi$ si ha:

$$\lim_{\theta \to \infty} f_1(\eta, \theta) = 0 \quad ; \quad \lim_{\theta \to \infty} f_2(\eta, \theta) = -\infty$$

Al variare di η da zero all'infinito si ottengono tutte le infinite curve che appartengono alle due famiglie.

Per $\eta \to \varphi$, crescendo, le due funzioni in esame tendono rispettivamente $f_1(\eta, \theta)$ alla retta all'infinito $\nu = +\infty$, $f_2(\eta, \theta)$ all'asse delle ascisse; mentre per $\eta \to \varphi$, decrescendo, esse tendono rispettivamente all'asse delle ascisse ed alla retta all'infinito $\nu = -\infty$. La discontinuità analitica che si

ritrova nelle (12), (13) per $\eta \to \varphi$ ha la sua ragione fisica nel comportamento ibrido, di guida d'onda insieme metallica e dielettrica, del sistema in esame: infatti dalle (5), tenendo conto delle (11) si ottiene:

$$(14) \qquad 4\pi^2 \frac{b^2}{\lambda_2^2}(p-1) = \theta^2 + \eta^2 \quad ; \quad 4\pi^2 \frac{b^2}{\Lambda^2}(p-1) = \theta^2 + p\eta^2 - \varphi^2(p-1)$$

dove con λ_2 , Λ si sono indicate rispettivamente la lunghezza d'onda corrispondente alla velocità della luce nel mezzo esterno e la lunghezza d'onda di propagazione lungo l'asse z del sistema. Ponendo nelle (14) $\eta = \varphi$ si giunge

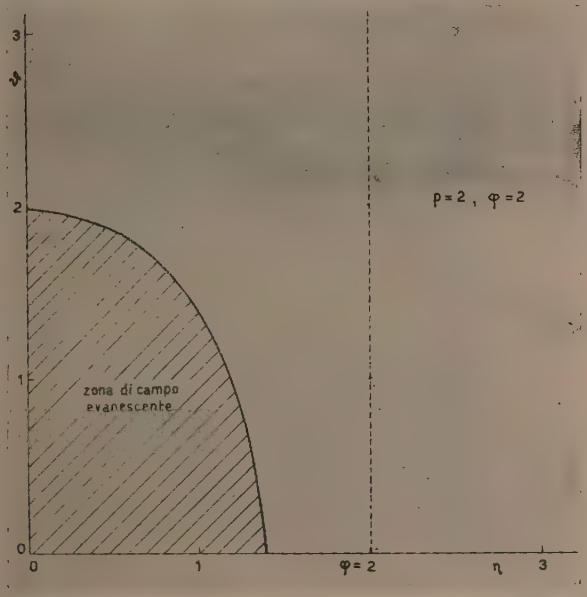


Fig. 3.

alla relazione: $\lambda_2 = \Lambda$, cioè in questo caso la velocità di fase lungo l'asse del sistema coincide con la velocità della luce nel mezzo esterno.

Analogamente per $\eta < \varphi$, $\lambda_2 < \Lambda$ ed il regime di propagazione risulta analogo a quello che si ha in una guida metallica chiusa, mentre per $\eta > \varphi$, $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ e quindi la propagazione è propria di una guida interamente dielettrica.

Si noti ancora che la propagazione di energia ondulatoria può avvenire soltanto se è soddistatta la relazione:

$$(15) \qquad \theta^2 + p\eta^2 \geqq \varphi^2(p-1)$$

la quale determina nel piano η , θ una regione finita in cui non vi può essere propagazione ma soltanto si può stabilire un campo elettromagnetico evanescente (fig. 3): quindi, dato che sia λ_2 sia θ sono funzioni di η, la (15) fissa

il limite superiore della lunghezza d'onda λ_{20} (lunghezza d'onda di taglio), oltre il quale cessa ogni propagazione di energia.

Come si desume cercando i valori limiti di f_1, f_2, per $\eta = 0$ risulta:

$$\theta = m\,\frac{\pi}{2} \qquad (m = 0, 1, 2\cdots) \tag{16}$$

sostituendo la (16) nella prima delle (14) si ottiene infine $\left|\lambda_2 = \frac{4b}{m}\sqrt{p^2 - 1}\right|_{\eta=0}$, che rappresenta il limite superiore di lunghezza d'onda per cui si ha trasmissione di energia ondulatoria unicamente lungo l'asse z del sistema, e rappresenta pertanto una seconda lunghezza d'onda di taglio λ'_{20}, di significato

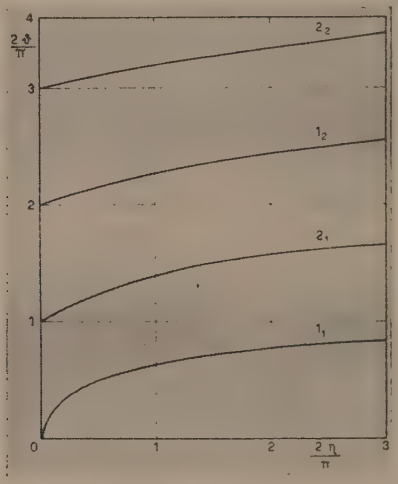


Fig. 4.

fisico diverso, legata alla natura dielettrica della guida; a seconda del valore di m e di φ si ha: $\lambda_{20} \lessgtr \lambda'_{20}$.

In modo analogo si desume che per $\eta \to \infty$ risulta:

$$\theta = m' \cdot \frac{\pi}{2}\,. \tag{17}$$

Tenendo conto della (17) e passando nella (14) al limite per $\eta \to \infty$ si dimostra che la velocità di propagazione al crescere della frequenza tende a coincidere con la velocità della luce nel mezzo a permeabilità dielettrica maggiore.

4. Nel caso in cui sia $\varphi = 0$ esistono soltanto le componenti del c. e. m. H_z, E_x, E_y. Le (12), (13) si semplificano divenendo:

$$f_1(\cdots) = p\eta \quad ; \qquad f_2(\cdots) = -\frac{\theta^2}{\eta}\cdot \tag{18, 19}$$

Delle due relazioni è utile soltanto la (19), che introdotta nelle (6'), (7') dà luogo alle espressioni:

$$(20) \qquad \operatorname{tang}\theta = -\frac{\theta}{\eta} \quad ; \qquad (21) \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\eta}{\theta}$$

mentre il particolare andamento del campo elettromagnetico ($E_z = H_x = H_y = 0$) fà si che in questo caso le relazioni che si ricavano dalla (18) risultano identicamente soddisfatte.

La (20) è compatibile con una configurazione di campo in cui la componente assiale del campo magnetico è funzione pari di γ ($B_{12} = 0$) la (21) con una configurazione di campo in cui detta componente è funzione dispari ($B_{11} = 0$).

La lunghezza d'onda di taglio λ_{20} ha in questo caso un valore infinito, e pertanto si può avere trasmissione di energia ondulatoria per qualunque valore della frequenza; λ'_{20} risulta invece, in generale finita, eccetto per il regime fondamentale 1_1, corrispondente al caso di H_z funzione dispari di γ. Nella figura 4 sono riportate nel piano η, θ varie curve corrispondenti ai primi due regimi sia per il caso dispari (1_1, 1_2) sia per il caso pari (2_1, 2_2).

Ringrazio il prof. M. Deaglio per l'interesse con cui ha seguìto il presente lavoro.

Chimica (Chimica Fisica). — *Sulla molecola dell'acido butirrico normale e sul legame idrogeno.* Nota (*) di M. Freri, presentata dal Corrisp. L. Amerio.

Ho potuto di recente dimostrare (1), in base all'assorbimento anomalo nell'ultrarosso vicino, che l'acido butirrico normale ha la formula doppia (C_3H_7COOH)$_2$ e che le due molecole sono unite a traverso due ponti-idrogeno tra un idrogeno dell'una e l'ossigeno carbonilico dell'altra; tale conclusione è in armonia con le esperienze di altri sperimentatori, i quali hanno riferito che l'aumento di intensità delle bande di assorbimento, coincide con l'associarsi di molecole (2), il che avviene frequentemente per effetto dell'aumento di temperatura, come è stato verificato con misure di viscosità, di densità di vapore, ecc. ecc.

L'ammettere che la molecola dell'acido butirrico è doppia, contribuisce a spiegare qualche anomalia, che fino ad ora non aveva trovato chiarimento adeguato: prima fra esse l'elevata costante di dissociazione rispetto ai termini che lo precedono ed a quelli che lo seguono nella serie omologa.

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1948.

(1) « Gazz. Chimica », *78*, 286 (1948).

(2) Gillette e Daniels, « J. Am. Chem. Soc. », *58*, II, 1135 (1936).

Anche le reazioni chimiche recano le tracce di tale stato di cose: da poco Chavane e Rumpf [3] hanno fatto reagire il dietilmonofosfito di sodio sopra gli eteri α-alogenati di alcuni acidi grassi: l'α bromobutirrato di etile forma, sotto la sua influenza, i due stereoisomeri dell'acido dietilsuccinico. Questa è una vera sintesi di Wurtz per la quale basta, qui, un semplice sale di sodio, e che trova felice riscontro in un lavoro di Hell e Mülhaüser [4], i quali, facendo reagire l'argento polverizzato sull'etere α-bromobutirrico all'ebollizione, prepararono, tra l'altro, l'acido dietilsuccinico. Sia nel primo che nel secondo caso gli autori hanno osservato che la reazione non avviene con gli altri acidi grassi. Non sembra che basti invocare la mobilità dell'atomo di idrogeno in α, occorre tener presente che l'associazione molecolare è più salda che negli altri termini.

E devo ancora ricordare la bella esperienza di Paternò [5], il quale riferì che l'acido butirrico, in presenza di benzofenone, e per azione dei raggi solari, si trasforma in parte in butirrato di propile, con sviluppo di anidride carbonica: il chimico siciliano spiegò la formazione dell'etere paragonando tale sintesi a quella che avviene sotto l'azione della corrente elettrica: l'acido butirrico infatti, si trasforma non solo in esano ed in propilene, ma anche in alcool propilico, il quale può reagire per suo conto formando del butirrato di propile [6]: il fatto realmente notevole è che, sotto l'energico impulso della corrente elettrica, tutti gli acidi grassi si scompongono secondo lo schema predetto [7], e tuttavia essi rimangono inerti di fronte al benzofenone sotto l'azione della luce: l'eterificazione si compie solo sull'acido butirrico, e qui possiamo trovare una riprova dell'avere questo composto formula doppia.

Ma vi è ancora qualche cosa da chiarire sulla configurazione della catena; il prof. G. Bruni, nella serie di ricerche sulle « Soluzioni solide e sostanze isomorfe », ebbe a dimostrare, tra l'altro, che l'acido butirrico forma soluzioni solide con l'acido crotonico p. f. 72° e non con l'acido isocrotonico [8], e concludeva che entrambi avevano la configurazione trans. Qualche anno di poi questo scienziato ritornava sull'argomento [9], e scriveva che le sue esperienze dimostravano senz'altro che acido succinico, acido fenilpropionico, dibenzile, avevano la stessa configurazione dell'acido crotonico solido, la quale doveva essere anche quella dell'acido butirrico normale, che dava le medesime anomalie crioscopiche. Egli stesso osservava con meraviglia che la forma trans della molecola era comprensibile per i primi tre composti menzionati avendo essi i gruppi terminali $(COOH$ e C_6H_5 entrambi forte-

(3) « Compt. rend. », *255*, 1322 (1947).

(4) « Berichte », VI, 28 (1862).

(5) Questi « Rendiconti », XXIV, I, 674 (1915).

(6) Denina, « Gazz. Chim. It. », *68*, 443 (1938) ed anche J. Hamonet, « C. R. », *123*, 252 (1896).

(7) Fr. Fichter, *Organische Elektrochemie*, p. 39 e sg. Steikopf, Lipsia, 1942.

(8) G. Bruni ed F. Gorni, questi « Rendiconti », 1° sem., 454 (1899).

(9) Questi « Rendiconti », 1° sem., 630 (1904).

mente negativi, meno comprensibile per l'acido butirrico, il quale termina con un carbossile ed un metile, di spiccate proprietà positive.

Jenkins e Dippy [10] riprendendo in esame il problema della configurazione degli acidi grassi, in base a misure e confronti della loro conducibilità, hanno concluso che la catena butirrica ha forma cis: se vi poteva essere incertezza tra questo importante studio e l'esperienza di Bruni, oggi però l'incertezza scompare del tutto: dovendo infatti ammettere che l'acido butirrico esiste in aggregati bimolecolari, in cui le due molecole, sono unite a traverso l'idrogeno in α, osserviamo che proprio la forma trans, riconosciuta

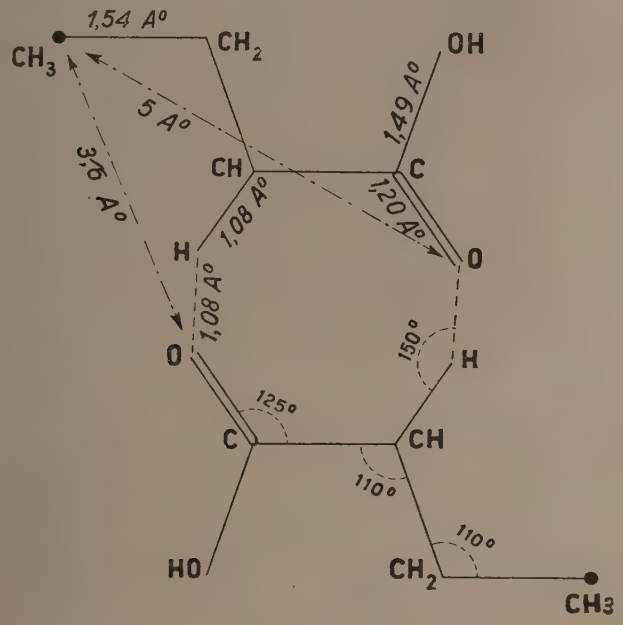


Fig. 1.

dal Bruni mezzo secolo fa, è quella che si accorda con l'insolita stabilità del complesso.

Nella figura, lo schema dell'acido butirrico è stato tracciato tenendo conto dei dati della letteratura raccolti da H. Stuart [11]; come distanza H···O, ho scelto, in via di prima approssimazione, quella di 1,08 Å, eguale cioè alla distanza C—H; l'atomo dell'idrogeno si troverebbe al vertice di un angolo di 150° [12].

In tale maniera si costruisce un poligono che si avvicina assai all'ottagono regolare, ed in cui il gruppo CH_3 di ciascuna molecola, dista di quasi

(10) « Journ. of the Am. Chem. Soc. », *62*, 483 (1940).

(11) H. STUART, *Molekülstruktur*, p. 79 e sg., Springer, Berlino, 1934.

(12) Vedi il capitolo: *The Hydrogen Bond* in L. PAULING, *The nature of chemical Bond*. « The Cornell University Press », Ithaca, New York (1945).

5 Å dall'ossigeno carbonilico della propria catena, e di soli 3,6 Å da quello della catena accoppiata: unicamente la configurazione trans può favorire tale posizione di equilibrio, in cui il metile di una è attirato dal carbonile dell'altra molecola. La forma simmetrica del complesso in cui i gruppi ad effetto induttivo positivo e negativo si inseguono alterni, dà risalto al fatto che l'acido butirrico ha dipolo nullo in benzolo [13].

Per quel che riguarda l'idrogeno (per semplicità ne consideriamo un atomo solo) attaccato all'atomo di carbonio in α, basta ricordare le considerazioni che Pauling [14] fa di recente sopra l'acido cianidrico, per constatare che non vi è affatto incompatibilità tra un eccesso di positività dell'atomo di carbonio ed una maggior mobilità del suo atomo di idrogeno; l'affermazione che l'idrogeno assuma proprietà negative, sembra insostenibile: è più probabile che, a causa appunto della influenza dell'atomo di carbonio che tende a respingere elettroni lungi da sè, l'atomo di idrogeno si trovi in un particolare stato di instabilità per cui diventano in lui comparabili le due tendenze opposte; quella di perdere il proprio elettrone per passare allo stato di ione positivo, e quella di assumere un elettrone per passare allo stato di ione negativo [15]. La prima di queste tendenze trova conforto nella chiarificatrice reazione chimica; la seconda non riesce a perfezionarsi e si constata soltanto nell'effetto spettrale di un'assorbimento anomalo nell'ultrarosso. Il cosidetto ' legame idrogeno ' trova qui una conveniente spiegazione sopra dati sperimentali: il punto di vista di L. Pauling ne viene pienamente confermato, e la ' seconda valenza dell'idrogeno' di Lewis [16], deve essere interpretata come una energica azione elettrostatica [17] che l'idrogeno esercita sull'ossigeno carbonilico particolarmente negativo. E poichè l'idrogeno ha una massa estremamente piccola rispetto all'ossigeno, il legame C—H si tende e vibra con la stessa frequenza dei legami C—O e C—C; ecco perchè la superficie della banda a 1,18 μ è solo dieci volte quella dell'acido formico, anzichè dodici come dovrebbe essere se l'idrogeno fosse legato sia al carbonio che all'ossigeno da elettroni rotanti contemporaneamente sulle orbite di due atomi.

(13) SMYT and ROGERS, « Journ. of the Am. Chem. Soc. », *58*, 1824 (1930).

(14) L. PAULING, loc. cit., p. 294.

(15) Si sa che negli idruri metallici l'idrogeno è ione negativo: vedi anche: G. N. LEWIS, *Valence and the structure of the atoms and molecules*, p. 33. « The Chem. Cat. Company ». New York (1923).

(16) Loc. cit.

(17) « Proc. of Nation. Acad. Science », *14*, 359 (1928).

Geologia. — *Sulle « besimauditi » delle Alpi Liguri* (*). Nota (**) di S. Conti, presentata dal Socio G. Rovereto.

La formazione, che nelle carte del Comitato Geologico Nazionale (1), è riferita ad un complesso di porfidi quarziferi, o non, e loro tufi, spesso intensamente laminati (besimauditi), con il loro inviluppo scistoso attorniante, consiste in una numerosa serie di tipi litologici che presentano molteplici e graduali passaggi dai porfidi quarziferi agli scisti sericitici e filladici.

Sono infatti frequentemente osservabili, talora anche nel raggio di piccole distanze, passaggi insensibili di facies e di composizione, che attraverso una svariatissima gamma di varietà, collegano i termini estremi di determinate serie aventi facies gradualmente variabili.

Le variazioni petrografiche, direttamente o indirettamente derivate dal porfido quarzifero, presentano due serie di diverso tipo.

Una offre i seguenti passaggi: porfido quarzifero; porfidi quarziferi a elementi orientati, stirati o laminati; scisti quarzoso–feldispatici (a quarzo porfirico); scisti feldispatici più o meno quarzosi; scisti feldispatici sericitici listati, fettucciati, ondulati, arricciati; scisti sericitici (più o meno quarzosi e feldispatici ad elementi non porfirici); scisti filladici. L'ultimo termine passa e si fonde con i terreni filladici dell'antracolitico superiore.

All'altra serie si possono invece riferire i seguenti termini: porfidi quarziferi; porfidi quarziferi più o meno laminati; arenarie quarzoso–feldispatiche più o meno scistose e sericitiche; quarziti arenacee (verdicce, bianche, rosse, bianche a elementi rosei o carnicini o rosso violetti); quarziti granulari e anageniti. Gli ultimi, fra questi termini, appartengono alla base del trias inferiore.

Tali serie, spesso incomplete per l'assenza di qualche termine, presentano pertanto un graduale e insensibile passaggio da una roccia tipicamente eruttiva, a termini altrettanto sicuramente non tali, ossia a parascisti od a rocce sedimentarie, senza che generalmente sia possibile stabilire ove la roccia eruttiva cessi di esser tale.

Una sola spiegazione è ammissibile, ed è che a contatto con la formazione eruttiva si abbia una roccia sedimentaria costituita con i prodotti stessi di quella, ricostituita con composizione analoga, e che a sua volta modifichi via via i propri caratteri, sino ai termini estremi elencati.

Pertanto, non già di tufi, quali materiali piroclastici, si può parlare, ma di rocce ricostrutte con i prodotti di disfacimento, dirò in seguito di qual sorta, della roccia porfirica.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1948.

(1) R. Ufficio Geologico, fogli al 100.000 Albenga–Savona e Boves.

L'estensione di queste formazioni ricostrutte, d'ordinario scistose, che pur essendo per composizione affini alle masse porfiriche, sono tuttavia certamente riferibili a parascisti, è di gran lunga superiore a quella degli affioramenti ortogenetici; appare pertanto improbabile che la totalità delle prime rappresenti dei tufi metamorfosati; non sarebbe infatti ammissibile tanta imponenza di materiali tufacei, in rapporto ad una formazione a carattere tutt'altro che effusivo, bensì prevalentemente epiabissale.

Alcuni inclusi propriamente tufacei, riconosciuti in alcune località (falde del Pizzo d'Ormea, di M. Settepani, ecc.), e presentanti strutture cineritiche o caratteri di tufi cristallini, debbono essere considerati elementi subordinati della formazione; infatti, l'esame strutturale della grande maggioranza delle formazioni scistose, che ho distinto dai porfidi quarziferi e dai porfiroidi veri, lasciano escludere, specialmente per l'assenza di ogni frammento vetroso, che possano costituire dei tufi metamorfosati.

Le masse propriamente porfiriche, distintamente cristalline, appaiono generalmente contornate da rocce che manifestano una laminazione ed una scistosità via via più accentuata con l'allontanarsi, in senso radiale, dalle prime. Tale è il caso ad esempio delle zone del M. Besimauda e S. Bartolomeo, rispetto alle località circostanti.

Tale accentuazione della scistosità, va collegata, sia con una variazione della composizione, sia con una condizione granulometrica dei costituenti. Così, mentre i porfidi quarziferi presentano, al più, una semplice divisionalità in banchi, e i porfiroidi una isorientazione degli elementi, accompagnata da più o meno intensa cataclasi, le altre facies presentano scistosità marcatissime; e queste sono generalmente tanto più accentuate quanto più è minuta la granulosità della roccia e l'abbondanza della neomineralizzazione.

Infatti, gli scisti feldispatici, e quarzoso–feldispatici, più o meno sericitici, possiedono una minuta granulosità, e sono costituiti prevalentemente da elementi neoformati (quarzo microgranulare, albite, sericite), e costituiscono i tipi più intensamente scistosi e arricciati.

Le arenarie quarzoso–feldispatiche invece, o gli scisti quarzoso feldispatici (a quarzo porfirico), presentanti una granulosità media e prevalenza di elementi originari, mostrano carattere scistoso meno marcato dei precedenti.

L'acquisizione di un aspetto via via più scistoso e laminato, non dimostra affatto diverse intensità di azioni dinamiche, ma lascia invece supporre che un metamorfismo uniforme abbia diversamente agito su materiali diversi per composizione e granulometria, in rapporto alla maggiore e minor compressibilità e plasticità da essi presentate.

Ma tutto ciò porta infine a considerare, data la prevalenza di tipi intensamente scistosi, che il campo dei porfidi e dei porfiroidi veri sia relativamente limitato, e che la grande maggioranza dei cosiddetti porfidi laminati, non sia che un complesso di rocce ricostituite per ricementazione, sotto una intensa azione dinamica, degli elementi disaggregati dei porfidi quarziferi.

Un altro elemento, a complemento di quanto sopra, che consente di riferire ai porfiroidi veri, estensioni di affioramento assai più modeste di quanto sia da taluni ritenuto, e assegna le estese masse laminate alla categoria di parascisti di parziale o totale reintegrazione porfirica, è il fatto che in queste ultime formazioni, la cataclasi degli elementi porfirici, è spesso assente, e generalmente assai poco accentuata, comunque presente in grado minore di quanto il carattere scistoso o la isorientazione elementare della roccia, potrebbero lasciar supporre.

È noto che nelle formazioni arenacee in genere, non sono molto frequenti le strutture milonitiche che giungano ad interessare con intense cataclasi gli elementi psammitici; questi ultimi infatti possono, entro certi limiti, sfuggire l'effetto clastico di azioni dinamiche, trovando mobilità e assestamento in un cemento generalmente più facilmente soggetto a deformazioni e scorrimenti cristallini.

Analogamente si possono considerare alla stregua delle formazioni arenacee, o di impasto arenaceo, quelle originatesi da una arenizzazione chimica dei porfidi; queste infatti, soggette ad intense azioni dinamiche, hanno assunto strutture isorientate, stirate, laminate, ecc., senza peraltro acquisire una intensa cataclasi dei cristalli porfirici; le masse cristalline dei porfidi quarziferi, comprese nelle formazioni disaggregate o facilmente disaggregabili, hanno subìto, per la loro maggior rigidità, una meno accentuata azione di laminazione.

Lo studio microscopico, rivela appunto che i porfidi quarziferi, più o meno freschi e saldi, hanno generalmente subìto una minima deformazione, rilevabile da una moderata cataclasi e da una laminazione poco accentuata.

Le varietà pseudo-porfiroidi, costituite dai prodotti più o meno alterati e arenizzati dei porfidi quarziferi, hanno assunto invece strutture variamente e intensamente laminate e scistose, ove peraltro, i costituenti porfirici, non solo quarzosi, ma anche feldispatici e plagioclasici, sono meccanicamente poco deformati e fratturati.

Ciò pienamente giustifica le osservazioni fatte da Franchi ed altri, sulla variabilità di facies anche in breve spazio, poichè il dinamismo succeduto alla degradazione chimica della roccia, agendo su materiali in diverso stato e grado di alterazione e di aggregazione, ha determinato grande variabilità di strutture.

Ma quì particolarmente è opportuno notare che le strutture scistose e laminate, costituite di minerali neoformati, e ad elementi porfirici residuali poco deformati, presentano estensioni di affioramento di gran lunga maggiori rispetto ai porfidi quarziferi ed ai porfiroidi; viene così ancora confermato che gli affioramenti delle formazioni propriamente cristalline, laminate o non, hanno, nelle Alpi Liguri, al contrario di quanto è notato nella Carta Geologica, una estensione piuttosto limitata.

L'esame microscopico delle formazioni di transizione tra i porfidi quarziferi e le rocce da essi derivate, rileva la presenza di elementi porfirici, non solo negli scisti quarzoso-feldispatici e sericitici, ma anche nelle arenarie

quarzoso-feldispatiche e nelle arenarie e arenoscisti silicei (quarziti psammitiche).

Queste collegano spesso le quarziti ed anageniti del Trias inferiore con le masse porfiriche e pseudo porfiriche, infatti le prime derivano da una locale trasformazione dei porfidi quarziferi, dei quali è rimasto solo l'elemento più duro e inalterabile, il quarzo e, più scarsamente, l'ortoclasio.

Tralasciando qui la casistica e i riferimenti locali, che compariranno dettagliatamente in altro lavoro, ritengo possibile anticipare, sulla scorta delle predette osservazioni, alcune considerazioni.

Sono riferibili ad arcosi in senso lato, tenendoli distinti dalle masse cristalline (porfidi quarziferi), e dai loro derivati metamorfici (porfiroidi), le varietà che presentano multiforme passaggio sia agli scisti sericitici che alle quarziti.

Sui materiali derivati da un processo tipicamente arcosico di disfacimento chimico delle masse porfiriche antracolitiche, hanno successivamente agito le azioni diagenetiche e dinamiche; a queste ultime hanno diversamente reagito i materiali stessi in rapporto alla loro natura fisica e chimica, assumendo, come già detto, diversità di composizione, struttura e deformazione.

Ove non sia intervenuta una intensa trasformazione chimica dei feldispati, nè elaborazione del materiale, ma semplice disgregazione *in situ*, anche solo parziale, è derivata una vera e propria ricostituzione della roccia originaria. Si è prodotta in tal modo una prima categoria di rocce arcosiche o ricostrutte, con termini chimicamente identici o quasi alla roccia originaria, e più o meno affini strutturalmente, a seconda del grado di alterazione e degradazione chimica cui la roccia porfirica era andata soggetta. Pertanto il quarzo ha conservato la sua natura porfirica e non ha subìto intensa fratturazione; i cristalli feldispatici si sono conservati in modo diverso a seconda del loro stato di alterazione; i prodotti caolinici di questa alterazione hanno fornito il materiale di ricristallizzazione e di ricementazione, mentre la biotite è andata distrutta o cloritizzata, od ha lasciato rari residui decolorati.

Appartengono ad una categoria derivata da porfidi poco alterati le formazioni arcosiche di rocce verdi e verde scuro, alquanto scistose ma salde e granulari, in banchi distinti, con elementi cristallini e porfirici distinguibili ad occhio (Val Pesio p. p., falde di M. Besimauda, Lurisia, Val di Ellero p. p. ecc.).

Ove sia intervenuta una più intensa degradazione dei feldspati nella roccia originaria, sono derivati tipi arcosici scistosi più abbondantemente sericitici, inglobanti residui feldispatici inalterati e quarzo ancora porfirico; rimane inalterata l'apatite, acquista importanza l'albite di neoformazione, talora la calcite e qualche altro componente secondario; compare frequentemente la clorite, scompare completamente la biotite.

Una fase di alterazione ancora più spinta del porfido quarzifero, ha distrutto completamente o quasi i plagioclasi ed alterato fortemente i feldispati; quarzo e albite microgranulari, sericite, ecc. inglobano il quarzo talora

ancora porfirico) e l'apatite, unici elementi primari, più o meno fratturati, orientati, stirati; presentano carattere molto scistoso, talora tegolari (lose).

Ove, tra i materiali arcosici, sia avvenuta, prima della loro ricostituzione diagenetica, una separazione, una differenziazione, un arricchimento qualsiasi, di ordine fisico granulometrico, (il chè generalmente comporta anche una differenziazione chimica e mineralogica), o di ordine chimico (soluzioni, sostituzioni con apporto o asporto di materia), si è avuto successivamente una notevole varietà di tipi.

Così, per l'allontanamento dei prodotti dell'alterazione plagioclasica e feldispatica, ha avuto luogo la formazione delle arenarie porfiriche quarzoso-feldispatiche; una più accentuata o totale alterazione dei feldispati, e allontanamento dei relativi prodotti, ha dato luogo alle arenarie porfiriche quarzose.

D'altra parte l'accumulazione dei prodotti più o meno fini di derivazione feldispatica, ha generato varie sorta di rocce scistose: scisti quarzoso feldspatici (a quarzo non porfirico), scisti feldspatici, scisti quarzo–sericitici, scisti sericitici e filladici.

Per questi ultimi, ad esempio, è evidente la loro origine, quando si verifica, come spesso mi è stato possibile di constatare, la loro alternanza o la loro inclusione di masse lentiformi, negli arcosi porfirici laminati.

Per l'interpretazione delle facies « besimauditiche », è necessario pertanto riferirsi alle azioni chimiche e fisiche preparatorie dei materiali, su cui ha successivamente agito il metamorfismo, ulteriormente modificatore di struttura e composizione mineralogica.

Ma se è spesso possibile, con l'indagine microscopica e chimica, ricollegare i termini litologici attuali (prodotti del metamorfismo sui materiali arcosici), con la roccia originaria, ossia i porfidi quarziferi (in parte tutt'ora intrasformati), noi non possiamo se non eccezionalmente, conoscere gli arcosi, così come essi sono derivati dai porfidi, prima del subìto metamorfismo.

In particolare, non sarà in ogni caso possibile riscontrare la presenza di prodotti sciolti e arenizzati dall'azione arcosica pretriassica, perchè la diagenesi ha ricostituito le masse con una nuova cementazione; le masse arcosiche diagenizzate, sono state poi strutturalmente modificate dal metamorfismo alpino, e la loro identificazione è solo possibile dove, pur assumendo la roccia carattere scistoso e laminato, abbia conservato qualche elemento strutturale anteriore.

Nella tavola schematica della pagina seguente, è stata sottolineata a tratteggio la serie dei prodotti arcosici sciolti, inizialmente derivati dai porfidi (fase di disaggregazione); tali prodotti, per essere soggiaciuti alle successive azioni, non sono reperibili.

Le facies della fase successiva (diagenetica), derivate dalla precedente, sono rappresentate dai materiali che hanno comunque potuto sfuggire ad una completa modificazione strutturale determinata dalla terza fase metamorfica. Quest'ultima ha interessato, oltre i prodotti arcosici, anche i porfidi stessi, ed eventualmente i loro tufi inclusi, dando origine ai porfidi laminati e ai porfiroidi sericitici.

Inalterate
Fase metamorfica (Alpina)
Fase diagenetica (Trias inf.?)
Fase di disaggregazione (Pretrias.)
Fase magmatica e piroclastica.
Porfidi quarziferi
Tufi cristallini inclusi
e
detrizione chimica e fisica
elaborazione locale dei materiali arenizzati
azione arcosica (arcosi s. s.)
porfidi alterati e arenizzati
arcosi porfiriche (porfidi arcosici)
Porfidi cataclastici, laminati; porfiroidi
arene quarzoso-feldispatiche, più o meno porfiriche
arenarie quarzoso feldispatiche, più o meno porfiriche
scisti porfirici quarzoso-feldispatici, sericitici, cloritici (arcosi porfiroidi o porfidi arcosici
arene quarzose più o meno porfiriche
arenarie quarzose più o meno porfiriche
quarziti granulari e arcoscisti quarzosi
argille, argille arenacee
scisti argillosi, scisti argillosi più o meno quarzosi
Scisti sericitici, quarzoso sericitici e quarzoso feldispatici
Scisti tufacei; prasiniti ?

Anche più scarsi sono i rappresentanti più o meno metamorfosati di origine propriamente tufacea, tra i quali ho compreso, dubitativamente e provvisoriamente, le scarse e ridotte masse di facies prasinitica incluse negli scisti arcosici.

Le considerazioni in rapporto alla datazione delle fasi di disaggregazione, diagenesi e metamorfismo, rispettivamente assegnate ad età pretriassica, triassica inferiore?, e alpina, mi porterebbero fuor dei limiti concessi ad una Nota preliminare; basti qui pertanto accennare solo che l'appartenenza all'antracolitico dei porfidi, porfiroidi e arcosi porfirici, sembra sempre più precisabile, e che gli arcosi quarzosi e quarzoso-feldispatici stanno, come ben ho potuto constatare, alla base del Trias inferiore, ad esso facendo passaggio.

Aggiungo che, fuori delle Alpi Liguri, osservazioni ormai numerose di valenti autori, tra cui recentemente M. Lugeon [2] sembrano vieppiù precisare e generalizzare l'esistenza di orizzonti arcosici alla base del Trias inferiore alpino, trasgressivo su terreni cristallini di natura acida.

Patologia. — *Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale* [*]. – III. *Sulla birifrangenza di forma e la birifrangenza propria* [**]. Nota [***] di A. Ascenzi, presentata dal Corrisp. G. Vernoni.

La natura della birifrangenza dell'osso totale è eminentemente complessa e dipende:

a) dalla struttura della sostanza organica;

b) dalla struttura della frazione inorganica;

c) dai rapporti tra sostanza organica e frazione inorganica.

Infatti, a somiglianza dell'osso totale, l'osso decalcificato è dotato di birifrangenza monoassica positiva con asse ottico orientato secondo la direzione delle fibre collagene. D'altra parte, l'osso privo della parte organica ed immerso in liquidi ad indice di rifrazione differente è sempre dotato di birifrangenza monoassica con asse ottico orientato nella stessa direzione di quello delle fibre – per cui l'aspetto istologico a luce polarizzata non si modifica rispetto all'osso totale ed all'osso decalcificato – ma con valore e

2) M. Lugeon, *A propos du prétendu métamorphisme du Trias autochtone alpin.* « Bull. de la Soc. Géol. de France », 5ª s., t. XVI, p. 609 (1946).

(*) Le ricerche che hanno fatto oggetto delle Note I, II, III, sono state eseguite con il sussidio di una borsa di studio del C. N. R. e nel Centro di Studi per la Fisiopatologia diretto dal prof. G. Vernoni.

L'A. ritiene doveroso esprimere i più vivi ringraziamenti al C. N. R. ed in particolare al prof. G. Vernoni.

(**) La presente Nota è stata eseguita sotto la guida del prof. E. Onorato e del suo assistente dott. M. Fornaseri.

(***) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1948.

segno variabili a seconda dell'indice di rifrazione del liquido d'immersione. In altre parole l'osso privo della sostanza organica ubbidisce alla legge della birifrangenza di forma o di struttura (Formdoppelbrechung) e più precisamente si comporta come un sistema complesso costituito da due elementi componenti isotropi o anisotropi rappresentati da una serie di cilindri o bastoncelli (Stäbchen) submicroscopici disposti parallelamente – che nel caso particolare dell'osso corrispondono agli spazi occupati dal liquido d'immersione – circondati da un mezzo ad indice di rifrazione diverso che, sempre nel caso particolare dell'osso, è rappresentato dalla frazione minerale. Quindi l'osso privato della sostanza organica presenta, secondo Schmidt [1], quella particolare birifrangenza di forma che gli AA. tedeschi designano *Stäbchendoppelbrechung* (in italiano: birifrangenza di bastoncelli), e che secondo i fondamenti e gli sviluppi della teoria fisico matematica di Wiener [2] risponde alla formula

$$n_e^2 - n_o^2 = \frac{\delta_1 \delta_2 (n_1^2 - n_2^2)^2}{(\delta_1 + 1) n_2^2 + \delta_2 n_1^2}$$

dove n_1 e δ_1 rappresentano l'indice di rifrazione e il volume relativo dei bastoncelli (liquido d'immersione nel caso dell'osso) n_2 e δ_2 l'indice di rifrazione e il volume relativo della sostanza interposta (frazione minerale dell'osso).

Se si considera però che, a differenza di quanto è previsto dalla teoria di Wiener per i sistemi complessi o corpi misti caratterizzati da *Stäbchendoppelbrechung* e risultanti di componenti isotropi, la curva parabolica dei valori della potenza birifrattiva al variare dell'indice di rifrazione di uno dei componenti non è tangente nel vertice all'asse delle ascisse – cioè la birifrangenza non si annulla quando gli indici di rifrazione dei componenti sono eguali – ma passa per un minimo negativo, si deduce che la frazione minerale dell'osso è dotata di birifrangenza propria monoassica negativa che si somma algebricamente alla birifrangenza di forma. In definitiva dunque la birifrangenza totale dell'osso è la risultante:

a) della birifrangenza della sostanza organica (fibre + sostanza cementante o *Kittsubstanz*);

b) della birifrangenza propria della frazione minerale Eigendoppelbrechung);

c) della birifrangenza di forma Formdoppelbrechung dipendente dai rapporti reciproci della sostanza organica e della frazione minerale.

In questa Nota riferisco i risultati delle mie ricerche sulla birifrangenza di forma e sulla birifrangenza propria del femore umano normale.

Tecnica e metodica. – Come materiale di studio ho scelto il terzo medio della diafisi femorale di soggetti umani normali che hanno già fatto oggetto di studio delle precedenti Note I e II. Data la laboriosità del metodo seguìto, sono stato costretto a limitare le osser-

(1) W. J. Schmidt. « Ber. d. Oberhess. Ges. Natur- u. Heilkunde zu Giessen », *15*, 219 (1933).

(2) O. Wiener. *Die Theorie des Mischkörpers*. « Abh. sächs. Ges. Wiss. math. phys. Kl. », *32*, 509 (1912).

vazioni a 5 casi e precisamente a quelli contrassegnati: F. M., ♂, a. 1; N. G., ♀, a. 3; C. A., ♂, a. 25; L. G. B., ♂, a. 51; A. A., ♂, a. 80.

Per la determinazione della curva di birifrangenza di forma e per la misura della birifrangenza propria mi sono attenuto ai concetti esposti da Dallemagne e Mélon (3) a proposito delle loro osservazioni sul femore di bue. Poichè, a differenza della potenza birifrattiva totale che è stata determinata mediante metodi diretti, la misura della birifrangenza di forma è basata – come verrà esposto in seguito – su criteri necessariamente indiretti, non è indispensabile che le sezioni soddisfino a requisiti particolarmente restrittivi di omogeneità ottica. È pertanto giustificato l'uso di sezioni relativamente spesse e quindi più idonee a resistere agli inevitabili, seppur minimi, insulti dipendenti dalle prolungate manipolazioni.

Le sezioni orientate in senso longitudinale, di dimensioni 2×4 e 4×4 mm. e dello spessore medio di 120 μ sono state allestite mediante un grosso microtomo Leitz (con slitta nella base e avanzamento automatico dell'oggetto) direttamente da cubetti di osso essiccato all'aria. Previo sgrassamento mediante lavaggio in cloroformio ed essiccamento a temperatura ambiente, queste sono state incluse in bromoformio. Quindi, mediante osservazione sistematica a piccolo e forte ingrandimento con il microscopio polarizzatore, ho fissato da 3 a 5 punti di ciascuna sezione, più facilmente individualizzabili e atti alla determinazione dei ritardi.

Debbo notare che per essere sicuro di rintracciare esattamente, dopo distruzione della sostanza organica, i punti precedentemente individuati, ho eseguito dei disegni schematici delle singole sezioni in modo da fissare punti di repere precisi.

Ho eseguito le misure dei ritardi mediante il compensatore di Berek.

Quindi ho praticato la distruzione della sostanza organica delle singole sezioni, ricorrendo al noto metodo di Gabriel (4) e, dopo abbondante lavaggio con acqua distillata bollente fino a neutralizzazione, le ho essiccate in stufa a 105° per 2 ore.

Le sezioni così allestite sono state successivamente immerse in una serie di liquidi con indice di rifrazione diverso e per ciascuno di essi è stato determinato il ritardo a livello dei vari punti individuati prima della distruzione della sostanza organica.

È opportuno ribadire che questo procedimento è particolarmente indaginoso perchè si effettua su materiale estremamente fragile e allo stesso tempo richiede accorgimenti scrupolosi per escludere la persistenza nella sezione di tracce di un liquido quando si passa ad un altro di indice di rifrazione diverso.

Ho potuto raggiungere una tecnica e dei risultati abbastanza soddisfacenti ottemperando agli accorgimenti seguenti:

1° Uso di liquidi facilmente diffusibili, tali da penetrare con rapidità nei fini spazi molecolari lasciati liberi dalla sostanza organica distrutta e da esserne rimossi altrettanto rapidamente.

È possibile in questo modo ottenere valori costanti dei ritardi misurati o immediatamente o, al massimo, entro poche ore dall'immersione delle sezioni.

2° Rimozione dei singoli liquidi mediante abbondante lavaggio in alcool etilico e successivo essiccamento in stufa a temperatura di distillazione del liquido rispettivo o comunque non inferiore a 105° per 2 ore.

3° Trattamento delle sezioni sul solo porta oggetti per i liquidi poco volatili, al disotto del coprioggetti tenuto opportunamente sollevato, in modo da non venire in contatto con l'osso, per i liquidi volatili. In questa maniera si evita di traumatizzare inutilmente le sezioni e di provocarne la distruzione prima che siano state immerse in tutta la serie dei liquidi.

4° Controllo scrupoloso che il valore del ritardo misurato per i singoli liquidi sia perfettamente costante, in modo di essere sicuri della compenetrazione completa della sezione.

3) M. J. Dallemagne e J. Melon, *Nouvelles recherches relatives aux propriétés optiques de l'os*, « J. Washington Acad. Sc. », *36*, 181 (1946).

(4) Vedi Nota I.

I liquidi variamente usati nei singoli casi sono stati i seguenti: acqua distillata ($n = 1{,}333$), alcool metilico ($n = 1{,}343$), alcool etilico ($n = 1{,}365$), alcool isopropilico ($n=1{,}380$), alcool isobutilico ($n=1{,}395$), acetato d'amile ($n=1{,}401$), paraldeide ($n=1{,}405$), succinato di etile ($n = 1{,}422$), cloroformio ($n = 1{,}447$), cloruro d'etilene ($n = 1{,}447$), tetracloruro di carbonio ($n = 1{,}464$), mentene ($n = 1{,}465$), piridina ($n = 1{,}487$), toluolo ($n = 1{,}497$), bromuro di trimetilene ($n = 1{,}525$), bromuro di etilene ($n = 1{,}541$), bromobenzolo ($n = 1{,}562$), bromoformio ($n = 1{,}596$), bromonaftalina ($n = 1{,}659$), ioduro di metilene ($n = 1{,}743$).

Per risalire dalla misura dei ritardi alla determinazione dei singoli valori della birifrangenza di forma non è possibile applicare la nota formula

$$n_s - n_0 = \frac{R}{s}$$

poichè la eterogeneità ottica dovuta alla complessa struttura dell'osso non lo permette. È quindi necessario ricorrere al seguente artifizio indiretto.

Dato che l'asse ottico dell'osso totale coincide con quello della frazione minerale, è lecito scrivere (per lo meno quando si tratta di potenze birifrattive molto deboli cioè dell'ordine di quelle misurate per l'osso totale):

$$\frac{R_t}{R_m} = \frac{B_t}{B_m}$$

dove R_t e B_t corrispondono rispettivamente al ritardo e alla potenza birifrattiva totale, cioè misurati prima della distruzione della sostanza organica; R_m e B_m, al ritardo ed alla potenza birifrattiva della sola frazione minerale.

Da questa proporzione si ricava immediatamente:

$$B_m = \frac{B_t \cdot R_m}{R_t}.$$

Applicandó questa formula ai singoli ritardi misurati per i vari liquidi si ricavano i valori relativi della potenza birifrattiva e quindi è possibile costruire la curva di birifrangenza di forma in funzione dell'indice di rifrazione.

Discussione dei risultati. – Per ragione di spazio non mi è possibile riferire, neppure sotto forma di tabelle, tutti i valori misurati nei singoli casi e che troveranno invece trattazione adeguata in una Memoria di maggior mole. Mi limito quindi a riassumere sinteticamente (tab. I) i valori medi della potenza birifrattiva determinati per ciascun tipo di liquido nei 5 casi esaminati. Come valore della potenza birifrattiva dell'osso totale ho scelto per tutti i casi quello di + 0,004, precedentemente determinato (5).

Nella figura 1 ho tradotto in forma grafica l'andamento dei ritardi misurati in due punti di due sezioni del caso C. A., ♂, a. 25 immerse ciascuna in 2 serie di liquidi diversi.

Come si rileva immediatamente, i valori misurati (fig. 1) si allineano secondo una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e con vertice negativo. L'allineamento dei punti non è però regolare per tutti i liquidi, per alcuni esso si discosta in maniera sensibile dalla curva teorica. Ciò vale

(5) Vedi Nota II.

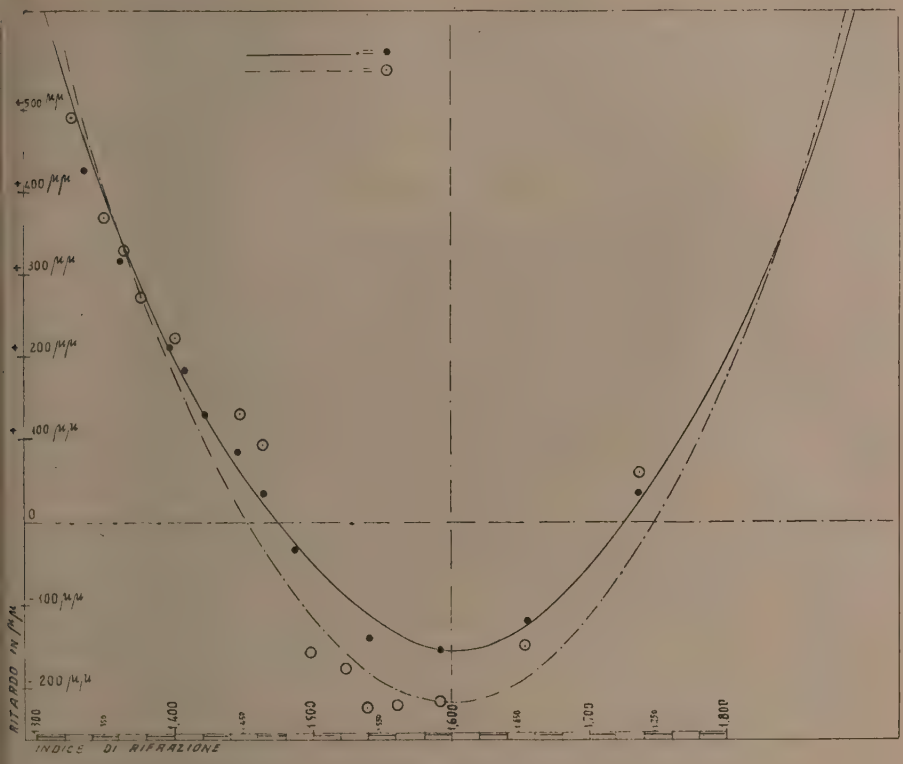


Fig. 1.

soprattutto per i liquidi che conferiscono alle sezioni i ritardi contrassegnati dai cerchi. Questi tendono a mantenersi più elevati del previsto, conferendo alla branca sinistra della curva una inflessione più o meno spiccata, a convessità diretta verso l'alto, mentre i liquidi che determinano ritardi contrassegnati da puntini dànno origine ad una curva ad andamento più regolare.

Un andamento particolare della curva dei ritardi si osserva spesso anche nell'ultimo tratto della branca sinistra in vicinanza del vertice della parabola, che dovrebbe corrispondere all'ascissa dell'indice di rifrazione della frazione minerale dell'osso ($n = 1{,}600$ circa).

Infatti i valori dei ritardi, misurati facendo uso di liquidi ad indice di rifrazione inferiore al bromoformio ed in particolare del bromuro di etilene e del bromobenzolo, sono di poco superiori, uguali o addirittura minori dei valori ottenuti con lo stesso bromoformio. Un tale comportamento, è frequente, sebbene non costante, nei vari punti in cui sono state eseguite le determinazioni. Esso inoltre non costituisce un fenomeno singolare osservabile solo nell'osso umano, ma è presente anche nell'osso di bue, come dimostra la curva dei ritardi riferita da Dallemagne e Mélon. Infatti, per

quanto gli AA. non attribuiscano ad esso particolare valore, è interessante notare che per far passare la curva dei ritardi per il valore misurato, tenendo la sezione di osso in bromoformio essi sono stati costretti ad assumere come valori della potenza birifrattiva corrispondenti al cinnamato di etile ($n = 1,559$) e al benzoato di benzile ($n = 1,569$) quelli determinati all'inizio dell'immersione (più elevati) anzichè quelli finali, verosimilmente più esatti, in quanto espressione della massima compenetrazione e del massimo assestamento tra osso e liquido.

La somiglianza dei miei risultati con quelli degli AA. belgi, pur facendo uso di liquidi ad indice di rifrazione diverso, (bromuro di etilene e bromobenzolo anzichè cinnamato di etile e benzoato di benzile), inducono a ritenere che il modificato andamento di questo tratto di curva sia dovuto all'uso del bromoformio. Tale supposizione è avvalorata dalle precedenti considerazioni sul valore dell'indice di rifrazione dell'osso privo di sostanza organica, facendo uso di bromoformio e di miscele contenenti bromoformio [6]. È probabile che la relativamente elevata tensione superficiale di questo liquido rispetto agli altri della serie, ne renda difficile la penetrazione negli spazi molecolari abbandonati dalla sostanza organica o cumunque ostacoli la completa imbibizione. Si deduce quindi che i valori del ritardo e quindi della birifrangenza propria dell'osso ottenuti facendo uso del bromoformio - questo ha infatti indice di rifrazione ($n = 1,596$) molto vicino a quello dell'osso privo della frazione organica ($n = 1,600$) – non possono venire assunti come strettamente assoluti ed è verosimile pensare che essi siano in realtà per lo più inferiori a quelli reali.

Le curve di birifrangenza di forma calcolate nei singoli punti ripetono esattamente l'andamento delle curve corrispondenti di ritardo. Presentano in linea generale le medesime particolarità di andamento della branca sinistra e del vertice per quanto queste risultino più attenuate nelle curve di birifrangenza media dedotte da una serie di misurazioni in più punti di una medesima sezione o di due sezioni diverse.

Giova qui ricordare che, a differenza di Dallemagne e Mélon, non ritengo che i valori calcolati per la birifrangenza propria della frazione minerale dell'osso siano da considerarsi assoluti *sensu strictiori* e ciò per i seguenti motivi:

a) La potenza birifrattiva dell'osso totale (+ 0,004) seppure verosimilmente corrisponde alla realtà, non lo è tuttavia in maniera del tutto inopinabile.

b) La potenza birifrattiva misurata in singoli punti di una stessa sezione di osso privo della sostanza organica subisce talora degli scarti considerevoli.

c) Le precedenti considerazioni sulle proprietà fisiche dei liquidi usati e sulla possibilità di penetrazione nel reticolo microcristallino dell'osso inducono a prudenti riserve nella valutazione dei valori misurati.

(6) Vedi Nota I.

Per quanto le ricerche di Schmidt ci assicurino della profonda penetrazione delle molecole del liquido nelle lacune del reticolo, è lecito supporre che tale penetrazione varia a seconda delle proprietà fisiche dei singoli liquidi. In questo senso ritengo che non sarebbe certamente privo d'interesse studiare l'andamento della curva di birifrangenza di forma facilitando la penetrazione dei liquidi, specie quelli a comportamento particolare come il bromoformio, mediante il vuoto.

Da quanto precede reputo pertanto che il valore della birifrangenza propria dell'osso privato della frazione minerale, corrispondente al valore dell'ordinata della curva parabolica misurata nel vertice non possa essere considerato assoluto, specie nel senso voluto da Dallemagne e Mélon, che in base alla costruzione di una sola curva di birifrangenza di forma dànno come valore — 0,0022. Ritengo invece più prudente conferire al valore della birifrangenza propria desunto direttamente dalla curva di birifrangenza di forma, un significato più relativo, di orientamento e che può essere oggetto di utili confronti qualora venga determinato sempre nelle medesime condizioni di esperimentò e con gli stessi liquidi.

A questo proposito è interessante osservare che se si confrontano i valori della birifrangenza propria nei singoli casi – cioè il valore assunto dalla curva di birifrangenza di forma per l'indice di rifrazione della frazione minerale dell'osso e più esattamente i valori corrispondenti all'indice di rifrazione del bromoformio (1,596) che dei liquidi usati più si avvicina al valore di 1,600 – si rileva immediatamente che essi variano sensibilmente con l'età del soggetto. Infatti, mentre il valore medio della potenza birifrattiva per il bromoformio è, nel caso F.M., ♂, a. 1 di —0,0018, scende in N. G., ♀, a. 3, a — 0,0029 e nei casi C. A., ♂, a. 25; L. G. B., ♂, a. 51; A. A., ♂, a. 80; si mantiene entro limiti di —0,0037 e —0,0042.

Facendo le opportune riserve sulle possibilità di penetrazione più o meno completa e perfetta dei liquidi nelle sezioni di osso privo della sostanza organica; tenuto tuttavia presente che – sebbene la curva di birifrangenza di forma non presenti nel suo complesso note evidenti di traslazione a carattere proporzionale rispetto ai valori misurati per il bromoformio esiste una netta corrispondenza tra i valori misurati per quest'ultimo liquido e quelli per il toluolo ed il bromuro di etilene per cui si esclude un comportamento singolare del bromoformio, è lecito avanzare l'ipotesi – per la meno in attesa di ricerche più precise – che (in base ai principî informatori la teoria di Wiener) la birifrangenza propria della frazione minerale dell'osso possa variare con l'età, subendo un rapido decremento nei primi anni di vita e mantenendosi poi relativamente costante nell'adulto e nel vecchio.

Questa osservazione, se confermata da ricerche sistematiche estese ad un maggior numero di casi risulta di particolare interesse in quanto permette di rilevare direttamente variazioni fisiologiche ed eventualmente patologiche nelle proprietà ottiche della frazione minerale dell'osso ed implicitamente della composizione chimica, in base alla birifrangenza propria.

TABELLA I. – *Valori medi della birifrang*

LIQUIDI	Indice di rifrazione	F. M., ♂, a. 1		N. G., ♀, a. 3		C. A., ♂,
Acqua	1,333	+ 0,0080	(VIII) + 0,0009 — 0,0010	+ 0,0078	(VI) + 0,0009 — 0,0009	+ 0,0082
Alcool metilico	1,343	+ 0,0078	(I)			+ 0,0064
Alcool etilico	1,365	+ 0,0056	(VIII) + 0,0007 — 0,0013	+ 0,0059	(VI) + 0,0013 — 0,0011	+ 0,0057
Alcool isopropilico	1,380	+ 0,0049	(III) + 0,0009 — 0,0007	+ 0,0047	(VI) + 0,0009 — 0,0010	+ 0,0049
Acetato d'amile	1,401	+ 0,0040	(III) + 0,0005 — 0,0004	+ 0,0036	(VI) + 0,0008 — 0,0007	+ 0,0038
Cloroformio	1,447	+ 0,0031	(VIII) + 0,0006 — 0,0009	+ 0,0022	(VI) + 0,0004 — 0,0003	+ 0,0024
Tetracloruro di carbonio .	1,464	+ 0,0023	(VIII) + 0,0004 — 0,0005	+ 0,0018	(VI) + 0,0004 — 0,0003	+ 0,0019
Toluolo	1,497	— 0,0016	(VI) — 0,0008 + 0,0004	— 0,0020	(VI) — 0,0008 + 0,0006	— 0,0022
Bromuro di trimetilene .	1,525					— 0,0031
Bromuro d'etilene	1,541	— 0,0020	(II) — 0,0007 + 0,0007	— 0,0027	(VI) — 0,0010 + 0,0006	— 0,0032
Bromobenzolo	1,562					— 0,0034
Bromoformio	1,596	— 0,0018	(VII) — 0,0011 + 0,0004	— 0,0029	(VI) — 0,0010 + 0,0007	— 0,0037
Bromonaftalina	1,659					— 0,0023
Joduro di metilene . . .	1,743					+ 0,0012

NOTA. — Accanto ai singoli valori medi sono riportati gli scarti rispetto ai valori massimi e minimi misurati.

misurati in più punti di una o di due sezioni.

B., δ, a. 51		A. A., δ, a. 80		LIQUIDI	Indice di rifrazione	C. A., δ, a. 25	
089	(III) + 0,0007 — 0,0007	+ 0,0084	(III) + 0,0008 — 0,0007	Acqua	1,333	+ 0,0095	(IV) + 0,0006 — 0,0010
				Alcool etilico	1,365	+ 0,0069	(IV) + 0,0006 — 0,0004
064	(III) + 0,0007 — 0,0006	+ 0,0055	(III) + 0,0002 — 0,0001	Alcool isobutilico	1,395	+ 0,0049	(IV) — 0,0001
058	(III) + 0,0008 — 0,0007	+ 0,0052	(III) + 0,0002 — 0,0001	Paraldeide	1,405	+ 0,0039	(IV) + 0,0004 — 0,0004
042	(III) + 0,0003 — 0,0003	+ 0,0041	(III) + 0,0002 — 0,0001	Succinato d'etile	1,422	+ 0,0024	(IV) + 0,0003 — 0,0003
025	(III) + 0,0002 — 0,0003	+ 0,0022	(III) + 0,0003 — 0,0003	Cloruro d'etilene	1,447	+ 0,0019	(IV) + 0,0004 — 0,0002
015	(III) + 0,0005 — 0,0004	+ 0,0014	(II) + 0,0003 — 0,0002	Mentene	1,465	+ 0,0007	(IV) + 0,0003 — 0,0003
039	(III) — 0,0010 + 0,0005	— 0,0029	(III) — 0,0004 + 0,0004	Piridina	1,487	— 0,0008	(III) — 0,0001 + 0,0001
				Bromuro d'etilene	1,541	— 0,0030	(III) — 0,0002 + 0,0004
038	(III) — 0,0003 + 0,0003	— 0,0030	(III) — 0,0006 + 0,0006	Bromobenzolo	1,562	— 0,0036	(IV) — 0,0002 + 0,0001
042	(III) — 0,0001 + 0,0001	— 0,0037	(III) — 0,0006 + 0,0005	Bromoformio	1,596	— 0,0037	(IV) — 0,0001 + 0,0001
				Bromonaftalina	1,659	— 0,0028	(I)
				Joduro di metilene	1,743	+ 0,0014	(I)

ed in parentesi è indicato il numero di punti in cui sono state eseguite le misurazioni.

Prima di chiudere questa Nota ritengo opportuno accennare, sia pur brevemente, che le conclusioni cui intendono giungere Dallemagne e Mélon in base alle loro ricerche sulle proprietà ottiche dell'osso di bue e cioè che « la frazione organica dell'osso, rappresentata dall'osseina, non accusa alcun legame chimico percettibile ai mezzi fisici con il fosfato tricalcico, elemento principale della frazione minerale » non sono accettabili per i seguenti due motivi fondamentali:

1° L'identità di valori da questi ottenuti per la birifrangenza totale misurata direttamente e calcolata indirettamente introducendo i valori dell'indice di rifrazione ($n = 1{,}590$) e del volume relativo ($n = 0{,}466$) dell'osso privo della sostanza organica e rispettivamente l'indice di rifrazione ($n = 1{,}385$) ed il volume relativo ($n = 0{,}534$) dell'osso decalcificato, nella formula di Wiener, costituisce in realtà una coincidenza fortuita. Infatti l'indice di rifrazione ed il volume relativo della sostanza organica misurato dagli AA. non rappresentano l'indice di rifrazione ed il volume relativo della sola sostanza fondamentale interfibrillare o *Kittsubstanz* cui si ammette sia legata la frazione inorganica, ma del complesso sostanza fondamentale + fibre collagene.

2° Gli stessi AA. non prendono affatto in considerazione la birifrangenza della sostanza organica (sostanza fondamentale + fibre) la quale incide sicuramente sul valore della potenza birifrattiva totale dell'osso.

Da quanto sono venuto esponendo credo poter formulare le seguenti proposizioni conclusive:

1° *Come era stato qualitativamente osservato e discusso da Schmidt, anche accurate ricerche quantitative dimostrano che l'osso umano normale (diafisi del femore destro) segue la legge di Wiener della birifrangenza di forma.*

2° *La curva parabolica, espressione dell'andamento della birifrangenza al variare dell'indice di rifrazione dei liquidi d'imbibizione, ha l'asse diretto parallelamente all'asse delle ordinate e vertice negativo.*

3° *Ne consegue che la frazione minerale dell'osso è anisotropa e dotata di birifrangenza negativa (birifrangenza propria)*

4° *Fatte le debite riserve sulla penetrazione più o meno perfetta dei liquidi nell'osso privo di sostanza organica e quindi sui valori corrispondenti della birifrangenza di forma è lecito ritenere - per lo meno in via d'ipotesi che la potenza birifrattiva della frazione minerale non sia costante, ma vari con l'età, tendendo rapidamente a diminuire nei primi anni di vita per mantenersi poi pressochè stazionaria nell'età adulta e nella vecchiaia.*

5° *Le conclusioni di Dallemagne e Mélon sulla mancanza di legami otticamente dimostrabili tra sostanza organica e frazione minerale dell'osso non sono accettabili.*

Scienza della Alimentazione. — *Sugli autolizzati proteici.* – I. *Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici in cani in via di accrescimento.* Nota (*) di C. Lombroso e C. Ardy, presentata dal Corrisp. U. Lombroso.

In questi ultimi anni numerosi autori hanno dedicato un grande numero di ricerche allo studio della utilizzazione di autolizzati proteici, od anche di miscele di aminoacidi cristallini fondamentali, sia dal punto di vista teorico che di applicazione pratica (1).

Scopo di queste ricerche in genere era quello di verificare se tali materiali potessero servire sia a mantenere in equilibrio azotato, sia a ripristinare il tasso decaduto delle proteine circolanti, sia, in particolar modo, allo accrescimento di giovani animali od anche dell'uomo.

Lo spunto fondamentale dal quale partiva questa serie moderna di ricerche, erano le oramai classiche osservazioni del Rose e collaboratori (2), nelle quali era stata dimostrata la possibilità di mantenere in equilibrio azotato, od anche di far crescere, animali ai quali si somministravano, come fonte di azoto, aminoacidi purificati.

Non possiamo in questa Nota trattenerci sull'esposizione ed analisi di tutte queste interessanti esperienze e dei loro risultati talora complessi, riserbandoci di ritornare ad un esame ordinato della letteratura sino ad ora acquisita, in un secondo tempo, poichè in questa Nota il problema sarà trattato da un punto di vista completamente diverso; tanto che potrà in un primo momento apparire strano che – occupandoci noi del quesito: utilizzazione degli autolizzati proteici nel metabolismo intermedio delle proteine – si prenda inizio dallo studio dei loro effetti sul metabolismo gassoso.

Noi abbiamo ritenuto opportuno di seguire questo metodo perchè impressionati da profonde divergenze, di affermazioni ancor più che di risultati, dei precedenti autori; alcuni dei quali appaiono entusiasti degli effetti ottenuti con le perfusioni endovenose di detti autolizzati (1), perchè praticando il bilancio dell'N lo ritrovano fortemente positivo; mentre altri (in minor numero invero) sembrano poco soddisfatti e quasi negano ogni valore a questa pratica se rivolta a sostituire più o meno completamente l'alimentazione con proteine genuine, perchè non constatano un corrispondente

(*) Pervenuta dall'Accademia il 7 ottobre 1948.

(1) R. Elman, *Parenteral Nutrition* «Monograph», 1946, Reinhold; B. J. Allison, J. A. Anderson, Co Tui. R. Elman, G. H. Whipple e coll., *Proteins and Protein Hydrolysates in Nutrition.* «Annals of the N. Y. Acad. of Sc.», *47*, 241–374 (1946).; J. G. Martin, *Intravenous Alimentation with Aminoacids.* «A Review Medecine», *22*, 73 (1943).

(2) Rose e coll. «Physiological Rev.», *18*, 109 (1938).

aumento di peso corporeo [3]. Il dubbio che una differente spinta ipermetabolica gassosa potesse giustificare queste divergenze fra i precedenti ricercatori, ci ha suggerito l'impostazione di queste ricerche.

Le indagini sugli effetti nel ricambio gassoso delle proteine e di vari aminoacidi isolati, furono già eseguite da numerosissimi ricercatori dopo che il Rubner, al principio di questo secolo, impostò il problema della cosidetta Azione Dinamico Specifica degli alimenti ed in particolar modo delle proteine.

Come è noto, sotto l'indicazione di A. D. S. delle proteine si indica quel fenomeno di iperconsumo di ossigeno (cioè di aumento di dispendio energetico) che si ha in un animale tenuto nelle condizioni di metabolismo basale (riposo assoluto, digiuno, neutralità termica ecc.) al quale si somministra una certa quantità di alimenti, in modo che questa possa corrispondere al suo fabbisogno energetico per un certo numero di ore. Così, ad esempio, quando l'alimento è sotto forma di proteine, si osserva un aumento nel consumo di ossigeno che è circa del 30–40 % superiore al normale.

Uno studio del Cisi [4] sopra l'A . D. S. degli alimenti nei lattanti, rileva che durante l'accrescimento l'A. D. S. delle proteine è di circa la metà che nell'adulto. Apparirebbe da queste ricerche che la parte delle proteine impegnate nel compito plastico dell'accrescimento, non partecipi a quel complesso ancora poco noto di fattori che determinano questo ipermetabolismo gassoso. Questa ipotesi è avvalorata da altre ricerche (Cera C. Lombroso) [5] nelle quali si è constatato che la somministrazione di proteine ad animali adulti ma sottoposti a prolungato digiuno, provoca una A. D. S. molto bassa, simile o anche inferiore a quella osservata nei lattanti. Non si tratterebbe quindi di una particolare caratteristica del soma di animali giovani, ma più probabilmente questa bassa A. D. S. è in rapporto al differente compito plastico delle proteine introdotte.

Per quel che riguarda poi gli aminoacidi ed il R. G. essi sono stati esperimentati isolatamente dal Rubner, ed in modo particolare dal Lusk e la sua scuola, dalla scuola di U. Lombroso, di Schaeffer, di Terroine, Grafe, Wilehlmj ecc. [6]. Ma lo scopo principale di tutti questi autori era quello di dare una interpretazione del meccanesimo col quale tutte queste sostanze incidono sul metabolismo gassoso, mentre non si preoccupavano con-

(3) L. L. Miller, F. S. Robscheit-Robbins and G. H. Whipple, *Anemia and Hypoproteinemia*. « J. Exp. Biol. Med. », *85*, 267 (1947); D. V. Frost and W. C. Risser, *The Adequacy of Intravenous Partial Acid Hydrolysates of Casein and Fibrin for Nitrogen Balance in Dogs*. « J. Nutrition », *32*, 361 (1946); A. A. Albanese and *V.* Irby, « Science », *98*, 286, 1943). E. L. Stockstad, *Effect of Hydrolysis on the Nutritive Value of Casein*. « Poultry Sc. », *19*, 42 (1940).

(4) Ved. Cisi, « Il Problema Alimentare », *1* (1931).

(5) B. Cera e C. Lombroso, *Spesifisch Dynamische Virkung der vollwertingen Eiweissstoffe nach längeren Hungerperioden*. « Biochem. Zeitsch. », *296*, 28 (1938).

(6) Ved. G. Schaeffer et E. Le Breton, *L'Action Dynamique Spécifique des Protides*. « Monographie, Actualités Scient. et Ind. », *642*, Hermann e Co., Paris 1938 .

temporaneamente della loro partecipazione nel metabolismo azotato endogeno.

Dalle suddette numerose ricerche un dato di fatto era emerso: che cioè, mutando specie animale, alcuni aminoacidi, efficacissimi nell'esaltare il M. G. in una specie, lo erano molto meno o anche niente in altre specie.

Un altro dato di fatto che conviene segnalare per i suoi rapporti con l'argomento che qui trattiamo, è il seguente: se ad un animale (cane) somministriamo le proteine ematiche per via orale, esse manifestano come al solito una elevata A. D. S.; ma se invece di somministrare sangue per-os noi procediamo con ripetute transfusioni di sangue omologo, non si osservano modificazioni del R. G. (7).

Da quanto abbiamo succintamente ricordato, appariva logico il controllo sistematico sugli effetti che questi autolizzati di proteine producono sul metabolismo gassoso. Considerando che in questi preparati (ottenuti per idrolisi enzimatica) i vari aminoacidi allo stato libero si trovano in rapporti fra di loro equilibrati e corrispondenti a quelli in cui si trovano nella proteina originale, interessava paragonare il loro effetto sul metabolismo gassoso nelle due forme: proteina genuina e proteina autolizzata.

Infine, ricordando i risultati ottenuti con la somministrazione di proteine di sangue per bocca, così diversi da quelli ottenuti con l'introduzione parenterale, era interessante controllare gli effetti ottenuti sul M. G. con la somministrazione di tali autolizzati sia per via orale che per via parenterale.

Le nostre ricerche sono state praticate con cani cuccioli per metterci nelle stesse condizioni della maggior parte delle indagini dei precedenti autori, che degli autolizzati indagavano, con particolare attenzione, l'influenza sull'accrescimento.

Disposizione sperimentale e tabelle.

Abbiamo usato cinque cani in periodo di accrescimento, nati da 35 a 45 giorni prima dell'inizio dell'esperimento, tenuti alcuni a dieta ipoproteica per qualche settimana, altri a dieta normale di laboratorio. Abbiamo determinato in essi il normale ricambio respiratorio in condizioni di metabolismo basale con l'apparecchio a circuito aperto di Haldane, e quindi abbiamo ancora determinato il ricambio respiratorio dopo la somministrazione per via orale o parenterale (fleboclisi o ipodermoclisi a goccia) di un preparato del commercio (l'Amigen) (8), idrolizzato enzimatico della caseina nel quale l'N costituisce il 12 % in peso e gli aminoacidi sono presenti nella proporzione del 65 % dell'azoto totale. Abbiamo usato una soluzione al 10 % del detto preparato, somministrandola in quantità tale da fornire circa gr. 0,40 di azoto pro-kilo dell'animale. La fleboclisi o l'ipodermoclisi,

(7) V. Martini, *Sull'A. D. S. di Sangue Perfuso.* « Boll. Soc. It. Biol. Sp. », *12*, 313 (1937).

8 L'Amigen ci venne gentilmente offerto dalla ditta Mead and Johnson U. S. A.) che ringraziamo.

che duravano 50'–80' (a goccia), sono state ben tollerate; solo in qualche raro caso si avevano conati di vomito o emissione di flato e feci. La temperatura rettale, controllata prima e dopo la somministrazione dell'Amigen, non diede mai variazioni degne di nota.

TABELLA I.

N. del cane	trattamento	peso kg.	durata dell'esperienza	grammi di CO_2 emesso	grammi di O_2 consumato	quoz. respirat.	consumo di O_2 in gr. per kgr–ora	Variazione percentuale
1	Amigen per os	1,250	5 h	4,80	3,80	0,90	0,624	
			5 h	6,10	5,85	0,74	0,936	+ 50
1	Idem	1,250	5 h	3,9	3,10	0,91	0,498	
			5 h	4,53	3,95	0,84	0,632	+ 21
1	Idem	1,230	2 h	1,84	1,45	0,98	0,588	
			6 h	7,48	5,87	0,92	0,796	+ 26
2	Idem	1,140	3 h 1/2	3,50	2 75	0,81	0,689	
			6 h	9,09	5,13	0,90	0,750	+ 8
3	Idem	1,150	3 h	2,48	2,05	0,88	0,595	
			7 h	6,83	6,61	0,75	0,821	+ 38
4	Idem	1,870	6 h	8,08	7,05	0,83	0,630	
			6 h	8,17	7,35	0,80	0,650	+ 3
5	Idem	2,100	4 h	6,35	5,12	0,90	0,610	
			4 h	6,87	5,89	0,85	0,700	+ 15
5	Idem	2,100	4 h	5,97	5.11	0,85	0,605	
			8 h	14,24	12,04	0,86	0,713	+ 18
1	Caseina per os	1,350	3 h	2,85	2,30	0,90	0,570	
			6 h	7,00	5,49	0,92	0,678	+ 17
3	Idem	1,200	3 h	2,29	1,87	0,85	0,520	
			6 h	5,32	4,75	0,81	0,660	+ 27

Riportiamo nella tabella I i risultati ottenuti dopo la somministrazione per os di Amigen; nella stessa tabella sono riferiti anche i risultati ottenuti in due cani dopo l'ingestione di caseina in quantità corrispondente a gr. 0,40 di N pro kilo dell'animale. Nella Tabella II riportiamo i dati ottenuti con la somministrazione dell'idrolizzato per via parenterale.

Tabella II.

N. del cane	trattamento	peso kg.	durata dell'esperienza	grammi di CO_2 emesso	grammi di O_2 consumato	quoz. respirat.	consumo di O_2 in gr. per kgr-ora	variazione percentuale
1	Amigen ipoder.	1,190	5 h	3,30	2,80	0,85	0,678	
			5 h	1,80	1,45	0,90	0,243	— 49
1	Idem	1,390	3 h	2,66	2,25	0,86	0,572	
			6 h	2,015	2,53	0,87	0,322	— 43
2	Idem	1,080	3 h	3,35	2,70	0,90	0,820	
			5 h	3,94	3,90	0,73	0,722	— 11
3	Idem	1,160	3 h	2,12	1,86	0,83	0,535	
			6 h	2,97	2,47	0,88	0,355	— 32
1	Amigen flebocl.	1,300	3 h	3,25	3,05	0,73	0,782	
			5 h	4,65	4,22	0,80	0,650	— 17
1	Idem	1,610	3 h	3,25	3,05	0,73	0,782	
			7 h	5,77	5,77	0,73	0,502	— 24
5	Idem	2,200	4 h	7,09	6,07	0,85	0,690	
			7 h	8,77	9,19	0,78	0,532	— 23
5	Idem	2,200	4 h	6,60	5,98	0,80	0,680	
			7 h	8,58	7,70	0,81	0,500	— 26

Dalle tabelle qui esposte risultano alcuni dati di fatto, per quanto riguarda gli effetti sul metabolismo gassoso da parte di autolizzati proteici (Amigen) somministrati a cani cuccioli, che riassumiamo brevemente:

1° L'introduzione parenterale, endovena o sottocute, di autolizzati di caseina, provoca nei cani in via di accrescimento un fenomeno inverso a quello che si poteva attendere in base alla A. D. S. delle proteine, e cioè un piuttosto ingente abbassamento del consumo di O_2.

2° La somministrazione orale degli stessi autolizzati nelle medesime condizioni sperimentali e in quantità eguali a quelle usate parenteralmente, provoca una netta A. D. S. Tanto più considerevole se si tiene presente quanto si è detto nei riguardi della A. D. S. nell'animale in via di accrescimento, dove cioè essa è assai meno cospicua che nell'organismo adulto.

3° In esperienze di controllo, la somministrazione della proteina genuina (caseina) in quantità eguale o maggiore a quella somministrata quale autolizzato negli stessi animali e nelle stesse condizioni sperimentali,

provoca pure una netta esaltazione del M. G. Dato che queste ultime indagini sono state già ampiamente trattate nella letteratura, ci siamo limitati a condurre solo poche esperienze di questo tipo.

Il dato di fatto più interessante che emerge da queste nostre prime indagini, è il fenomeno dell'abbassamento nel consumo di O_2 dopo l'introduzione parenterale di autolizzati di caseina, in contrasto a quanto avviene se gli autolizzati si somministrano oralmente. Tenteremo di analizzare il significato di tale dato, dopo avere esposto i risultati ottenuti in ricerche eseguite su cani adulti, tuttora in corso.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 novembre 1948

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Intorno ad un problema del Lebesgue sui gruppi di punti associati*(*). Nota(**) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

1. Due questioni ben note, che ripetutamente attirarono l'attenzione degli studiosi, concernono l'analisi dei l e g a m i che intercorrono fra i nove punti base di un fascio di cubiche piane e di quelli fra gli otto punti base di una rete di quadriche, legami implicanti fra l'altro la possibilità di c o s t r u i r e l i n e a r m e n t e l'ulteriore punto comune a tutte le cubiche che contengono otto punti genericamente assegnati su di un piano, come pure l'ulteriore punto comune a tutte le quadriche passanti per sette punti genericamente assegnati nello spazio(1). Di tali c o s t r u z i o n i si occupò anche il Lebesgue, come appare da una comunicazione ch'egli

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna, comunicato nel settembre 1948 al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1948.

(1) Sulla prima delle suddette questioni cfr. T. WEDDLE, « Cambridge Dublin Journ. », *6* (1851) 83; A. HART, « Cambridge Dublin Journ. », *6* (1851) 181 e « Quartely Journ. », *22* (1887) 199, nonchè i vari lavori di CHASLES, CAYLEY, ecc. citati in G. KOHN-G. LORIA, *Spezielle ebene algebraische Kurven*, « Encykl. der Math. Wiss. », Bd. III, 2. Th., 1. Hälfte, 457-570, note (146)-(148). Sulla seconda questione ved. la Tesi di O. HESSE, per esempio in *Gesammelte Werke* (München, 1897), 21-49, ed i lavori di SCHRÖTER, STAUDT, SERRET, ecc. citati in O. STAUDE, *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven*, « Encykl. der Math. Wiss. », Bd. III, 2. Th., 1. Hälfte, 161-256, note (541)-(549). Le due questioni possono venire fra loro strettamente collegate, come risulta da J. H. ENGEL, « Wolf's Zeitschr. », *34* (1889) 299 e da H. PIQUET, « Bull. Soc. Math. France », *22* (1894) 19; esse rientrano in un importante problema generale, che può opportunamente venir accostato dal punto di vista algebrico-differenziale, intorno al quale ved. B. SEGRE, *Sui teoremi di Bézout, Jacobi e Reiss*, « Ann. di Mat. », (4) *26* (1947), 1-26.

fece nel 1927 alla « Société Mathématique de France » [2], alla quale chi scrive ebbe la ventura di essere presente. In quell'occasione il Lebesgue modestamente confessò di essersi posto invano il problema – ch'egli tuttavia continuava a ritenere solubile – di caratterizzare intrinsecamente le relazioni fra i nove punti base di un fascio di cubiche e quelle fra gli otto punti base di un fascio di quadriche, facendo essenzialmente intervenire la simmetria di tali relazioni e l'univocità con cui, mediante esse, uno qualsiasi di quei nove od otto punti resta individuato dai rimanenti.

Usando una locuzione da me recentemente introdotta [3], il suaccennato *problema di Lebesgue* può venire meglio precisato come segue. I gruppi di punti associati rispetto alle cubiche di un piano – e cioè i gruppi caratteristici del sistema lineare formato da tutte le cubiche di un piano – costituiscono su questo una $\mathfrak{I}_9^{16}$, ossia un'involuzione ∞^{16} di gruppi G_9 di nove punti: si tratta di *caratterizzare tale involuzione fra tutte le* $\mathfrak{I}_9^{16}$ *del piano* [4]; e similmente per la $\mathfrak{I}_8^{21}$ dei gruppi di punti associati rispetto alle quadriche dello spazio. È anzi chiaro come analoghe questioni possano venire poste più generalmente per involuzioni sopra superficie o varietà algebriche, ottenendosi così un nuovo – attraente ma difficile – campo di ricerche [5].

Il problema di Lebesgue, anche circoscritto alle due involuzioni dianzi considerate, offre manifestamente una certa indeterminatezza; nel presente lavoro io ne dò due soluzioni, di tipi assai diversi, espresse dai seguenti teoremi.

Teorema I. – *L'involuzione dei gruppi associati rispetto alle cubiche di un piano, è l'unica* $\mathfrak{I}_9^{16}$ *che sia mutata in sè dalle* ∞^8 *omografie del piano.*

Teorema II. – *La suddetta involuzione è altresì l'unica* $\mathfrak{I}_9^{16}$ *tale che, fissati nel piano sette punti generici e scelto comunque un punto ulteriore, vi sia un sol gruppo della* $\mathfrak{I}_9^{16}$ *che contenga gli otto punti considerati se, e soltanto se, questi sono distinti fra loro.*

Il teorema I equivale manifestamente al

Teorema I'. – *Le cubiche di un piano passanti per otto dati punti contengono tutte di conseguenza un nono punto, il quale è l'unico punto che*

(2) L'annunzio della quale trovasi a p. 27 dei «Comptes Rendus des Séances», 55 (1927).

(3) B. Segre, *Osservazioni sulle involuzioni piane più volte infinite*. « Bollettino Un. Mat. Ital. » (3) 3 (1948) 196–200.

(4) Si noti che, assoggettando la $\mathfrak{I}_9^{16}$ inizialmente considerata alle varie trasformazioni cremoniane del suo piano, si hanno ancora delle $\mathfrak{I}_9^{16}$, sicchè le $\mathfrak{I}_9^{16}$ di un piano sono certamente in numero infinito. Va anzi rilevato che, in base al n. 5 del lavoro citato in (3), *le infinite* $\mathfrak{I}_9^{16}$ *ottenibili nel modo indicato non esauriscono neppure tutte le* $\mathfrak{I}_9^{16}$ *del piano*, una $\mathfrak{I}_9^{16}$ ulteriore essendo per esempio data dalla *totalità dei* G_9 *di un piano euclideo aventi un dato baricentro.*

(5) L'unico risultato in quest'ordine d'idee, che sia noto allo scrivente, è quello dell'*Addendum* in B. Segre, *On arithmetical properties of quartic surfaces*, « Proc. London Math. Soc. » (2), 49 (1947), 343–395, implicante per esempio che *la superficie generale dello spazio ordinario d'ordine* $n \geq 4$ *non contiene nessuna* $\mathfrak{I}_3^4$.

– *insieme a quegli otto – dia nove punti tali che ciascuno di questi sia un medesimo covariante proiettivo degli altri otto.*

La dimostrazione dei teoremi I ed I', esposta nel n. 2, si trasporta senza alcuna difficoltà allo spazio, col sostituire quartiche di prima specie alle cubiche piane; ciò fornisce teoremi del tutto analoghi ai suddetti – e che, per brevità, ometto di enunciare – relativi ai gruppi di otto punti associati rispetto alle quadriche dello spazio. Non altrettanto agevole riesce l'estensione allo spazio del teorema II, e di essa qui non mi occupo.

2. Per stabilire i teoremi I ed I', suppongasi che otto punti $P_1, P_2, \cdots, P_8$ di un piano π ammettano come covariante proiettivo un nono punto

$$P_9 = F(P_1, P_2, \cdots, P_8), \tag{1}$$

di guisa che la relazione fra i nove punti P risulti simmetrica; si tratta di far vedere che questi nove punti sono i punti base di un fascio di cubiche. Procederemo per assurdo, ammettendo che così non sia, talchè in generale vi sarà una ed una sola cubica – diciamola Γ – passante per i punti $P_1, P_2, \cdots, P_8, P_9$. In base alle ipotesi precedenti, il gruppo G_9 di questi punti risulta variabile in una $\mathfrak{I}_9^{16}$ mutata in sè da ciascuna delle ∞^8 omografie di π: fra le cubiche Γ definite dai vari G_9 di $\mathfrak{I}_9^{16}$, si hanno pertanto tutte le trasformate omografiche di una qualunque di esse. Tenuto conto dell'irriducibilità di $\mathfrak{I}_9^{16}$ (6), ne consegue che possono soltanto presentarsi due casi secondochè, al variare di G_9 in $\mathfrak{I}_9^{16}$,

a) Γ *descrive il sistema continuo* ∞^8, Σ_c, *formato dalle cubiche di* π *di dato modulo* c; oppure

b) Γ *può identificarsi con una qualunque delle* ∞^9 *cubiche del piano.*

Nell'ipotesi *a*), gli otto punti $P_1, \cdots, P_8$ possono venire scelti arbitrariamente sulla generica Γ di Σ_c. Invero, in caso contrario, vi sarebbero su Γ al più ∞^7 posizioni per essi, talchè G_9 potrebbe avere in π non più di ∞^{8+7} posizioni, mentre esso invece ne assume ∞^{16}. Scelti genericamente in π otto punti $P_1, P_2, \cdots, P_8$, esiste certamente più di una curva Γ di Σ_c che li contenga, in quanto il sistema Σ_c non è lineare; e ciascuna di tali curve deve potersi collegare nel modo indicato ai punti $P_1, P_2, \cdots, P_8$, in base a quanto si è detto al principio del capoverso. Ma si è visto – per contro – che i punti $P_1, P_2, \cdots, P_8$ definiscono una sola Γ, onde l'alternativa *a*) resta esclusa.

Poniamoci ora nell'ipotesi *b*). Attualmente le posizioni assunte dai punti $P_1, P_2, \cdots, P_8$ sulla generica Γ dipendono da $16 - 9 = 7$ parametri, sicchè fra i punti $P_1, P_2, \cdots, P_8$ di una Γ siffatta intercede una ed una sola relazione:

$$\Phi(P_1, P_2, \cdots, P_8) = 0, \tag{2}$$

(6) Cfr. B. SEGRE, loc. cit. in (3), n. 2.

necessariamente analitica (anzi algebrica) e simmetrica. Introdotto su Γ – nel modo ben noto – un parametro ellittico uniformizzante, u, e detto u_i il parametro che compete su Γ (moduli i periodi) al punto P_i $(i = 1, 2, \cdots, 9)$, le (1), (2) si traducono in relazioni analitiche

$$u_9 \equiv f(u_1, u_2, \cdots, u_8) \qquad \text{(mod. per.)}, \tag{3}$$

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_8) = 0, \tag{4}$$

nelle quali le u_i potranno venire permutate arbitrariamente fra loro. In particolare dunque, accanto alla (3), sussisterà la

$$u_1 \equiv f(u_9, u_2, \cdots, u_8) \qquad \text{(mod. per.)}. \tag{5}$$

Posto per abbreviare

$$f_i = \frac{\partial f(u_1, u_2, \cdots, u_8)}{\partial u_i} \quad , \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi(u_1, u_2, \cdots, u_8)}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 8),$$

si osservi che non è restrittivo supporre s e m p l i c e il generico zero della $\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_8)$, e cioè che non risulti $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_8 = 0$ in forza della (4), a ciò potendoci sempre ridurre col sostituire a φ una sua potenza d'indice (frazionario) conveniente.

Ciò premesso, rileviamo che – in base a quanto sopra – i parametri relativi ai punti $P_2, \cdots, P_8$ debbono essere fra loro funzionalmente indipendenti, sicchè dalla (4) si deduce

$$u_1 = u_1(u_2, \cdots, u_8) \quad , \quad \text{con } \frac{\partial u_1}{\partial u_2} = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \text{ ecc.} \tag{6}$$

Eliminando u_1 ed u_9 fra le (3), (5), (6), si ottiene la seguente identità nei suddetti parametri

$$u_1(u_2, \cdots, u_8) \equiv f\{f[u_1(u_2, \cdots, u_8), u_2, \cdots, u_8], u_2, \cdots, u_8\} \qquad \text{(mod. per.)};$$

ed ora, derivando i due membri di questa rapporto ad u_2, si ricava

$$-\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = f_1\left(-f_1\frac{\varphi_2}{\varphi_1} + f_2\right) + f_2,$$

ossia

$$(f_1 + 1)\left[\varphi_2 - \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(u_1, u_2)}\right] = 0, \tag{7}$$

questa essendo un'identità in forza della (6).

L'espressione che compare nella (7) entro parentesi quadre non può annullarsi identicamente, quando vi si esprima u_1 mediante la (6). Invero, in caso contrario, per ragioni di simmetria varrebbero le

$$\varphi_j = \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(u_i, u_j)} = -\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(u_j, u_i)} = -\varphi_i \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, 8)$$

in conseguenza della (4); queste implicherebbero le

$$\varphi_i + \varphi_j = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, 8),$$

e quindi le

$$\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 8),$$

le quali invece per ipotesi non discendono dalla (4).

La (7) fornisce pertanto $f_1 = -1$, sicchè – ancora causa la simmetria – valgono le

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_8 = -1,$$

e quindi la (3) può scriversi nella forma

$$u_9 \equiv c - (u_1 + u_2 + \cdots + u_8) \qquad \text{(mod. per.)},$$

con c costante, avente un ovvio significato geometrico. Ne consegue che la (4) equivale alla

$$\varphi [c - (u_1 + u_2 + \cdots + u_8), u_2, \cdots, u_8] = 0,$$

ossia che questa relazione è identicamente soddisfatta quando vi si esprima u_1 mediante la (6). Derivando rapporto ad u_2 ambo i membri dell'identità in tal guisa ottenuta, ne risulta

$$\varphi_1 \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} - 1\right) + \varphi_2 = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad -\varphi_1 + 2\varphi_2 = 0,$$

in virtù della (4). Ma allora si ha, più generalmente,

$$\varphi_i = 2\varphi_j \qquad (i \neq j \; ; \; i, j = 1, 2, \cdots, 8),$$

e quindi

$$\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 8),$$

mentre invece queste relazioni non discendono dalla (4).

La contraddizione a cui così siamo giunti, dimostrando l'assurdità dell'ipotesi ammessa nel primo capoverso di questo numero, prova la verità dei teoremi I ed I'.

3. Presa una qualunque $\mathfrak{F}_9^{16}$ piana e fissati nel piano sette punti generici $P_1, P_2, \cdots, P_7$, consideriamo la $\mathfrak{F}_2^2$ residua di questi rispetto a quella e la trasformazione cremoniana involutoria, T_3, da essa definita. L'ipotesi del teorema II (n. 1) equivale a ciò che T_3 *ammetta precisamente i sette punti* P *come fondamentali*. Questa condizione è intanto soddisfatta nel caso che $\mathfrak{F}_9^{16}$ sia l'involuzione dei G_9 associati rispetto alle cubiche del piano. Allora infatti $\mathfrak{F}_2^2$ riducesi all'involuzione, $\mathfrak{I}$, delle coppie di punti formanti la residua intersezione di due cubiche variabili per i sette punti P; la corrispondente T_3 muta quindi le rette del piano in curve dell'ottavo ordine passanti triplamente per ciascuno dei sette punti P, ed ha come fondamentali precisamente questi punti, trasformando uno qualunque di essi nella cubica che passa doppiamente per tale punto e semplicemente per i rimanenti sei. Notiamo che *la suddetta condizione non è invece soddisfatta per l'involuzione* $\mathfrak{F}_9^{16}$ *definita alla fine della nota* (4), in quanto per essa T_3 riducesi alla simmetria rispetto ad un punto, ed è quindi priva di punti fondamentali.

Per stabilire il teorema II, basterà ora mostrare che:

Una trasformazione cremoniana piana involutoria, $T_{\mathfrak{I}}$, *i cui punti fondamentali siano sette punti* $P_1, P_2, \cdots, P_7$ *generici di un piano che per essa abbiano una medesima molteplicità, deve necessariamente coincidere colla suddetta* $T_{\mathfrak{I}}$.

Supponiamo che $T_{\mathfrak{I}}$ muti le rette del piano in curve d'ordine n aventi molteplicità $k\ (>0)$ in ciascuno dei sette punti P. Esprimendo che queste curve formano una rete omaloidica, si ottengono le equazioni

$$n^2 - 1 = 7k^2, \qquad 3(n-1) = 7k,$$

da cui si deduce

$$n = 8, \qquad k = 3.$$

Poichè $3 \cdot 8 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot 3$, così tale rete ha per fondamentali le sette cubiche Γ che passano doppiamente per uno dei punti P e semplicemente per gli altri sei. Ne discende che $T_{\mathfrak{I}} = T_{\mathfrak{I}}^{-1}$ muta ciascun punto P in una di quelle cubiche Γ, sicchè essa dovrà trasformare una generica cubica per i punti P in una curva d'ordine

$$3 \cdot 8 - 7 \cdot 1 \cdot 3 = 3,$$

passante per ciascun punto P con molteplicità

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Dunque $T_{\mathfrak{I}}$ muta in sè la rete R delle cubiche per i sette punti P, e quindi pure l'involuzione $\mathfrak{I}$ da questa definita. Dobbiamo dimostrare che $T_{\mathfrak{I}}$ coincide con $T_{\mathfrak{I}}$, ossia che $T_{\mathfrak{I}}$ lascia fisse le singole coppie di punti di $\mathfrak{I}$.

A tal uopo osserviamo che, rappresentando linearmente R su di un piano rigato ρ, otteniamo in ρ un piano doppio avente come curva D di diramazione una q u a r t i c a p i a n a g e n e r a l e. La $T_{\mathfrak{I}}$ dà così in ρ una trasformazione cremoniana, T_{ϱ}, che muta in sè la D, ed è quindi o m o g r a f i c a, essendo necessariamente tale ogni trasformazione unirazionale che faccia passare da una curva irriducibile ad una curva piana priva di punti multipli, e del suo stesso ordine maggiore di tre [7]. Ne consegue che T_{ϱ} è l' i d e n t i t à, ossia $T_{\mathfrak{I}}$ lascia effettivamente fisse le singole coppie di punti di $\mathfrak{I}$, in quanto una curva piana generale d'ordine maggiore di tre non è mutata in sè da nessuna trasformazione omografica non identica [8].

(7) Cfr. B. Segre, *Sulle curve algebriche che ammettono come trasformata razionale una curva piana dello stesso ordine, priva di punti multipli*, «Math. Ann.», 109 (1933), 1-3.

(8) Ved. per esempio F. Enriques, O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III (Bologna, Zanichelli, 1924), p. 311.

Matematica (Geometria). — *Sulle* V_n *contenenti più di* $\infty^{n-k} S_k$ (*). Nota I (**) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

1. In tutto il presente lavoro ci poniamo dal punto di vista della geometria proiettiva differenziale, considerando – in uno spazio proiettivo S_r – porzioni sufficientemente ristrette di varietà, per le quali valgano opportune condizioni di derivabilità (agevolmente deducibili dal contesto). Suppongasi che una varietà V_n siffatta contenga un'infinità di S_k ($0 < k < n$); allora gli S_k situati su V_n si distribuiscono in uno o più sistemi continui completi, ossia non ampliabili, e sia $d = d(n, k)$ la dimensione di uno di questi. Tale dimensione può anzitutto assumere uno dei valori $1, 2, \cdots, n-k$, costruendosi in modo ovvio tutte le V_n per cui ciò accade. Le cose vanno invece assai diversamente se si vuole che risulti $d > n-k$, essendo tutt'altro che immediata la risoluzione dei due seguenti problemi.

a) *Determinare quali siano i valori interi maggiori di* $n-k$ *effettivamente raggiungibili dalla suddetta dimensione* $d = d(n, k)$, *quando si prescrivano* n *e* k ($0 < k < n$).

b) *Classificare le* V_n *contenenti* $\infty^d S_k$, *ove* d *soddisfi alle condizioni di cui in* a).

Non pare che il problema *a*) fosse stato posto prima d'ora; ma alcuni casi particolari del problema *b*) furono già trattati da Severi, Terracini, Togliatti e Bompiani, secondo quanto verrà specificato in seguito. In questa Nota I diamo intanto alcuni esempi, che poi ci serviranno, di V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$; i problemi *a*) e *b*) verranno quindi risolti sotto ipotesi abbastanza generali in una successiva Nota II, la quale mostrerà inoltre come lo studio di casi ulteriori presenti un ampio ed interessante campo di ricerche. Rinviando al testo per gli enunciati completi, segnaliamo soltanto fra i risultati conseguiti che il *massimo* di d per dati n e k ($0 < k < n$) vale

$$\delta = \delta(n, k) = (k+1)(n-k), \tag{1}$$

tale massimo essendo raggiunto quando e soltanto quando V_n è un S_n, e che, se e soltanto se $k > 1$, esistono fra $n-k$ e δ *valori lacunari* di d, ossia valori interi non assunti da $d(n, k)$ per nessuna V_n.

Va rilevato che, nel trattare i problemi *a*) e *b*), si può supporre senza restrizione – come noi sempre faremo – che *gli* $\infty^d S_k$ *di* V_n *invadano questa varietà*, e cioè non ricoprano una V_m di dimensione $m < n$. Invero, in caso contrario, basterebbe nello studio di quei problemi sostituire V_m a V_n, e quindi m ad n.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna, comunicato nel settembre 1948 al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1948.

2. L'esempio più semplice di V_n contenente più di $\infty^{n-k} S_k$ è l'S_n, per il quale ovviamente risulta $d(n, k) = \delta$, ove δ si esprima mediante la (1).

Ne consegue che *per ogni* V_n *luogo di* $\infty^r S_{n-r}$ $(1 \leq r \leq n-k)$ *sussiste la relazione*

$$d(n, k) \geq r + (k+1)(n-r-k) = \delta(n, k) - rk,$$

dove in generale vale il segno di uguaglianza.

Dando qui a k il valore 1 e ad r i valori $1, 2, \cdots, n-k-1$, si vede che *per* $k = 1$, $d(n, k)$ *può assumere tutti i valori compresi fra* $n-k$ *e* δ.

3. Riferiamoci in secondo luogo ad una quadrica V_n^2 di S_{n+1}, eventualmente degenere ma irriducibile, ossia specializzata h volte essendo

$$0 \leq h \leq n-1. \tag{2}$$

La massima dimensione degli spazi lineari situati su V_n^2 è allora notoriamente $\left[\frac{n+h}{2}\right]$, ed ogni spazio di dimensione massima contiene l'$S_{\ }$, doppio di V_n^2 [1]. Poichè ogni S_k di V_n^2 sta su almeno uno spazio di dimensione massima, così dovrà essere

$$2k \leq n-h \tag{3}$$

se si vuole che S_k possa risultare sghembo con S_{h-1}.

Inversamente, nell'ipotesi che valga la (3) un S_k generico di V_n^2 sarà sghembo con S_{h-1}, e potrà determinarsi fissando genericamente k iperpiani $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k$ di S_{n+1} e procedendo come segue. Si scelga un punto P_1 generico di V_n^2, e si consideri il relativo iperpiano tangente τ_1; indi si scelga un punto P_2 generico sulla V_{n-2}^2 intersezione di V_n^2, π_1, τ_1, e si consideri l'iperpiano τ_2 ivi tangente a V_n^2, ecc.; si scelga infine un punto P_{k+1} generico sulla V_{n-2k}^2 intersezione di $V_n^2, \pi_1, \tau_1, \cdots, \pi_k, \tau_k$. Lo spazio congiungente i $k+1$ punti P è un S_k di V_n^2 e, reciprocamente, ogni generico S_k di V_n^2 si ottiene in tal guisa in infiniti modi, quale congiungente il punto P_1 scelto genericamente su esso, il punto P_2 scelto genericamente nell'S_{k-1} intersezione di S_k e π_1, ecc., il punto P_{k+1} intersezione di S_k e $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k$.

Dunque, *se valgono le* (2), (3), *la totalità degli* S_k *giacenti su di una* V_n^2 *specializzata* h *volte ha dimensione*

$$d = n + (n-2) + (n-4) + \cdots + (n-2k) - [k + (k-1) + \cdots + 1] =$$
$$= (k+1)(2n-3k)/2 = \delta - k(k+1)/2,$$

la quale quindi risulta indipendente da h [2].

(1) Cfr. per esempio E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed. (Messina, Principato, 1923), cap. VI, nn. 6, 17.

(2) Per $h = 0$, cfr. BERTINI, *op. cit.*, cap. VI, n. 16.

4. Ferme restando le notazioni del n. 3, suppongasi che non valga la (3), e cioè che

$$n - h < 2k; \tag{4}$$

ora affinchè su V_n^2 vi sia qualche S_k dev'essere inoltre

$$2k \leq n + h, \tag{5}$$

in quanto ogni S_k di V_n^2 giace sopra qualche spazio di V_n^2 avente dimensione massima, $\left[\frac{n+h}{2}\right]$, sicchè – in forza delle (4), (5) – risulta necessariamente $h > 0$. Nelle ipotesi attuali, un S_k generico di V_n^2 si appoggia all'S_{h-1} doppio di V_n^2 secondo uno spazio di dimensione

$$l = k + (h-1) - \left[\frac{n+h}{2}\right] = k - \left[\frac{n-h}{2}\right] - 1,$$

e può ottenersi univocamente congiungendo un S_l generico di S_{h-1} ed uno spazio di dimensione $k' = \left[\frac{n-h}{2}\right]$ scelto genericamente sulla $V_{n'}^2$ sezione di V_n^2 con un generico spazio di dimensione $n + 1 - (k - k') = n - l$ dell'S_{n+1} ambiente. Tale $V_{n'}^2$ ha dimensione $n' = n - l - 1$, ed è specializzata $h' = h - l - 1$ volte; siccome risulta

$$0 \leq h' \leq n' - 1 \quad , \quad 2k' \leq n' - h',$$

così ad essa può venir applicato il risultato del n. 3.

Dunque, *se valgono le* (2), (4), (5), *la totalità degli* S_k *giacenti su di una* V_n^2 *specializzata h volte ha dimensione*

$$d = (l+1)(h-l-1) + (k'+1)(2n' - 3k')/2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2n-3k)}{2} + \frac{1}{2}\left\{k - \left[\frac{n-h}{2}\right]\left\{\left\{k + 3\left[\frac{n-h}{2}\right] - 2(n-h) + 1\right\}\right\}\right\}.$$

5. Dai nn. 3, 4 si deduce come corollario immediato che:

Una V_n *luogo di* $\infty^r V_{n-r}^2$ *specializzate h volte* $(0 \leq h \leq n - r - 1)$, *e per la quale risulti*

$$2k \leq n - r - h \qquad od \qquad n - r - h < 2k \leq n - r + h,$$

contiene generalmente $\infty^d S_k$, *ove d si esprime rispettivamente colla*

$$d = \frac{(k+1)(2n-3k)}{2} - kr$$

oppure colla

$$d = \frac{(k+1)(2n-3k)}{2} -$$

$$- kr + \frac{1}{2}\left\{k - \left[\frac{n-r-h}{2}\right]\left\{\left\{k + 3\left[\frac{n-r-h}{2}\right] - 2(n-r-h) + 1\right\}\right\}\right\}.$$

La seconda alternativa sussiste in particolare se

$$h = n - r - 3 \geqq 1 \quad , \quad k \geqq 2 ,$$

qualora si supponga

$$r \leqq n - k - 2 .$$

Tenuto conto della (1), per le corrispondenti V_n risulta quindi

$$d = \delta(n , k) - (kr + 2k - 1) .$$

Notiamo in particolare che, preso $k = 2$ ed assunto $r = n - 4$, $n - 5 , \cdots , 1 , 0$, dall'ultima relazione si ricava ordinatamente

$$d = n - 1 , n + 1 , \cdots , 3n - 11 , 3n - 9 .$$

D'altro canto, alle V_n considerate nel secondo capoverso del n. 2 compete ordinatamente per $k = 2$ ed $r = n - 3 , n - 4 , \cdots , 2 , 1$ il carattere

$$d = n , n + 2 , \cdots , 3n - 10 , 3n - 8 .$$

Vediamo così che:

L'infinità d dei piani situati su di una V_n $(n \geqq 3)$ *può assumere tutti i valori interi compresi fra* $n - 2$ *e* $\delta(n , 2) = 3n - 6$, *fatta al più eccezione per il valore* $d = 3n - 7$.

Risulterà poi (Nota II, n. 9) che questo, per $k = 2$, è effettivamente un valore lacunare di d.

6. Suppongasi che vi siano due interi

$$h \geqq 1 \quad , \quad r \geqq 2 ,$$

tali che risulti

$$n = k + hr \quad , \quad r \geqq k .$$

Potremo in tal caso definire, come ora vedremo, delle V_n^ν *algebriche* (d'ordine ν, dato nel seguente capoverso) *contenenti* $\infty^{n-k+h} S_k$.

All'uopo consideriamo la *varietà grassmanniana* W *di indici* $h + r , h$, rappresentante gli S_h di un S_{h+r}. È ben noto [3] che W ha dimensione

$$\sigma = (h + 1) r ,$$

ordine

$$\nu = \frac{1 ! \, 2 ! \cdots h ! \, \sigma !}{r ! (r + 1) ! \cdots (r + h) !} ,$$

ed appartiene ad uno spazio S_ϱ di dimensione $\varrho = \binom{h + r + 1}{h + 1} - 1$; inoltre W contiene ∞^d spazi S_r, ove

$$d = h(r + 1) = n - k + h ,$$

(3) Cfr. H. SCHUBERT, «Mitteil. der Math. Ges. Hamburg», *1* (1884), 87; F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, «Ann. di Mat.», (3) *24* (1915), 89.

ciascuno di tali S_r rappresentando la totalità degli S_n di S_{h+r} che contengono un dato S_{h-1} di S_{h+r}. La sezione di W con un generico $S_{\varrho+k-r}$ di S_ϱ è pertanto una varietà algebrica d'ordine ν, che appartiene ad $S_{\varrho+k-r}$, ha dimensione

$$\sigma + k - r = n,$$

e contiene gli ∞^d spazi – di dimensione k – segati su $S_{\varrho+k-r}$ dai suddetti ∞^d S_r.

Il Terracini ha dimostrato che le varietà W ottenibili in particolare da quanto precede per $h = 1$, $r = k$, $n = 2k$, e le proiezioni di queste, sono *le sole* V_{2k} *appartenenti a spazi di dimensione maggiore di* $k(k+1)/2 + 1$ *per le quali risulti* $d(2k, k) = k + 1$ [4].

Meccanica. — *Dinamica ed Aerodinamica dei fili.* – III. *Problemi non lineari delle vibrazioni visibili.* Nota [*] del Corrisp. GIULIO KRALL.

In due Note precedenti [1] ho trattato delle vibrazioni visibili dei fili conduttori di un elettrodotto e di quelle, in certo senso invisibili, ma acusticamente ben percettibili, prodotte dalle scie vorticose di Kármán. Nella Nota I ho risolto, con più o meno tacite limitazioni, il problema: Data una condotta di determinate caratteristiche: corda L, freccia f, peso per unità di lunghezza $\mu_0 g$, fune di raggio r, con distanziamento Δ, in lungo esercizio *senza inconvenienti* (nessun accostamento di corto-circuito), trovare il distanziamento Δ' per una condotta di caratteristiche L', f', r', μ_0'.

Ho desunte, a seconda delle perturbazioni (che supponevo dilatarsi con similitudine dalla campata L su quella L', ad esempio per una forza armonica $p = p_0 \cdot \sin \nu t \cdot \sin \frac{\pi}{L} x$ su L, una $p' = p_0' \cdot \sin \nu' t \cdot \sin \frac{\pi}{L'} x$ su L', con ν , ν' tali da dar luogo, in ogni caso, al sincronismo) varie formule, molto semplici, che, più o meno, ricordano sempre quelle degli elettricisti, secondo le quali il distanziamento ha da crescere con la radice della freccia f della catenaria.

Per questo certo qual riattaccarsi all'acquisito non sembrò che il contributo fosse del tutto da non considerare per quanto non proprio completamente esauriente e soddisfacente: venne quindi spontaneo il chiedere da parte di alcuni colleghi, in particolare i proff. R. Suyver, H. Lewy, quel che avveniva per le *grandi* oscillazioni, e per leggi di resistenza aerodinamica non più lineari – assai problematiche – ma quadratiche nella velocità. Sembrò

(4) Cfr. A. TERRACINI, *Sulle varietà di spazî con carattere di sviluppabili*, « Atti Acc. Sc. Torino », *48* (1912–13), 297–319, n. 10.

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Questi « Rend. », fasc. 1–2 ser. VIII, vol. III, 1947.

inoltre interessante concretare in formule le brillanti considerazioni qualitative di J. P. den Hartog sulle azioni aerodinamiche (portanza in regime non stazionario) conseguenti alla scia di Prandtl. Di questa ho fatto cenno alla fine della Nota II nella quale avevo studiate le vibrazioni acustiche, conseguenti a quel periodico distaccarsi dei vortici che si raccolgono in una scia, cosidetta di Kármán, che è la vera origine della resistenza idraulica. Qui riprendo anche questo problema studiando il sincronismo del filo sul periodo di distacco in presenza di resistenze quadratiche e non più viscose.

Senza affrontare globalmente questa folla di quistioni comincio gradualmente a separarle, anche perchè ciò è necessario per una, sia pur modesta, sistematica risolutiva quale è quella che vado a proporre.

Comincio dalle grandi oscillazioni di terzo grado, senza azioni dissipative di sorta, quindi senz'altro sintetizzabili nel principio dell'Hamilton, con simboli notissimi,

$$(25) \qquad \delta \int_0^t (T + U)\, dt = 0.$$

Considerando gli spostamenti trasversali w e orizzontali u si ha, posto $\frac{\partial}{\partial x} = (\,)'$, $\frac{\partial}{\partial t} = (\,)^{\cdot}$,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \mu_0 (\dot{w}^2 + \dot{u}^2)\, ds \quad , \quad ds = \sqrt{1 + y_0'^2}\, dx,$$

$$U = -H_0 \int_0^L \left\{ \sqrt{1 + (y_0' + w')^2 + u'^2} - \sqrt{1 + y_0'^2} \right\} dx,$$

essendo: H_0 la spinta costante, equilibrata con contrappeso ad un estremo del filo, considerato inestensibile, $y_0 = y_0(x)$ l'equazione della catenaria.

Da qui, scrivendo le *euleriane* corrispondenti a $w = u = 0$ agli estremi, si traggono le due equazioni per le oscillazioni libere orizzontali e trasversali di un filo disposto lungo una configurazione qualunque $y_0 = y_0(x)$.

In questi primi accostamenti ammetterò però $y_0 = 0$, $u = 0$ il che è molto restrittivo, ma ciò si vorrà consentire per incominciare a vedere qualcosa.

Sviluppando la radice sino ai termini del quarto ordine si ha:

$$(25\,a) \qquad U = -\frac{1}{2} H_0 \int_0^L \left(w'^2 - \frac{1}{4} w'^4 \right) dx.$$

Aggiungendo ad U il contributo delle forze perturbanti $p(x, t)$ nel senso di w, l'euleriana del principio variazionale è

$$(26) \qquad H_0 w_0'' \left(1 - \frac{3}{2} w'^2 \right) - \mu_0 \ddot{w} = -p(x, t).$$

Se si volesse tener conto di una resistenza quadratica (idraulica) $k_o^* w \cdot |\dot{w}|$ che non si può far rientrare nella (25) salvo varie intese preliminari, l'equazione (26) diviene

$$(26\,a) \qquad H_o w_o'' \left(1 - \frac{3}{2} w'^2\right) - \mu_o \ddot{w} - k_o^* \dot{w} \cdot |\dot{w}| = -p(x, t)$$

con k_o^* dato da

$$k_o^* = \frac{1}{2} c_r \rho_o D,$$

essendo ρ_o la densità dell'aria

$$\rho_o \simeq 0{,}125 \quad , \quad c_r \text{ un coefficiente} \quad , \quad D \text{ il diametro.}$$

Di questa equazione passo a considerare alcune particolarizzazioni: Considero il caso in cui $k_o^* = 0$ e la $p(x, t)$ è armonica del tipo

$$p(x, t) = p_o \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \nu t$$

con n intero qualunque. Ammetto l'esistenza di una soluzione periodica sincrona e in fase

$$w(x, t) = A \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \nu t$$

con A da determinare dalla condizione di stazionarietà che segue dall'originario principio dell'Hamilton esteso al periodo $\tau = \frac{2\pi}{\nu}$. Si ottiene subito, integrando rispetto ad x sull'intervallo L, rispetto a t sul detto periodo τ, una espressione che, resa stazionaria rispetto ad A, porge senz'altro

$$\alpha A^3 - \beta A + \gamma_o = 0$$

con

$$\alpha = \frac{9}{32 L^2} (n\pi)^2 \cdot \sigma^2 \quad , \quad \beta^2 = \sigma^2 - \nu^2 \quad , \quad \gamma_o = \frac{p_o}{\mu_o}.$$

Le radici di questa equazione risultano immediatamente, e la discussione è ben espressiva considerando le intersezioni della parabola cubica

$$y = \alpha A^3$$

con la retta

$$y = \beta A - \gamma_o.$$

In sincronismo – la locuzione ha in realtà significato solo con riguardo alle oscillazioni di primo grado – si ha $\nu = \sigma$ e quindi per A la relazione

$$(27) \qquad |A| = \sqrt[3]{\frac{\gamma_o}{\alpha}}$$

ovvero, poichè $\sigma^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{H_o}{\mu_o} \sim \frac{n^2 \pi^2}{8} \frac{g}{f}$,

$$(27\,a) \qquad |A| \sim \sqrt[3]{\frac{256}{9} \frac{p_o}{\mu_o g} \frac{L^2 \cdot f}{(n\pi)^4}}$$

e, posto $n = 1$,

$$(27\,b) \qquad |A| = \frac{4}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4}{9\pi}\,\frac{p_0}{\mu_0 g}\,L^2 f}.$$

Da qui si conclude che, anche in assenza di forze dissipative il sincronismo ammette una soluzione di ampiezza finita (e periodica) per l'intervento dei richiami di 3° ordine, il che è ben noto per le vibrazioni cosidette pseudo-armoniche.

Per due funi con le sollecitazioni in sincronismo $p_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \nu t$ rispettivamente $p_0' \cdot \sin\frac{n\pi}{L'} \cdot \sin \nu' t$, dette μ_0, L, f le costanti della prima, μ_0', L', f' le costanti della seconda, le ampiezze A e A', che assimileremo ai distanziamenti Δ e Δ' della Nota I, stanno, con riguardo alla danza di terzo grado, nel rapporto

$$\Delta' : \Delta = \sqrt[3]{\frac{p_0'}{p_0}\,\frac{\mu_0}{\mu_0'}\,\frac{L^{2\prime}}{L^2}\,\frac{f'}{f}}.$$

E questa relazione si può associare alle 8-12 b della Nota I [2]. Appaiono le portate L ed L' che nel 1° grado non figuravano mai.

Considero ora la resistenza quadratica del tipo $k_0^* \cdot \dot{w} \cdot |\dot{w}$ omettendo però il termine del 3° ordine $w'' \cdot w'^2$, e consentito mi sia il compromesso tanto per arrivare ad una integrazione approssimata, come vedremo, confortata da esperienze numeriche.

Il principio dell'Hamilton non si può più applicare. Adotterò il criterio *dei minimi quadrati* all'equazione

$$H_0\, w'' - \mu_0 \ddot{w} - k_0^* \dot{w} \cdot |\dot{w}| + p(x, t) = 0.$$

Per $p(x, t) = p_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \nu t$ assumerò

$$w = A \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \cdot \cos \nu t$$

cioè, seguendo alcune indagini fatte dal Signorini con il concorso dell'Istituto Nazionale di Calcolo del C.N.R. sulle oscillazioni d'un galleggiante sull'onda sincrona, considero una soluzione sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla perturbazione armonica.

L'integrale da render stazionario è

$$(28) \qquad \mathfrak{I} = \int_0^{\tau}\int_0^{L} \left\{ H_0\, w'' - \mu_0 \ddot{w} - k_0^* \dot{w} \cdot |\dot{w}| + p_0 \cdot \sin\frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \nu t \right\}^2 dt\, dx.$$

[2] Nella Nota I, nella espressione di γ che interviene nella 8, leggi h^2, h'^2 al posto di h rispettivamente h'; infine, nelle due ultime espressioni numeriche di Δ' è 2,00: 2,64 non 2,64 : 2,00: quindi $\Delta' = 18{,}99$ rispettivamente 11,50 m.

Passando alle quadrature con i debiti riguardi verso il prodotto $\dot{w}\cdot|\dot{w}|$ che ha da esser scritto nella forma

$$\dot{w}\cdot|\dot{w}| = -A^2\nu^2\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\cdot\sin\nu t\cdot\left|\sin\frac{n\pi}{L}x\right|\cdot|\sin\nu t|$$

si ottiene

$$\mathfrak{I} = \alpha A^4 + \beta A^2 + \gamma = 0$$

$$(28\,a)\qquad \alpha = \frac{3\,\delta^{*2}\pi\nu^3}{4}\quad,\quad \beta = \left(\pi\nu^3 - 2\sigma^2\pi\nu + \frac{\pi\sigma^4}{\nu} - \frac{16}{3}a_0\delta\nu\right)$$

$$\gamma = \frac{a_0\pi}{2\nu}\quad,\quad a_0 = \frac{p_0}{\mu_0}\quad,\quad \delta^* = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k_0^*}{\mu_0}\quad,\quad \delta = \frac{8}{3\pi}\frac{k_0^*}{\mu_0}.$$

Derivando rispetto ad A ed eguagliando a zero risulta in sincronismo, poichè $[\beta]_{\nu\to\sigma} = -\frac{16}{3}a_0\delta\nu = -\frac{16}{3}a_0\delta\sigma$,

$$(29)\qquad |A| = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\,a_0}{\sigma^2\pi}\frac{\delta}{\delta^{*2}}} = \frac{32}{9\pi}\sqrt{\frac{p_0}{k_0^*\sigma^2}}$$

e da qui, per il rapporto tra i distanziamenti Δ e Δ', attesa la solita espressione di σ^2,

$$(30)\qquad \Delta' : \Delta = \sqrt{\frac{p_0'}{p_0}\cdot\frac{k_0^*}{k_0^{*\prime}}\cdot\frac{f'}{f}},$$

relazione che si potrà associare alle citate varie altre della Nota I. Osservo subito che, attesa l'espressione di $p(x,t)$ armonica d'ordine n rispetto ad x, si può, anche se ciò non è del tutto spontaneo, una volta ammesso che sia pure w armonica rispetto ad x, del tipo $w(x,t) = y(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x$, moltiplicare la $(26\,a)$ per $\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ ed integrare su L, ciò che equivale in sostanza a considerare la sola componente armonica n^{ima} del termine $k_0^*\cdot\dot{w}\cdot|\dot{w}|$ data da $k_0^*\dot{y}\cdot|\dot{y}|\cdot\int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L}x\cdot\left|\sin\frac{n\pi}{L}x\right|dx = \frac{4\,k_0^*}{3\pi}L\cdot\dot{y}\cdot|\dot{y}|$.

Allora la $(26\,a)$ si riduce immediatamente all'equazione,

$$(31)\qquad \ddot{y} + \sigma^2 y + \frac{8}{3\pi}\frac{k_0^*}{\mu_0}\dot{y}\cdot|\dot{y}| = a_0\sin\nu t$$

con

$$\sigma^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\frac{H_0}{\mu_0}\quad,\quad a_0 = \frac{p_0}{\mu_0}.$$

Applicando a questa il criterio dei minimi quadrati sul periodo τ, posto $y = A\cdot\sin\nu t$, si ottengono ancora le $(28\,a)$ salvo che, più semplicemente,

si ha $\delta = \delta^* = \frac{8}{3\pi}\frac{k_0^*}{\mu_0}$. La divergenza nei risultati è lievissima in quanto effettivamente dalle (28 *a*) citate si ha $\frac{\delta^*}{\delta} \simeq 1$. Risulta così in luogo della (29)

$$|A| = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{p_0}{k_0^* \sigma^2}}.$$

Posti su questa via, sembra spontaneo scrivere per le oscillazioni di grande ampiezza con resistenza quadratica l'equazione,

(31 *a*) $$\ddot{y} + \sigma^2 (1 - \varepsilon^2 y^2) y + \gamma \dot{y} \cdot |\dot{y}| = a_0 \sin \nu t$$

con

$$\varepsilon^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad , \quad \gamma = \frac{8}{3\pi}\frac{k_0^*}{\mu_0}.$$

Ma non mi azzarderò scrivere qualche soluzione approssimata mancando ancora le necessarie esplorazioni numeriche per ammettere, ad esempio, la posizione $y = A \cos \nu t$ anche in questo caso più generale (3° ordine).

In ogni modo l'interesse a portare a buon punto la ricerca di soluzioni periodiche di *questa* equazione è attenuato da quello relativo ad una, più completa, che passo a dedurre. Detto C_p il coefficiente di portanza, D la corda, pressoapoco eguale al diametro, del conduttore–ala che ammetterò a sezione non circolare (ad esempio per formazione di ghiaccio), nel senso della velocità V del vento, ρ_0 la densità dell'aria, si forma una portanza per unità di lunghezza di filo che vale $C_p \rho_0 DV^2$. Agli effetti dinamici tutto ciò non ha sulle prime un grande interesse per la nostra ricerca. Ma se il profilo alare si muove trasversalmente alla velocità V del vento con velocità $\dot{w}$, come si sa dall'Aerodinamica non stazionaria, si produce una *portanza* additiva, generalmente opposta a $\dot{w}$, data in approssimazione (e solo in approssimazione, come dimostra una esatta trattazione delle schiere vorticose di Prandtl che si formano dietro ad un profilo alare dotato di velocità relativa trasversale al vento che l'investe) da $-\Gamma \dot{w}$ con $\Gamma = C_p' D \rho_0 V$, essendo C_p' il cosidetto *gradiente del coefficiente* C_p *della portanza* che vale, pressoapoco, per un ordinario profilo alare, $C_p' \simeq 2$.

Se il *profilo è instabile* è $C_p' < 0$ e ciò vuol dire che la portanza anzichè opporsi a $\dot{w}$ tende ad accrescerlo; se si trattasse di un velivolo, non occorre rilevare quale sarebbe la linea di volo! Pensiamo ora che il profilo sia richiamato ad una posizione $w = 0$ da una forza elastica $-c^2 w$ e sia dotato di inerzia M: l'equazione del moto è

$$M\ddot{w} + c^2 w + \Gamma \dot{w} = 0.$$

Nessun dubbio che per $\Gamma > 0$ poichè $c^2 > 0$ la soluzione $w = 0$ è stabile ma per $\Gamma < 0$ essa diviene instabile, le oscillazioni sono ad ampiezza crescente. Se intervenissero forze richiamanti di ordine superiore potrebbe anche aversi un moto limitato sia pure alquanto impegnativo per il materiale, non so, però, se con o senza l'intervento di forze dissipative.

Poichè in Aerotecnica profili instabili non intervengono per certo, non sarà inutile rilevare che le vibrazioni alari autoeccitate da vento costante, di cui si sente parlare, sono di altro genere; si dimostra infatti che sono possibili solo in presenza di almeno 2 gradi di libertà, poniamo w ed una eventuale rotazione φ del profilo attorno ad un asse; il così detto *asse elastico*. Ciò posto, senza più oltre indugiare sul sistema particolare considerato possiamo accorrere là ove il nostro conduttore ci accenna e scrivere una buona volta l'equazione definitiva,

$$(31) \qquad H_0 w'' \cdot \left(1 - \frac{3}{2} w'^2\right) - \mu_0 \ddot{w} - k_0^* \dot{w} \cdot |\dot{w}| - \Gamma \dot{w} = -p(x,t)$$

dalla quale per una $p(x,t)$ armonica rispetto ad x (eventualmente nulla) posto $w = y(t) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$, siamo indotti a scrivere per y l'equazione

$$(31\,a) \qquad \ddot{y} + \sigma^2 (1 - \varepsilon^2 y^2) y + \bar{k}_0^* \dot{y} \cdot |\dot{y}| + \bar{\Gamma} \dot{y} = \begin{cases} 0 \\ a_0 \sin \nu t \end{cases}$$

fermi restando i simboli (30) ed essendo $\bar{k}_0^* = \frac{k_0^*}{\mu_0} > 0$, $\Gamma = \frac{\Gamma}{\mu_0} (< 0$ per i profili instabili quali sono indubbiamente le sezioni circolari con formazioni asimmetriche, rispetto al piano verticale, di ghiaccio). Questa equazione contiene in sè la problematica del filo con resistenza idraulica e soggetto a forze aerodinamiche non stazionarie.

Il caso $\bar{\Gamma} < 0$ con $a = 0$ o $a = a_0 \sin \nu t$ ha un interesse eccezionale.

Qualche formula sintetica è deducibile in linea approssimata secondo i criteri segnalati, ma occorrono esperienze numeriche per legittimarla convenientemente.

Meccanica. — *Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio–tempo.* Nota (*) del Corrisp. BRUNO FINZI.

1. IL CAMPO ELETTROMAGNETICO NELLO SPAZIO–TEMPO. – Il campo elettromagnetico, che per semplicità consideriamo nel vuoto, è caratterizzato assegnando, in ogni punto P dello spazio geometrico tridimensionale ed in ogni istante t, due vettori dello spazio geometrico, $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$, che costituiscono rispettivamente la forza elettrica e la forza magnetica. Scegliendo opportunamente le unità di misura, essi coincidono nel vuoto con le rispettive induzioni. La distribuzione dell'elettricità nello spazio e nel tempo è caratterizzata dando in ogni punto P e in ogni istante t uno scalare ρ ed un vettore $\mathbf{I}$, rappresentanti rispettivamente la densità elettrica e l'intensità specifica della corrente di conduzione. Per le correnti di convezione, se $\boldsymbol{v}$ è la velocità di P, è $\mathbf{I} = \rho \boldsymbol{v}$.

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 novembre 1948.

Consideriamo lo spazio–tempo pseudoeuclideo, la cui metrica, nell'ordinario riferimento, poniamo nella forma:

$$(1) \qquad ds^2 = dy_0^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2),$$

dove $y_0 = ct$ è il tempo espresso in unità römeriane (c velocità della luce nel vuoto) e $y_1\, y_2\, y_3$ sono le tre coordinate cartesiane ortogonali del generico punto P dello spazio geometrico tridimensionale euclideo.

Nello spazio–tempo i due vettori **E** ed **H** si riassumono, secondo il concetto di Minkowski, in un unico tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$), il *tensore elettromagnetico*. In virtù dell'emisimmetria, le sue componenti covarianti ad indici eguali sono nulle, e le 6 indipendenti ad indici diversi sono, nel riferimento (1), così legate alle componenti cartesiane spaziali della forza elettrica **E** e della forza magnetica **H**:

$$(2) \qquad \begin{cases} F_{10} = E_1 \quad , \quad F_{20} = E_2 \quad , \quad F_{30} = E_3 \\ F_{23} = H_1 \quad , \quad F_{31} = H_2 \quad , \quad F_{12} = H_3 . \end{cases}$$

Lo scalare ρ ed il vettore **I** si riassumono nello spazio–tempo in un unico vettore j^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) che dà la *distribuzione elettrica*. Le sue componenti controvarianti sono così legate, nel riferimento (1), a ρ e alle componenti cartesiane spaziali $I^1\ I^2\ I^3$ di **I**:

$$(3) \qquad j^0 = \rho \quad , \quad cj^1 = I^1 \quad , \quad cj^2 = I^2 \quad , \quad cj^3 = I^3 .$$

Componendo poi i due tensori spazio–temporali $F_{\alpha\beta}$ e j^α si ottiene il vettore spazio–temporale K_β che dà le azioni ponderomotrici del campo: la componente K_0 corrisponde alla densità di potenza della corrente, le componenti $K_1\, K_2\, K_3$ corrispondono alle componenti cartesiane spaziali della forza ponderomotrice per unità di volume.

Le leggi elettromagnetiche maxwelliane si compendiano nello spazio–tempo in queste due:

1° *il tensore elettromagnetico è irrotazionale*;

2° *la sua divergenza eguaglia la distribuzione elettrica* [1].

In forma differenziale, se $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$) è il tensore di Ricci nello spazio–tempo, la prima legge si traduce così:

$$(4) \qquad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta/\gamma} = 0 \ [2].$$

La seconda si traduce così:

$$(5) \qquad F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = j_\alpha .$$

La semplicità concettuale della rappresentazione dei fenomeni elettromagnetici nello spazio–tempo e la semplicità delle leggi che qui li governano

(1) B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, 1948, Cap. X.

(2) In questa formula e nelle successive è sottinteso, conformemente alle ordinarie convenzioni del calcolo tensoriale, il segno di sommatoria da 0 a 3 rispetto agli indici di covarianza (posti in basso) che saturano altrettanti indici di contravarianza (posti in alto), e gli indici preceduti da una lineetta inclinata sono indici di derivazione tensoriale.

mi sembra costituire l'argomento di maggior peso fra quelli che ci inducono a ritenere che sia veramente lo spazio-tempo la sede effettiva dei fenomeni naturali, e non separatamente lo spazio e il tempo.

Comunque, le (4) sono 4 equazioni differenziali (vi è scoperto l'indice δ che assume i valori 0, 1, 2, 3) perfettamente equivalenti nell'ordinario riferimento, alle 4 equazioni di Maxwell

$$\text{(4')} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad , \quad c \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

e le (5) sono 4 equazioni differenziali (vi è scoperto l'indice α che assume i valori 0, 1, 2, 3) perfettamente equivalenti alle rimanenti 4 equazioni di Maxwell

$$\text{(5')} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho \quad , \quad c \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{I}.$$

Qualora si riguardi la (5) (o le (5')) come la definizione della distribuzione elettrica («distribuzione elettrica è ciò che diverge dal campo elettromagnetico»), le sole equazioni elettromagnetiche sono le 4 compendiate nella relazione tensoriale (4) che esprime l'irrotazionalità del tensore elettromagnetico (o nelle equivalenti (4')). Qualora si riguardi invece il campo caratterizzato dal tensore elettromagnetico e dalla distribuzione elettrica, le equazioni elettromagnetiche sono le 8 compendiate nelle due relazioni tensoriali (4) e (5) (o nelle equivalenti (4') e (5')).

2. LEGGI DIFFERENZIALI E LEGGI INTEGRALI. – Le leggi differenziali a cui soddisfa un campo vettoriale possono trasformarsi in leggi integrali più espressive delle prime e a queste equivalenti in condizioni di regolarità.

Così, se $\boldsymbol{v}$ è un vettore dell'ordinario spazio geometrico tridimensionale, funzione dei punti P dello spazio, la legge differenziale

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0,$$

che esprime l'irrotazionalità di $\boldsymbol{v}$, può tradursi in veste integrale affermando che è nullo il lavoro di $\boldsymbol{v}$ lungo una qualsivoglia linea λ chiusa dello spazio:

$$\text{(7)} \qquad \int_{\lambda} \boldsymbol{v} \times d\mathrm{P} = 0.$$

Analogamente la legge differenziale

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

che esprime la solenoidalità di $\boldsymbol{v}$, può tradursi in veste integrale affermando che è nullo il flusso di $\boldsymbol{v}$ attraverso il contorno σ di una qualsivoglia regione dello spazio. Se $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a σ, volto verso l'esterno, è dunque:

$$\text{(9)} \qquad \int_{\sigma} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0.$$

L'equivalenza fra la (6) e la (7), fra la (8) e la (9) è completa in condizioni di regolarità. Quando la regolarità vien meno, le leggi differenziali, come la (6) e la (8), possono perdere significato, ma possono non perderlo le relazioni integrali, come la (7) e la (9), quando si reputi il contorno costituito anche dai contorni che isolano le singolarità.

Le leggi integrali risultano più generali delle differenziali e capaci di reggere fenomeni che difficilmente si potrebbero riguardare retti da leggi differenziali. Tipico in proposito è il caso della dinamica. Se m è la massa di un punto materiale, $\boldsymbol{v}$ la sua velocità, $\mathbf{F}$ la forza motrice, la legge fondamentale in veste differenziale

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} \tag{10}$$

equivale, in condizione di regolarità, alla corrispondente legge integrale

$$\Delta(m\boldsymbol{v}) = \int_a^b \mathbf{F}\,dt \tag{11}$$

che afferma essere l'impulso $\int_a^b \mathbf{F}\,dt$, relativo all'intervallo di tempo $[a, b]$, eguale al corrispondente incremento $\Delta(m\boldsymbol{v})$ di quantità di moto. Ma se il punto materiale è soggetto a percosse, la legge differenziale (10) mal si adatta allo studio del corrispondente moto impulsivo, mentre ben vi si adatta la legge integrale (11) che costituisce appunto l'equazione fondamentale della dinamica impulsiva.

Mi propongo in questa Nota di formulare in veste integrale le leggi fondamentali differenziali (4) e (5) che reggono nello spazio tempo il campo elettromagnetico, pervenendo così a leggi più generali delle (4) e (5), perchè, pur essendo le prime equivalenti alle seconde in condizioni di regolarità, le prime possono mantenere la loro validità anche quando vien meno quella delle seconde, ad esempio in corrispondenza a brusche variazioni nella distribuzione elettrica.

3. Formulazione integrale della prima legge elettromagnetica. – In una Nota pubblicata tre anni or sono [3] ho dato una formulazione integrale della prima legge differenziale del campo elettromagnetico, e cioè della (4) che afferma l'irrotazionalità del tensore elettromagnetico nello spazio tempo. Analogamente alla (7), che traduce in forma integrale la (6), la formulazione integrale della (4) è la seguente: *è nullo il lavoro del tensore elettromagnetico lungo una generica superficie chiusa (varietà bidimensionale) dello spazio–tempo.*

(3) B. Finzi, *Formulazione integrale delle leggi meccaniche ed elettromagnetiche nello spazio–tempo.* « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXVIII, 1945.

Sia ω una varietà bidimensionale chiusa dello spazio-tempo, individuata assegnando le coordinate x^α di un punto (evento) dello spazio-tempo in funzione di due parametri ξ ed η,

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi, \eta) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Il lavoro del tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ lungo ω è il seguente invariante integrale di Poincaré (4):

$$\int_\omega F_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial x^\beta}{\partial \eta} d\xi\, d\eta .$$

La formulazione integrale della (4) si ottiene dunque scrivendo:

$$\int_\omega F_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial x^\beta}{\partial \eta} d\xi\, d\eta = 0 . \tag{12}$$

Nella mia Nota precedentemente richiamata riguardavo la (12) come l'unica equazione integrale del campo elettromagnetico, perchè consideravo la legge differenziale (5) come definizione della distribuzione elettrica. Ma penso ora che sia anche opportuno considerare il campo caratterizzato nello spazio-tempo dal tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ e dalla distribuzione elettrica j^α. Mi è quindi necessario dar veste integrale anche alla (5) che in veste differenziale afferma essere la divergenza del tensore elettromagnetico eguale alla distribuzione elettrica.

4. FORMULAZIONE INTEGRALE DELLA SECONDA LEGGE ELETTROMAGNETICA. – Consideriamo una generica regione τ dello spazio-tempo, delimitata da un contorno σ, costituito da una varietà tridimensionale chiusa dello spazio-tempo, e diciamo ν^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) il versore spazio-temporale normale a σ, volto verso l'esterno. Integriamo ambo i membri della (5) in τ ed osserviamo che (in condizioni di regolarità) (5)

$$\int_\tau F_{\alpha\beta}{}^{/\beta}\, d\tau = \int_\sigma F_{\alpha\beta}\, \nu^\beta\, d\sigma .$$

Avremo:

$$\int_\sigma F_{\alpha\beta}\, \nu^\beta\, d\sigma = \int_\tau j_\alpha\, d\tau . \tag{13}$$

La (13) dà la cercata formulazione integrale della seconda legge elettromagnetica. L'integrale che compare al primo membro dà il *flusso del tensore elettromagnetico* uscente dal contorno della generica regione τ dello spazio-tempo. L'integrale che compare al secondo membro dà l'*impulso di distribuzione elettrica*.

(4) H. POINCARÉ, « Acta math. », IX (1877), XIII (1890), « Journ. Ec. Polyt. » (1895); Th. DE DONDER, *Théorie des invariants intégraux*, Paris, 1927.

(5) B. FINZI, loco ultimo citato, § 5.

Osserviamo che nello spazio–tempo pseudoeuclideo, di metrica (1),

$$d\tau = \sqrt{-1}\, dy_0\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

è immaginario, e così pure, se $y^\varrho = y^\varrho(\xi, \eta, \zeta)$ sono le equazioni parametriche di σ, è immaginario

$$\nu_\alpha\, d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial y^\beta}{\partial \xi} \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta} \frac{\partial y^\delta}{\partial \zeta}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

perchè immaginarie sono le componenti del tensore di Ricci. Converrà scrivere la (13) nella forma reale

$$\Phi_\alpha = G_\alpha, \tag{13'}$$

chiamando flusso del tensore elettromagnetico e impulso di distribuzione elettrica rispettivamente i vettori spazio–temporali reali Φ_α e G_α che sono i coefficienti dell'unità immaginaria nel primo e nel secondo membro della (13).

Per ravvisare il significato di G_α, si assuma il riferimento (1) e si consideri la regione τ dello spazio–tempo come corrispondente al movimento (in generale non rigido) di una regione C dello spazio geometrico nell'intervallo di tempo $[a, b]$. Il contorno σ di questa regione è costituito per $y_0 = ca$ dalla regione spaziale C nell'istante $t = a$, per $y_0 = cb$ dalla regione spaziale C nell'istante $t = b$, e per $ca \leqq y_0 \leqq cb$ dall'ipersuperficie (varietà tridimensionale) Λ corrispondente nello spazio–tempo al movimento (in generale non rigido) della superficie S che racchiude, nello spazio geometrico, C nei vari istanti t dell'intervallo $[a, b]$. Risulta allora $d\tau = \sqrt{-1}\, dC\, c\, dt$, e

$$G^\alpha = \int_a^b c\, dt \int_C j^\alpha\, dC. \tag{14}$$

Ne segue che, detta $Q = \int_C \rho\, dC$ la carica elettrica di C nell'istante t, detto $\mathbf{R} = \int_C \mathbf{I}\, dC$ il vettore dello spazio geometrico tridimensionale che dà l'intensità totale delle correnti in C nell'istante t, per le (3) si ha:

$$G^0 = c \int_a^b Q\, dt \quad , \quad G^k = \int_a^b R^k\, dt \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{14'}$$

dove R^k sono le componenti cartesiane spaziali del vettore spaziale $\mathbf{R}$, cosicchè G^k sono le componenti cartesiane del vettore spaziale

$$\mathbf{G} = \int_a^b \mathbf{R}\, dt.$$

Ben propriamente può dunque interpretarsi il vettore spazio–temporale G_α come quello che dà l'impulso di distribuzione elettrica.

In conclusione, la (13) (o (13′)) può enunciarsi così: *il flusso del tensore elettromagnetico, uscente dal contorno di una regione qualunque dello spazio–tempo, eguaglia l'impulso di distribuzione elettrica in quella regione.*

Mostriamo la forma assunta dall'impulso di distribuzione elettrica G_α quando le correnti sono di convezione e τ è la regione dello spazio–tempo descritta dal corpo deformabile C costituito sempre dalle medesime cariche. In tal caso, se $\boldsymbol{v}$ è la velocità in un punto generico di C,

$$\mathbf{I} = \rho \boldsymbol{v} \quad , \quad \mathbf{R} = \int_C \rho \boldsymbol{v}\, dC .$$

Osserviamo che, per derivazione, dalla (5) si deduce:

$$j_\alpha{}^{/\alpha} = 0 .$$

Questa relazione, che esprime la solenoidalità della distribuzione elettrica nello spazio–tempo, si traduce nel riferimento (1) nella

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0 ,$$

la quale esprime la conservazione della carica elettrica, perchè da essa si deduce:

$$\frac{d(\rho\, dC)}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dQ}{dt} = 0 . \tag{15}$$

Dalla prima delle (14′) si ha allora:

$$G^0 = cQ(b - a) . \tag{16}$$

D'altra parte, se $\overline{P}$ è il centro delle cariche elettriche nel generico istante t, se cioè

$$\overline{P} - o = \frac{\int_C (P - o)\, \rho\, dC}{Q} ,$$

detta $\overline{\boldsymbol{v}}$ la velocità di $\overline{P}$, dalle (15) risulta:

$$Q\overline{\boldsymbol{v}} = \int_C \rho \boldsymbol{v}\, dC \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{R} = Q\overline{\boldsymbol{v}} .$$

Se allora $\overline{B} - \overline{A}$ è lo spostamento del centro delle cariche elettriche nell'intervallo di tempo $[a, b]$, G^k $(k = 1, 2, 3)$ risultano eguali alle componenti cartesiane del vettore spaziale

$$\mathbf{G} = Q(\overline{B} - \overline{A}) . \tag{17}$$

La componente temporale dell'impulso di distribuzione elettrica è dunque il prodotto della carica di C per la misura dell'intervallo di tempo espressa in unità römeriane, e le componenti controvarianti spaziali sono quelle del vettore spaziale prodotto della carica per lo spostamento del centro delle cariche elettriche.

5. Formulazione integrale della legge d'armonicità nello spazio-tempo del campo neutro. – In assenza di cariche elettriche e di correnti, il campo elettromagnetico è neutro. Nello spazio-tempo il vettore distribuzione elettrica j^α è nullo e le leggi (4) e (5) esprimono l'irrotazionalità e la solenoidalità del tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta/\gamma} = 0 \quad , \quad F_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = 0 . \tag{18}$$

Le leggi integrali (12) e (13) diventano pertanto:

$$\int_\omega F_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial x^\beta}{\partial \eta} d\xi\, d\eta = 0 \quad , \quad \int_\sigma F_{\alpha\beta}\, \nu^\beta\, d\sigma = 0 . \tag{19}$$

La prima esprime ancora che *è nullo il lavoro del tensore elettromagnetico lungo una generica varietà bidimensionale chiusa* ω *dello spazio-tempo*, la seconda afferma che *è nullo il flusso di questo tensore uscente da una generica varietà tridimensionale chiusa* σ *dello spazio-tempo.*

Dalle (18) si deduce che il tensore elettromagnetico è armonico nello spazio-tempo, soluzione cioè dell'equazione [6]

$$F_{\alpha\beta/\gamma}^{\gamma} = 0 . \tag{20}$$

Nel riferimento (1) la (20) è l'equazione di d'Alembert

$$\Box F_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_{\alpha\beta}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 F_{\alpha\beta}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_{\alpha\beta}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 F_{\alpha\beta}}{\partial y_3^2} \right) = 0 . \tag{20'}$$

Essa afferma in sostanza, che, come è ben noto, sia il vettore forza elettrica che il vettore forza magnetica soddisfano alla medesima equazione di d'Alembert in cui funge da velocità d'avanzamento la velocità c della luce [7]. L'equazione tensoriale (20) (unita alle relazioni di coniugio fra le varie componenti del tensore elettromagnetico) caratterizza completamente il campo elettromagnetico neutro.

Per dare alla (20) veste integrale, basta integrarne ambo i membri in una generica regione τ dello spazio tempo. Ma, detto σ il contorno di questa

(6) Cfr. B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Bologna 1948, Cap. X.

(7) Si noti che in uno spazio pseudoeuclideo, quale lo spazio tempo, l'armonicità non si traduce con una equazione di Laplace, come avviene in uno spazio propriamente euclideo, bensì con un'equazione di d'Alembert. Ciò è dovuto alla presenza nella (1) di termini di segno differente, circostanza questa che non si verifica invece nella metrica di uno spazio propriamente euclideo. Questo fa sì che l'armonicità in uno spazio pseudoeuclideo sia tradotta da un'equazione differenziale iperbolica, che ammette una propagazione ondosa reale, mentre è tradotta da un'equazione differenziale ellittica, che non ammette nessuna propagazione ondosa reale, in uno spazio propriamente euclideo. La possibilità dell'effettivo propagarsi delle onde elettromagnetiche e della luce dipende dunque dal fatto che lo spazio tempo è pseudoeuclideo e non euclideo, dipende dal fatto che nell'espressione (1) della metrica cronotopica compaiono termini di segno differente, così che lo spazio tempo risulta un continuo la cui metrica non è definita in segno, come invece lo è la metrica dell'ordinario spazio geometrico tridimensionale.

regione e ν^γ il versore normale, volto verso l'esterno, in condizioni di regolarità risulta

$$\int_\tau F_{\alpha\beta/\gamma}^{\gamma} \, d\tau = \int_\sigma F_{\alpha\beta,\gamma} \, \nu^\gamma \, d\sigma .$$

Dunque la (20) si traduce così:

$$\int_\sigma F_{\alpha\beta/\gamma} \, \nu^\gamma \, d\sigma = 0 . \tag{21}$$

Essa costituisce l'unica legge integrale del campo elettromagnetico neutro, ed afferma che, *in un campo neutro, è nullo l'integrale, esteso ad una generica varietà tridimensionale chiusa dello spazio-tempo, della derivata normale del tensore elettromagnetico.*

OSSERVAZIONE. – La piena equivalenza fra leggi differenziali e leggi integrali ha luogo quando vi è regolarità nella regione spazio-temporale τ che si considera e sul suo contorno. Quando questa vien meno, è necessario isolare le regioni di singolarità con delle ipersuperficie e considerare anche queste come facenti parte del contorno di τ. Si hanno tipicamente singolarità lungo le varietà caratteristiche delle (20), che sono reali, quando ad esse corrispondono fronti d'onda, attraverso ai quali hanno luogo discontinuità di derivate.

Fisica. — *Sulla relatività di Alberto Einstein.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

In una Nota precedente (1), ho fatto vedere che la teoria speciale della relatività di Einstein, nell'interpretare un caso di trascinamento ottico Fresnel-Fizeau, porti allo stesso risultato pratico della teoria balistica della luce. Ricordo inoltre che, nella stessa Nota, ho proposto una modificazione o perfezionamento di tale seconda teoria (in modo, per ora, molto sommario), perchè essa sfugga alle vivaci critiche che a suo tempo le furono mosse. Da tutto ciò trassi la conseguenza che debba essere più soddisfacente per la nostra intuizione, servirsi della teoria balistica, anzichè di quella di Einstein, nell'interpretare i fenomeni ottici, presentati da corpi in movimento.

Proseguendo nell'esame di tale questione, voglio accennare in questa Nota, ad altri argomenti che consigliano l'abbandono delle teoria di Einstein. Intendo però qui riferirmi di preferenza (come nella mia Nota, già citata) alla teoria *speciale*. Non mi occupo perciò della teoria *generale*, tanto più che, rappresentando essa (secondo la dizione scelta dal suo autore, in modo non del tutto giustificato) una generalizzazione della *speciale*, all'ab-

(*) Presentata nella seduta del 9 giugno 1948.
(1) V. questi « Rendiconti », vol. III, p. 435.

bandono di questa, dovrebbe seguire, automaticamente quello della *generale*. Tuttavia, per dar maggiore evidenza a quanto dirò, circa la teoria speciale, mi sembra opportuno accennare al fatto che appare più facile trovare argomenti contro la teoria generale. Infatti, è una conseguenza dei fatti osservabili, il carattere *assoluto* dei moti accelerati o di rotazione. Incidentalmente, ricordo che fra questi, vanno citati: lo schiacciamento della Terra ai poli, il pendolo di Foucault, le corrosioni dissimmetriche delle sponde dei fiumi o delle rotaie ferroviarie, ecc. Per sostenere la teoria generale, Einstein giustifica tali fatti con una incomprensibile *azione dei mondi lontani*. Se è facile, dunque, sollevare obbiezioni alla teoria generale, anche quella speciale, che venne formulata 11 anni prima, non può sfuggire alle critiche, come ora farò vedere.

La teoria speciale della relatività considera, come è noto, moti rettilinei uniformi. Essa fu formulata dal suo autore, partendo dal risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley ed analoghe. Per vero dire, queste esperienze portano già alla abolizione della teoria eterea. Ciò dicasi, ricordando che l'ipotetico trascinamento dell'etere, operato dalla materia, non potè venire accettato. Se ora, nella struttura della teoria speciale, è implicitamente contenuto il significato *relativo* del moto uniforme, appare però arbitraria la considerazione dei fenomeni ottici, nell'interpretazione di quelli puramente cinematici. Nessuna esperienza meccanica, infatti, fa vedere che questi, osservati nel caso della materia in rapido movimento, sieno legati al fenomeno della propagazione della luce. Eppure, la teoria di Einstein vorrebbe che la velocità di un corpo, rispetto ad un qualunque osservatore, non possa superare quella della luce nel vuoto, c. Mentre, da un canto, quella teoria ammette in pieno anche per i fenomeni ottici, il principio relativistico (nel senso galileiano) del moto uniforme di un corpo, limita, dall'altro, tale principio, stabilendo un significato assoluto, *sui generis*, di c, che resta quale insuperabile valore, per l'osservazione di un corpo in movimento uniforme.

Osserviamo comunque, che la relatività speciale si fonda sulla formulazione di due postulati, di cui il primo corrisponde al carattere *relativo classico* del moto, ora ricordato; esso è perciò una inconfutabile verità anche nel campo dell'ottica, come dimostra l'esperienza di Michelson. Non così si può dire del secondo postulato, che ammette la accennata *assoluta* costanza della velocità della luce, c, per qualunque osservatore. Come è noto, tale postulato occasiona profonde modificazioni nelle classiche nozioni di spazio e di tempo. Dall'ammissione di tali postulati, la relatività di Einstein perviene, con semplice ma artifizioso calcolo algebrico, alla cosidetta *trasformazione di Lorentz*; che così fu ritrovata, partendo da idee precisamente opposte a quelle del fisico olandese. Infatti, questi ammetteva l'esistenza dell'etere cosmico, abbandonata da Einstein. Si noti, in conseguenza, la differente portata di quella *trasformazione*, usata così dai due fisici. Mentre, per Lorentz, fra tutti i sistemi, reciprocamente in moto, ve ne ha uno privilegiato (quello in quiete con l'etere cosmico), tale sistema manca per Einstein. Rappre-

senta questo rilievo, uno degli anelli della catena che porta alle più formali obbiezioni alla teoria speciale.

Si sa ancora, che Einstein, stabilita di nuovo, in un ordine diverso di idee, la trasformazione di Lorentz, ne ricava il raccorciamento delle lunghezze (parallelamente al moto) e l'allungamento dei tempi di un sistema S, rispetto ad un altro sistema S' in moto rettilineo uniforme, se considerato dallo stesso sistema S'. Tali fatti hanno, in certo modo, riscontro, con la *contrazione* di Lorentz, della materia traversata da una corrente di etere (contrazione che perciò, secondo Lorentz, doveva essere reale); e col cosidetto *tempo locale*, dallo stesso Lorentz ammesso.

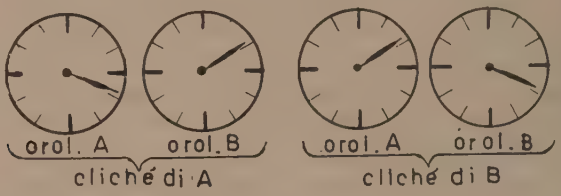
Ora, nella concezione di Einstein, mancando il sistema assoluto di riferimento (l'etere), le ricordate variazioni nelle metriche spaziale e temporale debbono, logicamente, essere reversibili. Ciò si dice, nel senso che ciascuno dei due sistemi li giudica al loro giusto valore, per quanto si riferisce all'altro sistema. Si comprende meglio la giustezza di tale conclusione, riflettendo che quando si hanno due sistemi in moto reciproco, rettilineo, uniforme, noi possiamo, indifferentemente, ritenere che uno di essi sia in quiete rispetto a noi, che l'osserviamo, e l'altro in moto. Non vi ha alcuna ragione che ci possa fare ammettere che la metrica spaziale e temporale del sistema che è in quiete con noi, venga modificata, per il fatto che un altro sistema sia posto in moto, rispetto al primo e a noi.

Si arriva così alla conclusione importante per cui, se mai, le pretese variazioni della metrica spaziale e temporale di un sistema, non possono essere che *apparenti* all'altro sistema, e non *reali*. Per cui, in qualsiasi sistema, le dimensioni lineari e temporali rimangono inalterate ed indipendenti dal moto uniforme, rispetto ad esso, di altri sistemi.

Un caso particolare può mostrare certe difficoltà che il fisico incontra nel volere applicare la teoria speciale di Einstein. Si considerino due regoli rettilinei lunghissimi, che possono scorrere con velocità uniforme, l'uno sull'altro. Sui regoli, sieno distribuiti osservatori con orologi, di identica fattura. Tali orologi, prima che venga conferito il moto reciproco ai regoli, sieno anche perfettamente accordati; segnino, cioè tutti, la stessa ora. Ciò si dice applicando la meccanica classica; ma nel caso della quiete, vale anche per la relatività. All'istante in cui il moto comincia, due orologi, appartenenti uno ad un sistema ed uno all'altro, si incontrano ed indicano entrambi la stessa ora, per esempio, zero. Questo fatto può essere verificato da osservatori che si trovano sui due regoli, in coincidenza. Poi, i due osservatori con gli orologi, trascinati dal moto dei regoli, si allontanano. Avvengono, successivamente, altre coincidenze di altri osservatori, con orologi. Per esempio, l'osservatore A del primo regolo, al tempo t, dall'inizio del moto, viene ad incontrarsi con l'osservatore B, dell'altro regolo, che giudica, ai termini della relatività, un tempo diverso, t'. Ora, sempre secondo questa teoria, si deve ammettere che l'osservatore A, in tale incontro, trova l'orologio di B alquanto indietro rispetto al proprio; mentre invece, l'osservatore B trova che è l'orologio A ad essere indietro rispetto al proprio. Questi rilievi possono venir fatti da A

e B, mediante fotografie istantanee, eseguite da ciascun osservatore, dei due orologi coincidenti. I due cliché fotografici rilevati da A e B sono dunque differenti (vedi figura), benchè essi rappresentino le immagini dei due orologi, con la particolare posizione delle rispettive lancette, prese contemporaneamente dai due osservatori. Il fisico non sa dare alcuna ragione di tale differenza.

Se il fisico non si rassegna ad accettare la teoria di Einstein, non si può far ritorno a quella eterea, che fu abbandonata, sia per il risultato negativo dell'esperienza di Michelson, sia in considerazione delle teorie quantistiche. Queste, per quanto concerne l'argomento in parola, furono messe precisamente in valore dallo stesso Einstein, con la formulazione della teoria dell'effetto fotoelettrico. Ritengo che l'opera di Einstein, in tale campo, a sua vera gloria, rimarrà imperitura. Non resta, perciò, che ricorrere alla teoria balistica della luce, che, come ho detto nella precedente Nota, citata, può essere rimessa in valore mediante particolari ipotesi aggiuntive, a cui ho



fatto cenno. Simili ipotesi si riferiscono all'ammettere una speciale *interazione* fra i fotori viaggianti dalle lontane stelle verso noi. Esse vanno precisate, tenendo conto di tutti i complessi fatti, a tal uopo riesaminati, che le stelle doppie presentano.

Al rigetto della teoria speciale, si oppongono le più brillanti conferme che essa appare avere avuto, nelle numerose esperienze sulla relazione tra velocità ed energia cinetica delle particelle accelerate. Così succede, nel caso delle esperienze della General Electric Company, col sincrotrone, che dà elettroni, di energia di 70 milioni di volt elettroni. La energia cinetica di tali particelle è misurata direttamente, dalle disintegrazioni che esse sono capaci di produrre. La valutazione di tali fatti avviene perfettamente d'accordo con la relatività.

Ora, se si ha la necessità di sostituire la teoria della relatività, con qualcosa di più soddisfacente, bisognerebbe ammettere che le formule relativistiche debbano essere interpretate con un'altra teoria. Un simile criterio non è senz'altro da respingere. Infatti, si sa che esso è stato adottato in un altro caso. Si vuole accennare così alla trasformazione di Lorentz, che valeva dapprima, ammettendo la teoria eterea (contrazione Lorentz-Fitzgerald), e che poi fu ritrovata da Einstein con ipotesi, direi, del tutto opposta, che corrisponde cioè all'abolizione dell'etere.

Seguendo un simile ordine di idee, va rilevato che l'accrescimento di massa che l'elettrone apparisce subire, se vien dotato di considerevole velo-

cità, può venir considerato sotto nuova luce. Infatti, se un elettrone, od in genere un corpo elettrizzato, perchè in moto, subisce una certa azione, da parte di un campo elettrico o magnetico, a ciò deve corrispondere la propagazione di tale azione, attraverso la distanza che intercede fra esso e la materia, che origina il campo. Si può ammettere, in linea di orientamento, che tale propagazione avvenga con la velocità della luce. Ma è agevole comprendere che se l'elettrone si muove con velocità dello stesso ordine, tale azione non abbia il tempo di svolgersi completamente; essa anche può mancare del tutto. Come conseguenza, l'accelerazione delle particelle elettrizzate non può superare un certo limite di velocità. Ma tale conclusione non sarebbe dovuta alla relatività.

Le precedenti considerazioni mi hanno da tempo indotto a realizzare esperienze, atte a risolvere definitivamente il problema della perfetta idoneità fisica o meno della teoria speciale. Oltre antiche esperienze, che ho eseguito sperimentando con specchi o sorgenti in moto (nell'aria o nel vuoto più spinto), e che non mi avevano dato risultato contrario alle previsioni relativistiche, essendo esse anche d'accordo con le teorie classiche; ho in corso ricerche basate su di un altro criterio. Di esse ho dato notizia preliminare in altra sede [2], e sono tuttora in via di perfezionamento.

Con tali esperienze mi sono proposto di constatare se la luce, nel traversare un mezzo rifrangente, venga a subire un rallentamento nella sua velocità di propagazione. Si intende con ciò asserire, che tale rallentamento non sia quello comune già ammesso dall'ottica, e dovuto alla rifrazione. Esso dovrebbe essere constatabile anche dopo che la luce stessa sia di nuovo emersa, dal mezzo rifrangente. Le esperienze non hanno per ora dato risultati definitivi. Ma esse sembrano già confermare la ipotesi ora fatta, che ovviamente sarebbe contraria al principio relativistico della costanza della velocità della luce. Mi riservo di dare in seguito notizie definitive, su tali esperienze.

Concludendo, ritengo che la relatività di Einstein ha pur reso sinora segnalati servizi al progresso della scienza, in questa prima metà del secolo. Ma secondo me, ciò si deve più al fatto della sua equivalenza ad un'altra teoria, che pur rispettando i principii della meccanica classica, era stata ritenuta insoddisfacente (per ragioni che io propongo di eliminare), anzichè alla piena attendibilità di uno dei postulati, su cui essa si basa. Tale equivalenza, non prima da altri riconosciuta, è stata da me rilevata, almeno in un caso particolare. Ritengo inoltre che non debba essere difficile dimostrare che essa ancora si verifichi, in tutti i casi in cui si è cercato di trovare controllo con i fatti, del costrutto relativistico. Voglio con ciò riferirmi a quelli della fisica atomica o corpuscolare. Una simile indagine potrà da altri venir compiuta.

Comunque a me sembra che le considerazioni svolte in questa Nota, suggeriscano l'opportunità di abbandonare la teoria di Einstein, in quanto essa debba rappresentare uno strumento di lavoro del fisico. Al suo posto può ritornare in pieno a valere la gloriosa meccanica di Galileo e di Newton.

(2) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; gennaio 1947.

Fisica (Fisica–Matematica). — *Relatività dei fenomeni fisici.* Nota (*) del Socio GIOVANNI GIORGI.

Un nostro consocio illustre, il prof. Quirino Majorana, con varie comunicazioni verbali e scritte (1) ha posto in discussione sotto nuova luce i principî della teoria di relatività, e ha portato tutto il peso della sua scienza autorevole per mettere in evidenza quanto fino ad ora può ritenersi non sufficientemente provato, nella teoria einsteiniana. Discussioni sull'argomento hanno avuto luogo in varie sedute.

Desidero precisare le conclusioni a cui quelle discussioni mi hanno condotto.

Sembra che siamo tutti d'accordo nell'ammettere un principio di *relatività in senso lato,* così:

A) *In due ambienti che differiscano per un moto di traslazione uniforme, i fenomeni fisici sono retti da leggi uguali*; cioè nessun esperimento *interno* può rivelare conseguenza alcuna dovuta alla velocità di trascinamento dell'ambiente. Ad accettare questo principio ci conducono la classica esperienza di Michelson e Morley, eseguita ex–novo, con mezzi di molto più raffinata precisione, da Joos e da altri in tempi recenti; e in più le altre esperienze, di tipo diverso, eseguite da Trouton e Noble, da Lord Rayleigh e Brace, e da altri, fra cui una molto interessante dovuta al Majorana stesso; più genericamente ancora, ci conforta la riflessione che nonostante i ripetuti sforzi dei più abili sperimentatori, nessuna conseguenza del trascinamento dovuto al moto orbitale terrestre (30 km/sec) e, ciò che più importa, al moto del sistema solare attraverso lo spazio (circa dieci volte tanto), non ha mai potuto venir messa in evidenza.

Ciò che sfugge, ciò che è inafferrabile, è la *velocità* di trascinamento, non già l'*accelerazione*; gli effetti di quest'ultima sono rivelati dalle esperienze di Sagnac, di Michelson e Gale, e di Dufour e Prunier; e su ciò non cade dubbio. Quando si dice «non esiste l'etere», occorre intendersi; lo spazio localmente privo di materia ordinaria non è un semplice spazio geometrico, è uno *spazio fisico*, dotato di *alcune* delle proprietà della materia; non può costituire riferimento per le velocità, ma può costituire riferimento per le accelerazioni; e può immagazzinare e convogliare energia. Siamo d'accordo su questo, e poco importa che tale spazio libero, con attributi parzialmente materiali, si continui a chiamare etere, come vogliono alcuni, oppure spazio–etere, o spazio fisico, o spazio vuoto, o con altre denominazioni.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) MAJORANA, *Teoria speciale della relatività e teoria balistica della luce.* Questi «Rendiconti», vol. III, fasc. 5–6 nov. dic. 1947, pp. 435–442; *Sulla relatività di Alberto Einstein.* Nota presentata il 9 giugno 1948. Ibid., questo fascicolo, pp. 211–215.

2. Le opinioni e i punti di vista divergono quando si va più oltre. Per mettere d'accordo quel primo postulato col rimanente della scienza fisica, occorre modificare la fisica classica introducendo qualche altra ipotesi.

La quasi totalità dei fisici sperimentali e matematici, accetta ora la teoria di Einstein, che parte dall'aggiungere a quel primo postulato un secondo, così:

B) *La velocità della luce nel vuoto, appare sempre la medesima, da qualunque sistema di riferimento sia misurata, e in particolare è indipendente dalla velocità della sorgente che emette la luce stessa.*

Ammettendo, come ipotesi, questo postulato B), e completandolo con le ipotesi che ad esso si collegano, relative alla cinematica, alla dinamica e alla elettrodinamica, si costituisce quel sistema che va denominato *prima relatività* di Einstein (impropriamente ricordata come *relatività ristretta*); come risultato, si rende ragione della mancanza di effetti di trascinamento, affermato dal postulato A); ma è necessario un discostamento dalle nozioni classiche di spazio e di tempo. Questa innovazione non è stata accettata da alcuni fisici autorevoli, come il Ritz, il Lenard, etc., come non è accettata dal nostro Majorana. Che questi ultimi siano in numero estremamente esiguo in confronto ai primi, non sarebbe un argomento probante a favore della fisica einsteiniana; ma di tal fatto si deve umanamente tener conto.

3. In contrapposto all'ipotesi einsteiniana espressa dal postulato B), sta quella così detta *balistica* di Ritz, che si fonda su quest'altro postulato.

C) *La velocità della luce si compone con quella della sorgente*; cioè i fotoni luminosi, abbandonata la sorgente, si comportano come proiettili emessi da un fucile, e sottomessi alla meccanica galileiana.

Questo postulato, anch'esso, deve essere completato e affiancato da un gruppo di enunciati relativi all'elettrodinamica; il che Ritz ha fatto con perfetto rigore. Ma nessuna innovazione nelle nozioni classiche di spazio e di tempo viene richiesta. La cinematica e la dinamica rimangono come nella meccanica tradizionale. Ammettendo così questo postulato C) in luogo del B), si spiega ugualmente bene la mancanza di effetti di trascinamento espressa dal postulato A).

La teoria balistica, edificata impeccabilmente da Ritz, e non raccolta dai suoi contemporanei, è stata difesa vivacemente da La Rosa; non mai seriamente confutata, e poi caduta quasi in dimenticanza; dobbiamo essere grati al Majorana di averla portata di nuovo innanzi all'attenzione dei fisici.

Se poi siano concepibili altre ipotesi, diverse da quella einsteiniana e da quella balistica, per rendere ragione di ciò che è affermato nel postulato A), è cosa che resta dubbia; si può solo dire che tali ipotesi non sono state mai fatte; e l'alternativa ora si riduce alla contrapposizione dei postulati B) e C).

4. Quali ragioni vi sono in favore dell'una o dell'altra alternativa?

Anzitutto, si possono addurre ragioni di carattere logico? Credo che dobbiamo essere tutti d'accordo nell'affermare che tanto la teoria fisico-

matematica di Ritz quanto la prima relatività di Einstein sono logicamente coerenti, e dal punto di vista matematico, del tutto inattaccabili. Ben a ragione Hadamard presiedendo la sezione relatività nel Congresso filosofico di Napoli 1924, fece accettare il principio che qualunque argomentazione di carattere puramente logico contro la prima relatività einsteiniana non dovesse venir presa in discussione; e la posizione, da allora ad ora non è cambiata.

Se Majorana ha accennato a possibili dimostrazioni aprioristiche in tal senso, dobbiamo ritenere che vi sia un malinteso, e che nelle proposte deduzioni egli includa qualche argomento che non appartiene al campo logico–deduttivo, ma a presupposti di carattere psicologico, a orientamenti preconcetti di pensiero; e questa è materia da discutere a parte.

I postulati della prima relatività einsteiniana sono ben semplici, espressi da poche equazioni di primo grado, o da equivalenti e ovvie costruzioni geometriche; quindi si fa presto a vedere se sono coerenti o no. Occorre pur riflettere che il numero dei seguaci di tale teoria, che l'hanno studiata sotto ogni forma, è ingentissimo; e fra essi vi sono dei matematici, bene avvezzi a scrutare le più riposte lacune logiche delle argomentazioni. Se fra di essi, nessuno ha trovato da rilevare incoerenza alcuna, dobbiamo, se mi si permette una frase teologica, concludere che è temerità dubitare della compatibilità degli assiomi einsteiniani, allo stesso titolo come lo sarebbe il dubitare della compatibilità dei postulati fondamentali della nostra aritmetica.

5. Diversamente si presenta la discussione se ci poniamo dal punto di vista intuitivo–psicologico.

Alla mentalità di alcuni fisici ripugna ammettere una relatività dello spazio e del tempo; cioè l'ammettere che la valutazione degli intervalli di spazio e di tempo, l'apprezzamento delle simultaneità, la sincronizzazione dei cronometri debba dipendere dallo stato di moto di chi fa l'osservazione. Alla mentalità di altri ripugna invece l'ammettere un tempo universale non suggerito da alcuna esperienza fisica; e riesce d'aiuto quella sintesi perspicua che nasce dalla geometria del cronòtopo. Ma questi sono sentimenti di preferenza personale, che non possono avere peso obbiettivo. Un ostacolo più serio ad accettare la teoria balistica è stato incontrato nella nuova concezione integrale che da essa consegue, secondo cui una causa sopravvenuta nel passato potrebbe produrre effetto nel futuro senza aver lasciato traccia nel presente di oggi (v. i lavori citati più oltre nella bibliografia). Ritz ha cercato di giustificare questo ardito distacco dalle concezioni del determinismo tradizionale; una innovazione che è ben più ardita e profonda di quanto non lo sia l'abbandono del tempo assoluto. Nella mia relazione al Congresso di Como 1927 ho mostrato che la ingegnosa difesa fatta da Ritz è artificiosa. Rimando a quella relazione per una discussione più approfondita sulla teoria balistica.

6. Un terzo campo di discussione, e più importante, si presenta quando invochiamo l'osservazione fisica e l'esperimento. La teoria di Einstein è d'ac-

cordo con l'esperimento, in tutti quei fenomeni che ai nostri mezzi d'indagine sono accessibili; ma l'accordo non è così probante e non si spinge così oltre come alcuni difensori della teoria vorrebbero far credere: deflessione gravitazionale dei raggi luminosi, spostamento di certe righe spettrali verso il rosso, aumento di massa nei corpuscoli accelerati dai ciclotroni, conseguenze atomico-spettrali, si constatano effettivamente, ma sempre le misure portano a un limitato numero di cifre significative, oppure lasciano adito a qualche altra, sia pure artificiosa, spiegazione. Nell'insieme, queste constatazioni formano un argomento assai convincente. Ma un convincimento più importante ancora noi ricaviamo dal vedere come l'insieme delle equazioni di Einstein-Minkowski conduca a una visione sintetica mirabilmente unitaria e semplice di tutto il complesso delle leggi fisiche; da essa teoria si deducono in modo naturale le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo, che altrimenti si dovrebbero accettare senza spiegazione.

Quanto alla teoria balistica, le sue conseguenze nel campo astronomico furono denunciate come contrarie ai fatti in un'antica e ben nota critica di De Sitter; ma questa critica è stata poi confutata. Anzi, su quelle conseguenze si fondarono poi tutte le argomentazioni di La Rosa il quale volle trovare nelle ipotesi balistiche una spiegazione del comportamento delle stelle variabili. Constatazioni astronomiche di questo tipo hanno il vantaggio di non implicare riflessioni su specchi in moto, nè passaggio di luce attraverso corpi materiali. Queste ultime circostanze introducono sempre incognite nuove, ed è per questo che tutti gli esperimenti terrestri eseguiti per decidere pro o contro la teoria balistica non hanno dato nessun risultato definitivo. Veggasi a questo riguardo la esauriente memoria di A. Cabras, 1928, la cui parte teorica ha dato poi lo spunto alla teoria unitaria di Fantappiè.

Nuove deduzioni contro l'ipotesi di Ritz e La Rosa, sempre a riguardo delle stelle variabili, sono state avanzate dal 1930 in poi; ed è desiderabile che vengano esaminate a fondo. Una di esse è citata nelle Note di Majorana, e si riassume in questo: la stella variabile, sia essa doppia, sia pulsante, dovrebbe per effetto Doppler dare uno spettro continuo solamente; e di fatto invece, in aggiunta allo spettro diffuso, si osserva uno spettro a righe. Una possibile spiegazione del fatto, sottile e ingegnosa, è stata suggerita da Majorana: un'altra si potrebbe ricavare riflettendo che lo spettro diffuso si produrrà bensì negli intervalli in cui una stella di una coppia, o una superficie di una stella pulsante, si avvicina o si allontana; ma questi intervalli sono intercalati da altri di stazionarietà della distanza (massimi e minimi); in questi ultimi momenti deve prodursi lo spettro a righe.

7. In conclusione, mentre le più forti presunzioni stanno a favore della teoria di Einstein, non si può ancora dire che il suo postulato B) sia definitivamente comprovato; e la teoria balistica non è ancora stata condannata da prove irrefutabili.

È da augurare che l'attenzione degli scienziati su questo argomento risorga; e che vengano seriamente discusse quelle argomentazioni antibali-

stiche che sono state avanzate negli ultimi due decenni; e che si compiano esperimenti cruciali. Questi ultimi, per essere decisivi, dovrebbero non implicare quelle incognite che hanno tolto efficacia conclusiva alle esperienze del passato; o dovrebbero offrire il modo di risolverle.

BIBLIOGRAFIA.

G. GIORGI, *L'elettrodinamica di Ritz e la teoria balistica delle radiazioni.* «Atti del Congresso Internazionale dei Fisici tenuto a Como 1927», vol. II, pp. 277–298.

A. CABRAS, *Sulla teoria balistica della luce.* Memorie di questa «Accademia», Serie VI, vol. III (1929) pp. 150–191. In questa Memoria si trova ampia bibliografia sulle opere relative alla teoria balistica, scritte fino a quella data.

G. CECCHINI, *Sulla teoria delle variabili fondata sui postulati di Ritz–La Rosa.* «Memorie della Società Astronomica Italiana», vol. V, n. 4 (1931).

L. FANTAPPIÈ, *Scritti vari sulla teoria unitaria dei fenomeni fisici*

Chimica organica. — *Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi.* – III. *Sulla densità della nuvola elettronica p_z nelle forme para–benzochinoidi.* Nota (*) di GIOV. BATTISTA BONINO e MARIO ROLLA, presentata dal Socio G. B. BONINO.

Nelle Note precedenti (v. note (3) e (7)) di questa serie abbiamo impostato la trattazione della struttura elettronica delle forme chinoidi e dei chinoni, considerando in queste forme tutti gli atomi come giacenti sullo stesso piano. Tale piano molecolare costituisce il piano nodale di otto funzioni d'onda elettroniche antisimmetriche, la cui perturbazione è l'elemento caratteristico di studio nel problema che stiamo trattando. La reciproca perturbazione di queste funzioni d'onda (chiamate p_z nella terminologia di Hückel (1), ovvero π in quella di altri autori (2)) in conseguenza delle loro caratteristiche di simmetria, può in prima approssimazione essere trattata come un problema a sè, indipendentemente dal resto degli elettroni molecolari. Le funzioni d'onda molecolari Ψ si scrivono come combinazioni lineari delle funzioni elettroniche ψ imperturbate, e cioè per ciascuno orbitale j si avrà:

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}\,\psi_k \qquad (1)$$

dove $c_{j,k}$ sono coefficienti normalizzati secondo la condizione:

$$\sum_k c^2_{j,k} = 1\,. \qquad (2)$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 ottobre 1948.

(1) Ved. per esempio E. HÜCKEL, «Zeits. f. Electrochem.», *43*, 752 (1937).

(2) Ved. per esempio COULSON, «Proc. Roy. Soc.», (London), *A 169*, 413 (1939).

I coefficienti $c_{j,k}$, debbono soddisfare alle equazioni:

$$\sum_k c_{j,k}(H_{k,l} - W_j d_{k,l}) = 0 \tag{3}$$

dove k e l rappresentano le posizioni di due atomi contigui in molecola e W_j corrisponde all'energia del livello molecolare j. Per le altre grandezze rimandiamo ad un nostro recente lavoro [3]. In genere supponendo tutti differenti gli atomi costituenti le molecole, l'equazione secolare avrà la forma:

$$\text{Det.}\,|H_{k,l} - W_j d_{k,l}| = 0 \tag{4}$$

dove:

$$(H_{k,l} - W_j d_{k,l}) = \begin{cases} \varepsilon_{j,k} = (W_k^0 - W_j) + \alpha_{k,k} & \text{per } k = l \\ \beta_{k,l} & \text{per } k = l \pm 1. \end{cases} \tag{5}$$

(Con l'indicazione simbolica $k = l \pm 1$ vogliamo indicare due posizioni k e l contigue). La grandezza W_k' corrisponde all'energia dell'elettrone nel campo puramente atomico dell'atomo k, escluso ogni termine di energia dipendente dalle interazioni fra i diversi atomi (interazioni atomiche). I termini diagonali $\varepsilon_{j,k}$ della matrice corrispondente sono differenti per atomi differenti o anche per atomi della stessa natura, ma diversamente legati in molecola. I valori $\beta_{k,l}$ corrispondono, come è noto, ai cosidetti integrali di risonanza, mentre $\alpha_{k,k}$ è il cosidetto integrale coulombiano per l'atomo k [4].

L'equazione secolare, nonostante le già effettuate semplificazioni, riuscirebbe ancora troppo complicata per una risoluzione rigorosa. A questo punto gli autori utilizzano approssimazioni diverse, più o meno ragionevoli e legittime. È chiaro però che i coefficienti $c_{j,k}$ dipendono dal tipo di approssimazione scelta. Questi coefficienti (che con i loro quadrati $c_{j,k}^2$, o con i prodotti $c_{j,k} \cdot c_{j,l}$ ci dànno le densità della nuvola elettronica degli elettroni mobili p_i nelle varie posizioni occupate dagli atomi nella molecola o rispettivamente nei vari legami molecolari) costituiscono uno dei primi obiettivi del calcolo quantomeccanico di queste strutture.

L'arbitrarietà della scelta nella approssimazione del calcolo lascia pur sempre un carattere di incertezza a questi risultati. HÜCKEL [5] nello studio

(3) G. B. BONINO e M. ROLLA, « Rend. Accad. Naz. Lincei », [VIII], *4*, 25 (1948).

(4) Nella letteratura dell'argomento si rileva ancora una incertezza sulle convenzioni atte a definire il segno di α e di β. Nei lavori classici di HÜCKEL si conviene di utilizzare per β il valore dell'integrale di risonanza cambiato di segno e perciò β, nel caso degli ordinari legami chimici, risulta maggiore di zero [v. HÜCKEL, « Z. f. Phys. », *70*, 265 (1931)]. Nei lavori della Scuola Inglese (LENNARD-JONES, COULSON – V. citazione (9) e (10)) viceversa, le grandezze α e β si assumono con segno invertito rispetto a quelle di HÜCKEL e perciò risultano negative. Nei nostri lavori ci siamo talvolta attenuti ad una e talvolta all'altra delle due convenzioni. Dato però che questo può ingenerare facili confusioni in chi non ha particolare consuetudine in questi calcoli, da questo lavoro in avanti ci atterremo sempre alla convenzione dei segni di α e β adottata dai detti autori inglesi.

(5) HÜCKEL, « Z. f. Phys. », *76*, 628 (1932).

di idrocarburi aromatici e polienici applica l'approssimazione più grossolana ponendo:

$$(6) \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha \quad \text{e} \quad W_1^0 = W_2^0 = \cdots = W_k^0$$

$$\beta_{k,l} = \beta_{k,l+1} = \cdots = \beta.$$

Questa approssimazione, che indicheremo con [A], è stata pure seguita da Seel [6] nella trattazione quantomeccanica della struttura degli xilileni e e più recentemente Pullman, Berthier e Pullman [7] hanno dato un calcolo dei diagrammi molecolari dell'orto e para–benzochinone seguendo pure la stessa grossolana approssimazione.

Nei precedenti lavori di questa serie [8] abbiamo seguìto una migliore approssimazione adattando ai nostri calcoli il procedimento utilizzato da Lennard–Jones e Turkevich [9], tenendo cioè conto dei due valori di β nei calcoli della struttura delle molecole chinoidi, dove evidentemente si dovevano supporre almeno due tipi di legami e cioè legami « corti » tipo C = C e C = O delle classiche formule, e legami « lunghi » (tipo C—C) ai quali si facevano corrispondere i due valori rispettivamente di β_d e β_s (approssimazione [B]).

Recentemente Coulson [10] ha affrontato lo studio dell'orto e para–benzochinone introducendo nei calcoli due valori diversi di β, uno promiscuamente per i legami C — C e C = C e l'altro per i legami C = O.

Gli elementi di matrice nel calcolo delle molecole chinoniche risultano così espresse da Coulson:

1° per gli atomi di ossigeno $\varepsilon_{j,o} = (\rho_j - h)\,\beta_{C-C}$;

2° per gli atomi di carbonio $\varepsilon_{j,c} = \rho_j\,\beta_{C-C}$.

Coulson fa una delicata discussione onde valutare la grandezza h e pone nei calcoli il valore di $h = -2$, riconoscendo però che attualmente l'incertezza nel valore di h è assai forte, poichè h dovrebbe corrispondere a -2 ± 1. Cioè l'incertezza è del 50 % [11].

Ci è parso perciò ancora utile pubblicare il calcolo dei coefficienti $c_{j,k}$ che noi avevamo eseguito sulla base dell'approssimazione suaccennata (approssimazione [B]) studiando come variano i coefficienti stessi al variare del rapporto β_d/β_s. Precedentemente avevamo calcolato [3] l'andamento delle radici delle rispettive equazioni secolari al variare dello stesso rapporto.

I due casi per i quali abbiamo concretamente affrontato il calcolo sono quelli per cui: $\beta_d/\beta_s = 1$ e $\beta_d/\beta_s = 2{,}04$.

Il primo corrisponde al caso limite dell'approssimazione [A] con tutti i valori di β uguali. Il secondo è quello calcolato con valori di β_d e β_s dedotti

(6) SEEL, « Zeit. Phys. Chem. », *B 51*, 229 (1942).

(7) PULLMAN, BERTHIER e PULLMAN, « Bull. Soc. Chim. France », fasc. 3-4, 450 (1948).

(8) Ved. citazione (3) ed inoltre allo stesso volume p. 273.

(9) LENNARD–JONES e TURKEVICH, « Proc. Roy. Soc. » (London), *A 158*, 286 (1937).

(10) COULSON, « Trans. Far. Soc. », *42*, 106 (1946).

(11) Ved. citazione 9 (p). 109.

dalle misure röntgenografiche di lunghezza di legame misurate per la molecola del para-benzochinone da Robertson [12].

Per avere i valori dell'energia in generale occorrerebbe poter valutare anche la differenza $\beta_d - \beta_s$ oltre al rapporto β_d/β_s, come effettivamente ci riesce di fare con l'approssimazione [B] valutando sperimentalmente i valori singoli dei β dalle misure röntgenografiche.

TABELLA I.

Para-benzochinone (*formula e numerazione v. fig. 1*).

Approssimazione [A] $\beta_d = \beta_s = \beta$; $\varepsilon_j = \rho_j \beta$.

ρ_j		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
2,1701	c_j	0,4325	—0,3696	0,3696	—0,4325	0,3696	—0,3696	—0,1993	0,1993
	c_j^2	0,1870	0,1366	0,1366	0,1870	0,1366	0,1366	0,0397	0,0397
1,4812	c_j	—0,5299	0,2136	0,2136	—0,5299	0,2136	0,2136	0,3577	0,3577
	c_j^2	0,2808	0,0456	0,0456	0,2808	0,0456	0,0456	0,1280	0,1280
1	c_j	0	0,5	—0,5	0	0,5	—0,5	0	0
	c_j^2	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25	0	0
0,3111	c_j	—0,1793	—0,2603	0,2603	0,1793	0,2603	—0,2603	0,5764	—0,5764
	c_j^2	0,0322	0,0678	0,0678	0,0322	0,0678	0,0678	0,3323	0,3323
—0,3111	c_j	0,1793	—0,2603	—0,2603	0,1793	—0,2603	—0,2603	0,5764	0,5764
	c_j^2	0,0322	0,0678	0,0678	0,0322	0,0678	0,0678	0,3323	0,3323
—1	c_j	0	0,5	0,5	0	—0,5	—0,5	0	0
	c_j^2	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25	0	0
—1,4812	c_j	0,5299	0,2136	—0,2136	—0,5299	—0,2136	0,2136	0,3577	—0,3577
	c_j^2	0,2808	0,0456	0,0456	0,2808	0,0456	0,0456	0,1280	0,1280
—2,1701	c_j	—0,4325	—0,3696	—0,3696	—0,4325	—0,3696	—0,3696	—0,1993	—0,1993
	c_j^2	0,1870	0,1366	0,1366	0,1870	0,1366	0,1366	0,0397	0,0397

Daremo in un secondo lavoro l'andamento dei $c_{j,k}$ per una serie di rapporti β_d/β_s, ma qui ci limitiamo a riportare nelle tabelle I e II le serie dei

(12) ROBERTSON, «Chem. Rev.», *16*, 430 (1935).

coefficienti per il valore $\beta_d/\beta_s = 1$ secondo l'approssimazione [A] e per lo speciale valore $\beta_d/\beta_s = 2{,}04$ che corrisponde, come abbiamo detto, al caso della approssimazione [B] relativa alla molecola del para-benzochinone.

TABELLA II.

Para-benzochinone (*formula e numerazione v. fig. 1*).

Approssimazione [B] $\beta_d = 2{,}04\,\beta_s$; $\beta_s = 0{,}5845\,\beta_{benz.}$; $\varepsilon_j = \rho_j\,\beta_{benz.}$

ρ_j		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
1,8360	c_j	0,4035	—0,3664	0,3664	—0,4035	0,3664	—0,3664	—0,2620	0,2620
	c_j^2	0,1628	0,1343	0,1343	0,1628	0,1343	0,1343	0,0687	0,0687
1,3352	c_j	—0,5124	0,1185	0,1185	—0,5124	0,1185	0,1185	0,4576	0,4576
	c_j^2	0,2625	0,0140	0,0140	0,2625	0,0140	0,0140	0,2094	0,2094
1,1924	c_j	0	0,50	—0,50	0	0,50	—0,50	0	0
	c_j^2	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25	0	0
0,6916	c_j	—0,2732	—0,3189	0,3189	0,2732	0,3189	—0,3189	0,4711	—0,4711
	c_j^2	0,0747	0,1017	0,1017	0,0747	0,1017	0,1017	0,2219	0,2219
—0,6916	c_j	0,2732	—0,3189	—0,3189	0,2732	—0,3189	—0,3189	0,4711	0,4711
	c_j^2	0,0747	0,1017	0,1017	0,0747	0,1017	0,1017	0,2219	0,2219
—1,1924	c_j	0	0,50	0,50	0	—0,50	—0,50	0	0
	c_j^2	0	0,25	0,25	0	0,25	0,25	0	0
—1,3352	c_j	0,5124	0,1185	—0,1185	—0,5124	—0,1185	0,1185	0,4576	—0,4576
	c_j^2	0,2625	0,0140	0,0140	0,2625	0,0140	0,0140	0,2094	0,2094
—1,8360	c_j	—0,4035	—0,3664	—0,3664	—0,4035	—0,3664	—0,3664	—0,2620	—0,2620
	c_j^2	0,1628	0,1343	0,1343	0,1628	0,1343	0,1343	0,0687	0,0687

Limitando per i risultati dell'approssimazione [B] (v. tabella II) la discussione ai quattro orbitali occupati nello stato fondamentale della molecola, si può osservare che nel livello più profondo ($\rho_8 = -1{,}8360$) abbiamo dei minimi di densità della nuvola di carica sugli atomi 7 e 8 (v. figura 1) ed una ripartizione quasi uniforme sugli altri atomi, con un leggero addensamento sugli atomi 1 e 4. Viceversa sul più alto livello occupato « livello

normale critico di reagibilità » e perciò, data la simmetria dei livelli rispetto allo zero, anche sul primo livello eccitato (« livello eccitato critico di reagibilità »), si nota in ambo i casi il più forte addensamento della nuvola di carica proprio sugli atomi 7 e 8, con minima densità invece sugli atomi 1 e 4, ad essi rispettivamente adiacenti

Fig. 1.

Si avrebbe dunque in questo caso una forte densità della nuvola di carica sugli atomi 7 e 8 proprio in corrispondenza delle meno profonde buche di potenziale. Il risultato può essere preso in considerazione per discussioni sulla reagibilità della molecola del parachinone nelle posizioni 7 e 8.

Alcuni autori moderni che hanno trattato il problema della reagibilità chimica delle molecole organiche (vedi Schmidt [13], Pullman [14]), pongono una relazione fra detta reagibilità e la ripartizione della nuvola di carica della molecola. Questi A. mettono a base dei loro ragionamenti alcuni postulati atti a stabilire una necessaria saldatura empirica tra le considerazioni fisiche e quelle chimiche, saldatura che oggi non è sempre possibile effettuare se si vuol procedere invece in modo razionale e rigoroso.

Per esempio nel caso trattato di idrocarburi aromatici (elettroni p_z , π) i Pullman [14] dichiarano esplicitamente che « il est normal d'admettre que la réactivité chimique d'un point d'un hydrocarbure aromatique dépend de la concentration en ce point des électrons π. Elle croît en même temps que cette concentration. Par conséquent le diagramme moléculaire sera une véritable image de la réactivité d'un corps . . . ».

Questa affermazione assiomatica dovrebbe essere completata con la considerazione che la reattività chimica sarà legata bensì ai massimi di densità elettronica, ma subordinatamente al valore delle buche di potenziale nelle quali si trovano gli elettroni stessi. Riesce infatti difficile concepire come gli elettroni, anche in punti della molecola caratterizzati da una alta probabilità di presenza degli stessi, possano aumentarne la reagibilità se posti in troppo profonde buche di potenziale. D'altra parte, dato che:

$$\sum_k c_{j,k}^2 = 1 \qquad \text{come pure} \qquad \sum_k c_{j,k}^2 = 1$$

(13) SCHMIDT, « Z. f. Phys. Chem. », *39*, 59 (1938); *42*, 83 (1939); *44*, 185. 193 (1939).

(14) PULLMAN, A. e B., « Experientia », vol. II. fasc, 9 (1496).

per ciascun atomo legato in molecola la densità media della nuvola di carica p_z (densità mediata cioè su tutti i livelli j occupati) è uniforme ed è uguale per tutti gli atomi k.

Dalle tabelle I e II si può anche osservare che l'effetto della variazione β_O/β_C sulla densità elettronica ai vari livelli sembra che si possa riassumere nei seguenti punti:

a) sul livello più profondo la densità della nuvola elettronica all'aumentare del rapporto aumenta sugli atomi di ossigeno e diminuisce leggermente invece sugli atomi di carbonio legati agli atomi di ossigeno stessi, e resta pressocchè invariata sugli altri atomi di carbonio.

b) sul livello meno profondo occupato allo stato fondamentale si ha l'effetto inverso e cioè all'aumentare del rapporto β_O/β_C si ha una rarefazione della nuvola p_z sulle posizioni corrispondenti agli atomi di ossigeno ed un addensamento nelle altre. Queste dipendenze dei $c_{j,k}$ dal rapporto dei β anche per i livelli meno profondi e per il primo livello eccitato (sui quali noi specialmente fissiamo la nostra attenzione agli effetti di una discussione sulla reagibilità chimica) richiamano tutta la necessità e l'importanza di poter affinare il grado di approssimazione di questi calcoli onde conferire ad essi una base sempre più quantitativa per una nuova teoria dei fenomeni chimici.

Elettrochimica. — *Sulla validità della equazione di Gibbs–Helmholtz per le pile di concentrazione*. Nota (*) del Socio Oscar Scarpa.

1. La validità della equazione di Gibbs–Helmholtz (1) per il calcolo termodinamico della forza elettromotrice (e) delle pile la cui energia interna varia di ΔU calorie, mentre erogano ε Coulomb in modo reversibile e isotermico:

$$e = \frac{4{,}18\,\Delta U}{\varepsilon} + T\frac{de}{dt} \cdots \text{Volt} \qquad (1)$$

venne confermata sperimentalmente da Jahn (2) per nove pile a due liquidi con elettrodi di differente natura, e per alcune altre da diversi sperimentatori, ma non risulta ne sia stata esaminata l'applicabilità alle pile di concentrazione di *prima specie*. Cioè alle pile, altrimenti dette *di diffusione*, formate con due eguali elettrodi metallici rispettivamente immersi nelle soluzioni (A , B) di uno stesso sale (M N) del metallo (M) onde son formati gli elettrodi,

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Tale equazione è da taluni attribuita a Gibbs, da altri a Helmholtz. Effettivamente deriva dagli studi di ambedue (vedere in proposito nella mia Nota: *Sulle equazioni di Helmholtz e di Gibbs* in « Atti della R. Accademia d'Italia », vol. II, anno 1941).

(2) « Wied. Ann. », vol. XXVIII, anno 1886.

le quali hanno diversa concentrazione (C_A, C_B) e sono poste fra loro in diretto contatto; oppure formate con due eguali elettrodi reversibili immersi in soluzioni egualmente concentrate di uno stesso sale, riunite mediante corti circuiti elettrolitici a due soluzioni di uno stesso elettrolita (M N), ma diversamente concentrate, poste fra loro in diretto contatto.

Per il calcolo della f.e.m. di queste pile si impiegano le equazioni dedotte da W. Nernst mediante considerazioni osmotiche, valide in quanto le due soluzioni poste a diretto contatto soddisfino alle leggi delle soluzioni ideali. Rispettivamente sono:

$$(2) \qquad e = \frac{RT}{\nu F} \frac{2v}{u+v} \log \frac{C_A}{C_B}$$

$$(3) \qquad e = \frac{RT}{\nu F} \frac{u-v}{u+v} \log \frac{C_A}{C_B}$$

ove u, v indicano rispettivamente le mobilità degli anioni e dei cationi provenienti dal sale disciolto, supposti di eguale valenza (ν), e F indica la unità elettrochimica di carica elettrica.

La applicabilità della equazione di Gibbs–Helmholtz a queste pile è particolarmente interessante dal punto di vista teorico, in quanto conduce a discutere alcuni degli aspetti più delicati delle teorie fondamentali della termodinamica. I valori della forza elettromotrice di queste pile, e quindi pur quelli dei lavori che sarebbero capaci di fornire al circuito esterno, dipendono infatti dalla esistenza di differenze fra le mobilità degli anioni e dei cationi, e quindi essenzialmente dipendono dalle grandezze degli attriti che il mezzo esercita sulle due specie di ioni.

Che la equazione di G.–H. non possa essere valida per tali pile di concentrazione, risulta dalla seguente trattazione.

Se si considerano pile nelle quali le due soluzioni del sale MN sono paragonabili alle ideali, la variazione della energia interna del sistema costituito da tali due soluzioni, conseguente al flusso di ε Coulomb alla temperatura costante T, ha valore nullo, e quindi ponendo nella (1): $\Delta U = 0$ risulta $\varepsilon = T \frac{de}{dt}$ da cui, integrando, $e = \mathbf{K}T$ ove $\mathbf{K}$ indica, per ogni pila avente una determinata costituzione, una costante il cui valore è indipendente dalla temperatura. Ne segue che le quantità:

$$\frac{R}{\nu F} \frac{2v}{u+v} \log \frac{C_A}{C_B}$$

$$\frac{R}{\nu F} \frac{u-v}{u+v} \log \frac{C_A}{C_B}$$

che compaiono nelle equazioni (2), (3) (che è da tener presente sono ben verificate dalle esperienze) dovrebbero aver valori indipendenti dalla temperatura.

Per esaminare se tale conclusione è ammissibile, si deve anzitutto osservare che essendo le soluzioni A, B molto diluite, debbono possedere sensibilmente eguali i valori dei coefficienti di dilatazione termica, ragione per cui i valori dei rapporti $\frac{C_A}{C_B}$ debbono essere indipendenti dalla temperatura. Ne segue, derivando rispetto alla temperatura, che dovrebbe venir soddisfatta l'equazione:

$$u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt} = 0. \tag{4}$$

Ma che ciò possa avvenire è nettamente contrastato dai risultati sperimentali.

Ecco ad esempio quanto ho calcolato in base alle misure di Kohlrausch [3] riferite agli ioni-equivalenti e alla diluizione limite, per la temperatura di + 18° C.

Elettrolita	u	v	$\frac{du}{dt}$	$\frac{dv}{dt}$	$u\frac{dv}{dt}$	$v\frac{du}{dt}$	$u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}$
HCl	65,5	315	1,41	4,85	318	444	— 126
HNO_3	61,7	315	1,26	4,85	299	397	— 98
H_2SO_4	68	315	1,55	4,85	330	488	— 158
NaCl	65,5	43,5	1,41	1,06	69,5	61,3	+ 8,2
KCl	65,5	64,6	1,41	1,41	92,4	91,1	+ 1,3
$NaNO_3$	61,7	43,5	1,26	1,06	65,4	54,8	+ 10,6
KNO_3	61,7	64,6	1,26	1,41	87,0	81,4	+ 5,6
$MgSO_4$	68	45	1,55	1,15	78,2	70,5	+ 7,7
$ZnSO_4$	68	46	1,55	1,17	79,4	71,3	+ 8,3
$CaSO_4$	68	46	1,55	1,12	76,2	71,3	+ 4,9

Risulta quindi la inapplicabilità della equazione di Gibbs-Helmholtz alle pile di concentrazione di prima specie.

Aggiungo che a una eguale conclusione si arriva se invece di scrivere le equazioni di Nernst mettendo in evidenza le mobilità degli ioni, si esprimono i loro secondi membri in funzione dei numeri di trasporto (n_-, n_+)

(3) LANDOLT und BORNSTEIN, *Phys.-Chem.-Tabellen* V edizione, vol. II, p. 1104.

dell'anione e del catione. Così facendo dovrebbero risultare indipendenti dalla temperatura le quantità:

$$\frac{R}{\nu F} 2 n_+ \log \frac{C_A}{C_B} \quad , \quad \frac{R}{\nu F} (n_- - n_+) \log \frac{C_A}{C_B}$$

fatti che si verificherebbero se fosse: $\frac{dn_+}{dt} = \sigma$ e $\frac{dn_-}{dt} = \frac{dn_+}{dt}$. Ma che ciò possa avvenire è nettamente contrastato dai risultati delle esperienze.

2. Ben differente è il caso delle pile di concentrazione di *seconda specie*. Queste pile comprendono: 1° quelle costituite con due elettrodi del medesimo metallo rispettivamente immersi in soluzioni diversamente concentrate di un sale del metallo, le quali comunicano fra loro attraverso un corto circuito elettrolitico. Ad esse corrisponde lo schema:

$$\mathrm{M} \left| \begin{matrix} \mathrm{MN} \\ \text{conc.} \\ \mathrm{C_1} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \text{corto c.} \\ \text{elettr.} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \mathrm{MN} \\ \text{conc.} \\ \mathrm{C_2} \end{matrix} \right| \mathrm{M}$$

2° quelle i cui elettrodi sono formati con leghe binarie omogenee (in particolare con amalgame del medesimo metallo) diversamente concentrate, fra le quali è interposta la soluzione di un sale del metallo (M) disciolto. A queste corrisponde lo schema:

$$\begin{matrix} \text{Amalgama} \\ (\mathrm{M\ Conc.\ C_1}) \end{matrix} \left| \begin{matrix} \mathrm{MN} \\ \text{soluz.} \end{matrix} \right| \begin{matrix} \text{Amalgama} \\ (\mathrm{M\ Conc.\ C_2}) \end{matrix}$$

Le prime attirarono l'attenzione di Helmholtz precedentemente (cinque anni prima [4]) allo studio che lo condusse all'equazione (1). Supponendo le due soluzioni del sale MN in diretto contatto e, implicitamente, ammettendo nulla la f.e.m. sviluppata a tale contatto (a quell'epoca non erano ancora ben note le f.e.m. sviluppate al contatto fra due elettroliti) Helmholtz, equiparando il lavoro elettrico compiuto dalla pila durante la circolazione di νF Coulomb, a quello meccanico corrispondente alla evaporazione isotermica dalla soluzione più diluita di una data quantità di solvente e alla contemporanea condensazione nella soluzione più concentrata, in modo da produrre variazioni delle concentrazioni eguali a quelle prodotte dal passaggio della corrente elettrica attraverso alla pila, dedusse l'equazione:

$$(5) \qquad e = \frac{RT}{\nu F} \log \frac{C_1}{C_2}$$

che risultò verificata dalle esperienze nei casi in cui sia trascurabile la grandezza della f.e.m. sviluppata al contatto fra le due soluzioni, e queste sieno talmente diluite da poter applicare con sufficiente approssimazione le leggi delle soluzioni ideali [5].

(4) « Wied. Ann. », III, p. 201, anno 1877.

(5) Alla medesima equazione arrivò W. NERNST dodici anni più tardi (« Zeit. Phys. Chem. », IV, 129, anno 1889).

Per la pile del 2° tipo, Türin [6] propose un'equazione coincidente con la (5), alla quale si giunge più rigorosamente considerando i coefficienti di attività (j_1, j_2) posseduti dagli atomi del metallo disciolto nelle due amalgame ed eseguendo la trattazione in base alla nozione dei rispettivi potenziali termodinamici. Si deduce in tal modo la equazione:

$$e = \frac{RT}{\nu F} \log \frac{j_1 C_1}{j_2 C_2}$$

che pur coincide con la (5) quando, essendo le due amalgame molto diluite, sia possibile ammettere $j_1 = j_2 = 1$.

La equazione (5) è stata verificata sperimentalmente per le pile con amalgame da Meyer [7] e da altri fisici, il che avviene quando le amalgame sono sufficientemente diluite e non contengono composti intermetallici. Infatti le misure di Cady [8] mostrarono forti deviazioni nel caso delle amalgame di metalli alcalini.

Ne segue che per ambedue i tipi delle pile di concentrazione di seconda specie (se le coppie delle soluzioni oppure le coppie di amalgame sono sufficientemente diluite, in modo da poter ammettere, per ogni coppia, eguali i valori dei coefficienti di dilatazione termica) i valori dei rapporti $\frac{C_1}{C_2}$ si possono assumere costanti al variare della temperatura, e quindi, in ambedue i casi, scrivere la (5) sotto la forma: $e = \mathcal{K} T$, con $\mathcal{K}$ indipendente dalla temperatura.

Ne segue che per queste pile $\frac{de}{dt} = \mathcal{K}$, e perciò:

$$e = T \frac{de}{dt} \tag{6}$$

equazione che coincide con quanto risulta ponendo nella equazione di Gibbs–Helmholtz $\Delta U = 0$; posizione questa giustificata dal fatto che alle coppie di soluzioni, e alle coppie di amalgame si sono ammesse applicabili le leggi delle soluzioni ideali.

CONCLUDENDO. *La equazione di Gibbs-Helmholtz non è valida per le pile di concentrazione di prima specie sopra considerate; è invece valida per quelle di concentrazione di seconda specie.*

In altra Nota esporrò il caso delle pile di concentrazione possedenti coppie di soluzioni o di amalgame non diluite.

(6) « Zeit. Phys. Chem. », V, 340, anno 1890.
(7) « Zeit. Phys. Chem. », VII, 447, anno 1891.
(8) « Journal Phys. Chem. », II, 551, anno 1898.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria). — *Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche* (*). Nota II di MARIO VILLA, presentata (**) dal Socio L. BERZOLARI.

4. Dal teorema del n. 3 segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la rete R *individuata da tre curve piane algebriche dello stesso ordine* $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (f, φ, ψ *polinomi omogenei nelle variabili* x_1, x_2, x_3, *dello stesso grado, linearmente indipendenti, a Jacobiano non identicamente nullo*) *sia omaloidica è che il polinomio*

$$(f\varphi_1 - \varphi f_1) J'_2 - (f\varphi_2 - \varphi f_2) J'_1 \tag{4. 1}$$

sia divisibile per J', *oppure sia identicamente nullo, e che la Jacobiana* $J = 0$ *si comporti regolarmente nei punti base* (10).

Infatti, sia n il grado dei polinomi f, φ, ψ. Se $n = 1$ la rete R è senz'altro omaloidica e la condizione (4. 1) è verificata essendo $J'_1 \equiv J'_2 \equiv 0$. Nel seguito supporremo quindi $n > 1$.

Consideriamo nella rete R un fascio di curve

$$f + \lambda\varphi = 0 .$$

La curva di questo fascio passante per il punto (semplice) $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ della curva $J' = 0$ è

$$\bar{\varphi} f - \bar{f}\varphi = 0 , \tag{4. 2}$$

dove $\bar{\varphi}, \bar{f}$ sono i valori assunti da φ, f per $x_i = \bar{x}_i$ ($i = 1, 2, 3$). La tangente nel punto $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ alla (4. 2) (se non è indeterminata) è la tangente stazionaria ed ha l'equazione

$$\sum_i (\bar{\varphi} f_i - \bar{f}\bar{\varphi}_i) x_i = 0 . \tag{4. 3}$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 9 giugno 1948.

(10) Se il polinomio J è irriducibile, oppure se è riducibile ma i fattori che lo costituiscono appaiono elevati alla prima potenza, si porrà $J \equiv J'$. Se invece J è riducibile e in esso appaiono fattori con esponenti > 1, allora J' è il polinomio costituito da tutti e soli i fattori costituenti J elevati alla prima potenza. Nell'enunciato del testo al polinomio (4. 1) si può sostituire il polinomio $(f\varphi_1 - \varphi f_1) J'_3 - (f\varphi_3 - \varphi f_3) J'_1$, oppure il polinomio $(f\varphi_2 - \varphi f_2) J'_3 - (f\varphi_3 - \varphi f_3) J'_2$. Fa però eccezione il caso in cui J è divisibile per x_3. Allora affinchè la rete sia omaloidica oltre ad essere divisibile per J' il polinomio (4. 1), occorre che sia divisibile per J' anche il primo dei polinomi ora indicati (il che nel caso presente non avviene necessariamente) e, se J è divisibile anche per x_2, occorre ancora che sia divisibile per J' anche il secondo dei polinomi precedenti (il che nel caso presente non avviene necessariamente). Gli indici in basso indicano derivate parziali. Così $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ e analogamente.

D'altra parte la tangente nel punto $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ alla $J' = 0$ è

$$\sum_i \bar{J}'_i x_i = 0 . \tag{4. 4}$$

Ora, per il teorema del n. 3, affinchè la rete R sia omaloidica per ogni punto $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ di $J' = 0$ le rette (4. 3), (4. 4) devono coincidere, o la (4. 3) essere indeterminata [11].

Siccome le rette (4. 3), (4. 4) passano per il punto $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, affinchè coincidano basta che siano uguali due dei tre rapporti

$$\frac{\varphi \bar{f}_1 - \bar{f}\bar{\varphi}_1}{\bar{J}'_1} , \quad \frac{\bar{\varphi}\bar{f}_2 - \bar{f}\bar{\varphi}_2}{\bar{J}'_2} , \quad \frac{\bar{\varphi}\bar{f}_3 - \bar{f}\bar{\varphi}_3}{\bar{J}'_3} .$$

Si conclude: affinchè la rete R sia omaloidica, il polinomio

$$(\varphi f_1 - \varphi f_1) J'_2 - (f\varphi_2 - \varphi f_2) J'_1 \tag{4. 1}$$

deve annullarsi per ogni terna di numeri $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ soddisfacente la $J' = 0$. E ciò avviene quando (e solo quando) il polinomio (4, 1) è divisibile per J' oppure è identicamente nullo [12]. Tenendo presente il teorema del n. 3, l'asserto è dimostrato.

Osservazione I: Se nell'enunciato del teorema precedente al polinomio $(f\varphi_1 - \varphi f_1) J'_2 - (f\varphi_2 - \varphi f_2) J'_1$ (o a uno dei due indicati nella [10]) si sostituisce il polinomio

$$(f\varphi_1 - \varphi f_1) J_2 - (f\varphi_2 - \varphi f_2) J_1 \tag{4. 6}$$

(oppure $(f\varphi_1 - f\varphi_1) J_3 - (f\varphi_3 - \varphi f_3) J_1$ o $(f\varphi_2 - \varphi f_2) J_3 - (f\varphi_3 - \varphi f_3) J_2$) e si impone la divisibilità per J (invece che per J'), si ottiene una condizione soltanto necessaria perchè la rete sia omaloidica, in quanto sfugge il caso in cui in J appaiono fattori con esponenti > 1 (cioè il caso in cui della

(11) Si veda la fine della nota seguente.

(12) Posto $f\varphi_i - \varphi f_i \equiv \omega_i$, dei tre polinomi $\omega_1 J'_2 - \omega_2 J'_1$, $\omega_1 J'_3 - \omega_3 J'_1$, $\omega_2 J'_3 - \omega_3 J'_2$, se uno è divisibile per J' oppure è indeterminato, altrettanto si verifica per gli altri due (a meno che J, e quindi J', sia divisibile per x_1 o x_2 oppure x_3). Ciò segue, oltre che dalla dimostrazione del testo, dalla seguente verifica diretta. Si ha infatti $\sum_i J'_i x_i \equiv n' J'$, dove n' è il grado di J',

$$\sum_i \omega_i x_i \equiv \sum_i (f\varphi_i - \varphi f_i) x_i \equiv f \sum_i \varphi_i x_i - \varphi \sum_i f_i x_i \equiv n f \varphi - n \varphi f \equiv 0 . \tag{4. 5}$$

Segue

$$(\omega_1 J'_3 - \omega_3 J'_1) x_3 \equiv n' \omega_1 J' - x_2 (\omega_1 J'_2 - \omega_2 J'_1) .$$

Se $\omega_1 J'_2 - \omega_2 J'_1$ è divisibile per J' lo sarà anche il secondo membro della precedente identità e quindi $\omega_1 J'_3 - \omega_3 J'_1$ sarà pure divisibile per J' o identicamente nullo (supposto J non divisibile per x_3). Se $\omega_1 J'_2 - \omega_2 J'_1 \equiv 0$, la precedente identità diviene

$$x_3 (\omega_1 J'_3 - \omega_3 J'_1) \equiv n' \omega_1 J'$$

per cui $\omega_1 J'_3 - \omega_3 J'_1$ è divisibile per J' (supposto J non divisibile per x_3).

S'avverta anche che, per la (4. 5), se ω_1, ω_2 sono nulli (identicamente, o per certi valori di x_1, x_2, x_3 con $x_3 \neq 0$), altrettanto avviene per ω_3.

curva Jacobiana $J = 0$ fa parte una curva C contata $\nu > 1$ volte). In un punto di tale componente multipla C la (4. 6) è senz'altro verificata essendo $J_1 = J_2 = 0$, mentre, per il teorema del n. 3, la tangente stazionaria deve coincidere con la tangente a C.

Di conseguenza, dovendosi verificare se una rete è o no omaloidica, si dovrà ricorrere alla (4. 1). Invece nella ricerca di reti omaloidiche, col metodo che scaturisce dal precedente teorema e a cui si è alluso nel n. 1, converrà ricorrere alla (4. 6) sulla quale si impernia appunto il metodo suddetto.

Osservazione II: Il polinomio (4. 1), a meno del fattore $\frac{1}{f^2}$, è l'Jacobiano di $\frac{\varphi}{f}$ e J' rispetto ad x_1, x_2.

5. Il teorema del n. 4 si può enunciare anche così:

Dati tre polinomi f, φ, ψ, *omogenei nelle variabili* x_1, x_2, x_3, *dello stesso grado* (*linearmente indipendenti, a Jacobiano* J *non identicamente nullo*), *condizione necessaria e sufficiente affinchè dalle*

$$y_1 = f \quad , \quad y_2 = \varphi \quad , \quad y_3 = \psi \tag{5. 1}$$

possano trarsi le inverse

$$x_1 = F \quad , \quad x_2 = \Phi \quad , \quad x_3 = \Psi$$

dove F, Φ, Ψ, *sono polinomi omogenei nelle* y_i *dello stesso grado* (*vale a dire: affinchè le* (5. 1) *rappresentino una trasformazione cremoniana*) *è che il polinomio*

$$(f\varphi_1 - \varphi f_1) J'_2 - (f\varphi_2 - \varphi f_2) J'_1 \tag{5. 2}$$

sia divisibile per J', *oppure sia identicamente nullo, e che la Jacobiana della rete individuata dalle tre curve* $f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$ *si comporti regolarmente nei punti base* [13].

Infatti, condizione necessaria e sufficiente affinchè le (5. 1) rappresentino una trasformazione cremoniana è, com'è ben noto, che la rete individuata dalle curve $f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$ sia omaloidica. Quindi dal teorema del n. 4 segue senz'altro l'asserto. Si possono ripetere qui considerazioni analoghe a quelle svolte nell'Osservazione I del n. 4.

6. Data una rete di curve piane algebriche d'ordine $n > 1$ (a Jacobiana non indeterminata), le curve della rete passanti per un punto P della Jacobiana J (diverso dagli eventuali punti base della rete) hanno tutte la stessa tangente t (*tangente stazionaria*), esclusa la curva della rete avente in P punto

(13) In questo enunciato al polinomio (5. 2) si può sostituire uno qualunque dei due polinomi indicati nella (10). Se però J è divisibile per x_3 (per x_2 o per x_1) alla condizione del testo si deve aggiungere quella o quelle esposte nella (10).

Se f, φ, ψ, sono di 1° grado, le (5. 1) rappresentano un'omografia e la condizione (5. 2) è senz'altro verificata essendo $J'_1 \equiv J'_2 \equiv 0$.

doppio. La curva Γ inviluppata dalle ∞^1 rette stazionarie t (relative agli ∞^1 punti P di J) è la cayleyana della rete.

La curva della rete avente in P punto doppio ha ivi per tangenti due rette t_1, t_2 (che si diranno *tangenti nodali*) che, com'è ben noto [14], separano armonicamente la coppia costituita dalla tangente in P alla Jacobiana e dalla tangente stazionaria.

Anche l'inviluppo delle tangenti nodali t_1, t_2 è covariante proiettivo della rete [15].

Quando e solo quando la rete è omaloidica la curva Γ *coincide con* J' [16] *e la Jacobiana della rete si comporta regolarmente nei punti base* (n. 3). La coincidenza della tangente stazionaria con quella della Jacobiana implica la coincidenza di una delle tangenti nodali con la tangente alla Jacobiana, e inversamente.

Segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete di curve piane algebriche sia omaloidica è che la curva inviluppata dalle tangenti nodali si spezzi in J' [17] *e in una curva residua e che la Jacobiana della rete si comporti regolarmente nei punti base.*

Per le reti omaloidiche, rimane quindi da considerare la curva residua [18].

7. La coincidenza della tangente stazionaria con la tangente della Jacobiana, che appare come condizione fondamentale nel teorema del n. 3 mi si è presentata, per la prima volta, in una ricerca di tutt'altra natura. Ho dimostrato che: condizione necessaria e sufficiente affinchè una data trasformazione puntuale fra due piani si possa osculare, in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo, con una trasformazione cremoniana è che la tangente stazionaria coincida con la tangente alla Jacobiana [19]. Il teorema del n. 3 si riferisce ad una proprietà *in grande* e di natura esclusi-

(14) Si veda, ad esempio: VILLA, op. cit., pp. 180, 242, 243.

(15) I punti in cui s'intersecano la curva Γ e la curva inviluppata dalle tangenti nodali e i punti in cui esse intersecano J potrebbero pure essere esaminati.

(16) Se però nella rete esiste un fascio di curve dotato di una curva base C contata almeno due volte, allora Γ è dato da J' a cui si sia tolta la componente C (si badi che C fa parte di J, contata almeno due volte, e quindi di J').

(17) Vale la stessa riserva espressa nella (16).

(18) Per una rete omaloidica di coniche, l'inviluppo delle tangenti nodali, diverse da quelle della Jacobiana, è costituito dai tre fasci di rette aventi per centro i tre punti base. In questo caso manca quindi la curva residua.

(19) VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. II, p. 136 (1947).

Lo studio delle trasformazioni puntuali fra due piani π, π' in una coppia O, O' di punti corrispondenti a Jacobiano nullo, dal punto di vista della geometria proiettiva differenziale, fu iniziato dal BOMPIANI (*Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane*, « Memorie dell'Accademia d'Italia », vol. XIV, pp. 11–21, 1943).

In tale ricerca si presenta subito la direzione per O (supposto O punto semplice della Jacobiana di π) corrispondente ad una direzione generica per O'. Questa direzione era stata considerata anche precedentemente da JULIA in un lavoro di carattere metrico (JULIA, *Remar-*

vamente algebrica, mentre quello sopra ricordato è *locale* e si riferisce a trasformazioni puntuali qualunque.

Voglio far rilevare, per quanto i due teoremi *non* siano strettamente legati fra loro, come una ricerca locale di geometria differenziale abbia gettato luce sopra un classico problema di geometria algebrica.

Matematica (Topologia). — *Sopra l'indipendenza di alcuni invarianti topologici.* Nota (*) di ACHILLE BASSI, presentata dal Corrisp. B. SEGRE.

In una Memoria, dedicata allo studio delle varietà topologiche ad n dimensioni, introdussi qualche tempo fa alcuni invarianti μ_i, che mi condussero a definire ciò che chiamai l'*irregolarità topologica* di una varietà [1].

Relativamente a tale lavoro, fu autorevolmente osservato che in esso non risulta provata l'indipendenza dei nuovi invarianti dai classici, cioè dai gruppi di omologia e dal gruppo del Poincaré [2].

ques sur les trasformations ponctuelles planes au voisinage d'un point où le Jacobien est nul, « Bull. Sciences Math. », vol. 53, pp. 225–231, 1929).

La direzione in discorso è chiamata *privilegiata* da JULIA e *stazionaria* dal BOMPIANI. In una trasformazione razionale fra due piani, considerata la rete di curve di un piano corrispondenti alle rette dell'altro, le rette stazionarie sono le tangenti t alle curve della rete nei punti della Jacobiana. Ho chiamato perciò, nei numeri precedenti, *stazionarie* le rette t relative ad una rete di curve piane algebriche.

Il BOMPIANI (op. cit., p. 17) ha anche considerato la curva inviluppo delle rette stazionarie di un piano in una trasformazione puntuale. La curva del n. 6, inviluppo delle tangenti stazionarie di una rete, appare quindi già implicitamente nel lavoro citato di BOMPIANI, sia pure in relazione con una trasformazione puntuale. Il BOMPIANI (op. cit., p. 15) oscula la data trasformazione puntuale in (O , O') con trasformazioni razionali $(1, 2)$. Io notai che, se la tangente stazionaria era distinta dalla tangente alla Jacobiana, l'approssimazione non era possibile non soltanto con trasformazioni quadratiche ma neppure con trasformazioni cremoniane d'ordine più elevato ed intuii che la coincidenza della tangente stazionaria con la tangente alla Jacobiana fosse sufficiente per ottenere l'approssimazione con trasformazioni cremoniane. I calcoli che affidai ad una mia laureanda (la sig. Taruffi laureatasi a Bologna nel 1945) confermarono la mia previsione. Comunicai il risultato al BOMPIANI e ne seguirono una Nota dello stesso BOMPIANI (*Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. II, p. 22, 1947) e la mia Nota lincea citata. La condizione non è però sufficiente per l'approssimazione con trasformazioni quadratiche (VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo*, « Bollettino dell'U. M. I. », ser. III, vol. II, p. 3, 1947).

(*) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1948.

(1) A. BASSI, *Su alcuni nuovi invarianti delle varietà topologiche* (« Annali di Mat. Serie IV, tomo XVI, 1937, pp. 275–297).

(2) Infatti, secondo un giudizio formulato nel 1939 da una Commissione Esaminatrice, i risultati di tale Memoria « sarebbero di prim'ordine qualora si dimostrasse che trattasi di invarianti essenzialmente distinti da quelli conosciuti ». Nella Memoria citata è invero omesso tale esame, che è svolto soltanto ora in questa Nota, in conseguenza della lunga interruzione delle comunicazioni normali verificatasi tra l'Europa e l'America.

Questa breve Nota ha appunto lo scopo di mostrare che questa indipendenza sussiste; ciò si ottiene esaminando alcuni semplici esempi, scelti tra i modelli di varietà topologiche considerati in quella stessa Memoria e in un'altra mia precedente (3). In pari tempo si accenna a questioni analoghe che si presentano in relazione ad altri nuovi invarianti, introdotti più recentemente in topologia.

1. Indichiamo con S_1 una circonferenza e con S_2 una superficie sferica, e rappresentiamo col segno di moltiplicazione l'usuale prodotto topologico e col segno di addizione l'usuale operazione di saldatura o somma di due varietà chiuse n–dimensionali (senza contorno), ponendo in particolare ad esempio $3S = S + S + S$, ove S denoti una varietà chiusa. La suddetta operazione di saldatura è stata già considerata nei nn. 1, 3 dell'ultima Memoria citata, e consiste in questo: si estraggano, da ciascuna delle due varietà con cui si opera, i punti interni ad una n-cella e si identifichino, mediante un omeomorfismo qualsiasi, i contorni ipersferici ottenuti. Si ottiene così una varietà che, almeno nei casi elementari considerati in questa Nota, è – a meno di un omeomorfismo – determinata univocamente, indipendentemente cioè dal modo con cui si è eseguita la saldatura (4).

Ciò premesso, consideriamo le due varietà 3–dimensionali V e W definite dai simboli

$$V = S_1 \times S_1 \times S_1 \quad , \quad W = 3 \cdot S_1 \times S_2 ,$$

ossia rispettivamente il prodotto topologico di tre circonferenze, e la saldatura, eseguita nel modo anzidetto, di tre modelli distinti di varietà

(3) A. BASSI, *Un Problema Topologico di Esistenza* («Memorie della Reale Accademia d'Italia», Classe di Scienze Fisiche, Mat. e Naturali, vol. VI, 1935, pp. 669–714).

(4) Si deve per altro osservare che la suddetta univocità non vale senza opportune restrizioni, come ad esempio quella che una almeno delle varietà addende possegga un omeomorfismo in sè che inverta l'orientamento del contorno ipersferico; condizione, questa, che è sempre soddisfatta dalle varietà a due dimensioni. Se la varietà è orientabile, la suddetta condizione implica l'esistenza di un omeomorfismo della varietà in sè che ne inverta l'orientamento, e se tale omeomorfismo esiste la varietà è detta *simmetrica*. Le varietà considerate nelle Memorie sopra citate sono tutte simmetriche.

Se per contro non esiste nessun omeomorfismo siffatto, se cioè le due varietà addende sono, come suol dirsi, *asimmetriche*, la loro saldatura può dare origine a due varietà topologicamente distinte, ottenute stabilendo tra i due contorni ipersferici un omeomorfismo che faccia corrispondere ad un dato orientamento del primo contorno un orientamento assegnato del secondo, oppure il suo contrario. Questa eventualità si verifica già operando con opportune varietà a tre dimensioni.

In generale, se si saldano nel modo detto m varietà distinte, si ottengono delle varietà somma topologicamente distinte – in numero uguale a 2^σ, con $0 \leq \rho \leq m - 1$, ove il valore massimo 2^{m-1} può essere effettivamente raggiunto.

Le diverse varietà somma ottenute cogli stessi addendi hanno i gruppi di omologia e il gruppo del POINCARÉ isomorfi; esse tuttavia, nel caso più noto di $n = 3$, sono distinguibili l'una dall'altra per mezzo di invarianti di allacciamento (cfr. per esempio, H. SEIFERT e W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, p. 218 e p. 280).

ciascuno omeomorfo al prodotto topologico di una circonferenza e di una sfera.

In base alle formule note, che permettono di calcolare i gruppi di omologia della varietà prodotto di due altre [5] e di quella saldatura di due altre [6], risulta che la V e la W hanno *gruppi di omologia isomorfi*.

È facile inoltre vedere che tali varietà hanno isomorfi anche *i gruppi del Poincaré*, i quali, in questo caso, coincidono anzi con i gruppi di omologia ad una dimensione. La cosa risulta subito ricordando che la varietà prodotto di due altre ha, come gruppo del Poincaré, la somma diretta dei gruppi delle due varietà, ed osservando che la varietà somma di due altre, che siano di dimensione $\geqq 3$, ha come gruppo del Poincaré ancora la somma diretta dei gruppi delle varietà addende.

Nonostante ciò, gli invarianti μ_i di queste due varietà, calcolati a norma delle proposizioni 7 : 2 e 8 : 1 della Memoria citata in [3], sono

$$\mu_i\,(V) = 4 \quad \text{e} \quad \mu_i\,(W) = 3 \qquad (i = 0\,,\ 1\,,\ 2).$$

Dunque *esistono varietà aventi gruppi di omologia e gruppi del Poincaré identici, ma aventi distinti tutti gli invarianti* μ_i.

Si può anche mostrare che *esistono varietà aventi i* μ_i *uguali e numeri del Betti del tutto diversi*.

Infatti le varietà considerate nel n. 9 della Memoria citata in [3] hanno tutte, per i detti teoremi 7 : 2 e 8 : 1 della prima Memoria, $\mu_i = 3$ $(i = 0\,,\ 1\,,\ 2)$; esse tuttavia hanno i numeri del Betti arbitrari quando la loro dimensione non sia multipla di 4, e quasi arbitrari nel caso opposto.

Il dubbio espresso nel secondo capoverso del presente lavoro appare quindi sufficientemente chiarito.

2. Maggiore interesse attuale ha la questione di sapere se e quali relazioni intercedano tra gli invarianti μ_i da me introdotti e quelli che più recentemente hanno assunto importanza in topologia, specie gli invarianti dell'*anello di omologia*, il cui studio sistematico, iniziato dall'Hopf, amplia e approfondisce in modo opportuno quel tipo di considerazioni iniziato dal Poincaré coll'introduzione dei gruppi di omologia.

Le due varietà V e W sopra considerate non presentano interesse a questo fine, perchè non hanno anelli di omologia isomorfi. Si può per altro osservare, in primo luogo, che la stessa esistenza degli spazi del Poincaré (spazi cogli stessi gruppi di omologia di una sfera o di una cella, ma non omeomorfi ad una sfera o ad una cella) prova che μ_0 *e quindi anche le irregolarità topologiche* $\mu_0 - \mu_1$ *e* $\mu_0 - \mu_2$ *sono indipendenti dall'anello di omologia*.

La dipendenza o indipendenza di μ_1 e di μ_2 meriterebbe di essere specificatamente studiata. Qui osservo solamente che, ripetendo un ragionamento

[5] Circa i gruppi di omologia della varietà prodotto di due altre vedi, per esempio, S. LEFSCHETZ, *Topology* (1930) p. 228 e sgg.

[6] Circa i gruppi di omologia della varietà saldatura di due altre vedi, ad esempio, il n. 4 della Memoria citata in (3).

oramai classico [7], detto δ il numero massimo di cicli di una varietà (distinti dall'intera varietà) la cui intersezione combinatoria è non vuota, ossia il massimo numero di elementi dell'anello (diversi dall'unità) il cui prodotto non è nullo, si può dimostrare la limitazione:

$$\mu_i \geq \delta + 1 \qquad (i = 1, 2),$$

la quale potrebbe forse venir ulteriormente precisata.

Si potrebbe chiedere, da ultimo, se l'anello di omologia ed il gruppo del Poincarè – considerati assieme – possano determinare μ_0.

Questa domanda solleva una questione di interesse notevole, in vista anche dei legami che intercedono fra l'anello di omologia, il gruppo del Poincaré ed i gruppi di omotopia dell'Hurewicz. Sfortunatamente, però, la risoluzione di quel problema non sembra ancora matura: essa implicherebbe infatti, anche nel solo caso di $n = 3$, la risoluzione, affermativa o negativa, della ben nota congettura del Poincaré, sulla possibilità di caratterizzare la sfera a tre dimensioni mediante l'anello di omologia ed il gruppo del Poincaré.

Matematica (Geometria). — *Intorno agli* S_k *giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme* [*]. Nota [**] di Arno Predonzan, presentata dal Corrisp. B. Segre.

È nota una condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano spazi lineari S_k sulla forma generale di ordine n dell' S_r [1].

Nel presente lavoro ottengo analoga condizione nel caso più generale della varietà intersezione completa di più forme poggiando sul risultato già acquisito ed usufruendo ancora del principio del computo delle costanti; però, per quanto riguarda la sufficienza della condizione, il procedimento quì seguìto è di natura diversa da quelli usati dal Morin e dal Segre nel caso particolare precedentemente citato.

1. Nello spazio lineare $S_r(x_0, x_1, \cdots, x_r)$ si consideri la varietà $V_s^n\left(s = r - m \geq 0 \; ; \; n = \prod_{i=1}^{m} n_i\right)$ intersezione completa di m forme

$$f_i^{n_i}(x_0, x_1, \cdots, x_r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{1}$$

7) Analogo a quello adoperato nella Memoria citata in (1) per dimostrare il teorema 8 : 1.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Trieste, comunicato al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pisa, 23–27 settembre 1948).

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1948.

(1) Ved. U. Morin, *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica*. (« Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », 1936 : B. Segre, *Intorno agli* S_r *che appartengono alle forme generali di dato ordine*. (« Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », 1948).

dove n_i rappresenta l'ordine della corrispondente $f_i^{n_i}$ e senza restrizione può supporsi $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m$.

Mi propongo di dimostrare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica V_r^n *dell'*S_r *contenga qualche* S_k $(0 \leq k < s)$, *è che sia*

$$D = (r-k)(k+1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + k}{k} \geq 0 , \tag{2}$$

escluso soltanto se $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-1} = 1$, $n_m = 2$, $k \geq 2$, *nel qual caso la precedente limitazione deve essere sostituita dalla condizione più restrittiva*

$$r - 2k - m \geq 0 . \tag{3}$$

Qualora valga la (2) *o, nel caso particolare considerato, la* (3), D *uguaglia la dimensione del sistema degli* S_k *giacenti sulla generica* V_r^n.

2. Considerati i coefficienti nella $f_i^{n_i}$ del sistema (1) come coordinate omogenee di punto in uno spazio lineare $S^i_{R_i}$, con

$$R_i = \binom{n_i + r}{r} - 1 ,$$

si indichi con W la varietà di Segre, di dimensione $R_1 + R_2 + \cdots + R_m$, immagine dei gruppi di m punti appartenenti ciascuno ad un diverso $S^i_{R_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

Detta δ_i (≥ 0) la dimensione del sistema delle $f_i^{n_i}$ per la generica V_r^n, segue che a detto sistema corrisponde nell'$S^i_{R_i}$ uno spazio lineare $S^i_{\delta_i}$. La stessa V_r^n è quindi rappresentata dentro alla W dai punti di una W*, di dimensione $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m$, immagine dei gruppi di m punti tratti ciascuno da un diverso $S^i_{\delta_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

Le varietà W* riempiono tutta la W e per un punto generico di W ne passa una sola; esse dunque costituiscono un sistema algebrico irriducibile, di dimensione $N_1 + N_2 + \cdots + N_m$, dove, per abbreviare, si è posto

$$N_i = R_i - \delta_i = \binom{n_i + r}{r} - \delta_i - 1 .$$

Fra tale sistema algebrico e quello formato dalla totalità delle V_r^n dell'S_r intercede manifestamente una corrispondenza razionale d'indice finito $(= l_1! \, l_2! \cdots l_t!$, con $l_1 + l_2 + \cdots + l_t = m$, ove si supponga $n_1 = n_2 = \cdots = n_{l_1} < n_{l_1+1} = n_{l_1+2} = \cdots = n_{l_1+l_2} < n_{l_1+l_2+1} \cdots)$.

La dimensione del sistema razionale, e quindi irriducibile, degli S_k dell'S_r vale, com'è ben noto,

$$a = (r-k)(k+1) . \tag{4}$$

Inoltre la totalità delle V_r'' dell'S_r che contengono un dato S_k è un sistema algebrico irriducibile, di dimensione

$$(5) \qquad b = \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - \binom{n_i + k}{k} \right];$$

ciò si vede, per esempio, assumendo l'S_k come spazio fondamentale delle coordinate. Poichè i sistemi così determinati dai vari S_k dell'S_r sono trasformabili omograficamente l'uno nell'altro, ed hanno quindi tutti la stessa dimensione b, ne consegue che le V_r'' dell'S_r su cui giace quache S_k costituiscono un sistema algebrico irriducibile; questo avrà dimensione

$$(6) \qquad c = \sum_{i=1}^{m} N_i - \varepsilon \quad , \quad \text{con} \quad \varepsilon \geqq 0 ,$$

essendo contenuto nel sistema di tutte le V_r'' dell'S_r. Va rilevato che $\varepsilon = 0$ è condizione necessaria e sufficiente per la coincidenza dei due sistemi ultimi considerati.

Applichiamo ora il principio del computo delle costanti alla corrispondenza algebrica irriducibile che associa un S_k ad una V_r'' quando l'S_k appartiene alla V_r''; otteniamo così l'uguaglianza

$$(7) \qquad a + b = c + d ,$$

ove d $(\geqq 0)$ denota la dimensione del sistema degli S_k che appartengono alla generica V_r'' su cui giaccia qualche S_k.

Dalla (7), in virtù delle (4), (5), (6), si deduce

$$(8) \qquad d = (r - k)(k + 1) - \sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + k}{k} + \varepsilon .$$

Se la generica V_r'' dell'S_r contiene qualche S_k, risulta, per quanto sopra si è osservato, $\varepsilon = 0$; quindi dalla (8) discende la (2), il che prova la necessità di quest'ultima condizione.

3. Vogliamo ora dimostrare, seguendo un ragionamento per assurdo, che la (2) è pure condizione sufficiente, escluso soltanto il caso in cui sia $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-1} = 1$, $n_m = 2$, $k \geqq 2$.

Sia, a tale scopo, verificata la (2) e si supponga che la generica V_r'' dell'S_r non contenga degli S_k; il che porta di conseguenza $\varepsilon > 0$ e quindi $d > 0$.

Fissiamo un $\bar{S}_k$ dell'S_r e denotiamo con $\bar{V}_r''$ le V_r'' che lo contengono. Sappiamo che esse formano un sistema algebrico irriducibile (di dimensione b), talchè la $\bar{V}_r''$ generica di questo sistema sarà pure generica fra le V_r'' dell'S_r che contengono qualche S_k.

Il sistema algebrico ∞^d degli S_k situati sulla generica V_r'' potrebbe essere riducibile in parti di dimensione diversa. Indichiamo con Σ_d l'insieme delle sue componenti irriducibili di dimensione d, e con Σ il sistema algebrico descritto da Σ_d al variare della $\bar{V}_r''$ per $\bar{S}_k$. Sia infine $\Sigma_{d'}$ una componente irriducibile di dimensione massima di Σ, la quale quindi contiene (almeno)

una componente irriducibile $\bar{\Sigma}_{d'}$, ancora di dimensione d', di Σ_d. Il sistema $\Sigma_{d'}$ è contenuto nel sistema ∞^a formato da tutti gli S_k dell'S_r, ed ha pertanto la dimensione

$$a' = a - \varepsilon_1 \quad , \quad \text{con} \quad \varepsilon_1 \geqq 0 . \tag{9}$$

4. Supponiamo in primo luogo che il generico S_k di $\bar{\Sigma}_{d'}$ sia sghembo con l'$\bar{S}_k$.

Le $\bar{V}_s^n$ passanti per un generico S_k di $\Sigma_{d'}$ formano un sistema algebrico irriducibile, la cui dimensione vale

$$b' = \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - 2 \binom{n_i + k}{k} \right]; \tag{10}$$

ciò si vede, per esempio, assumendo S_k ed $\bar{S}_k$ come spazi fondamentali delle coordinate.

Applicando il principio del computo delle costanti alla corrispondenza algebrica che associa un S_k di $\Sigma_{d'}$ ad una $\bar{V}_s^n$ quando l'S_k appartiene alla $\bar{V}_s^n$, si ottiene l'uguaglianza

$$a' + b' = b + d . \tag{11}$$

Dalla (11), in virtù delle (4), (5), (8), (9), (10), si ottiene

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = 0 ,$$

il che è assurdo in base alle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 \geqq 0$.

5. Supponiamo in secondo luogo che il generico S_k di $\bar{\Sigma}_{d'}$ si appoggi all'$\bar{S}_k$ secondo un S_h $(0 \leq h < k)$.

Tenuto conto che le dimensioni a' e b' in questo caso divengono

$$a'' = (k - h)(r - k + h + 1) - \varepsilon_2 \quad , \quad \text{con} \quad \varepsilon_2 \geqq 0 , \tag{12}$$

$$b'' = \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - 2 \binom{n_i + k}{k} + \binom{n_i + h}{h} \right], \tag{13}$$

la (11) assume ora la forma.

$$a'' + b'' = b + d . \tag{14}$$

Dalla (14), in virtù delle (5), (8), (12), (13) e delle $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_2 \geqq 0$, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n_i + h}{h} > (h + 1)(r - 2k + h) . \tag{15}$$

Avuto riguardo alla (2) ci proponiamo di dimostrare che la (15) è assurda per ogni scelta degli n_i, k, escluso soltanto il caso $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-1} = 1$, $n_m = 2$, $k \geqq 2$.

6. In virtù delle (2), (15) abbiamo

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{n_i-1}\right]=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{m}\binom{n_i+k}{k}-\frac{1}{h+1}\sum_{i=1}^{m}\binom{n_i+h}{h}<$$

$$<(r-k)-(r-2k+h)=k-h,$$

o de

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{n_i-1}\right]<\nu(k-h), \tag{16}$$

dove ν sta per indicare il massimo degli n_i (talchè $n_i \leq \nu = n_m$).

La (16) è assurda per ogni scelta di h e k se $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-2} = 1$, $n_{m-1} = n_m = 2$ (e quindi $\nu = 2$), riducendosi allora a

$$2[(k+2)-(h+2)]<2(k-h).$$

Ne dimostreremo l'assurdità per tutti i valori degli n_i non minori dei suddetti, col seguente procedimento d'induzione. Supposto di saper già che la (16) non valga per dati n_i, k, h, mostreremo ch'essa è assurda quando si aumenti di un'unità uno n_j degli n_i e si lascino fissi gli altri n_i e k, h; ciò implica che il nuovo ν valga $\nu' = \nu$ oppure $\nu' = \nu + 1$. Sia dunque

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{n_i-1}\right]\geq\nu(k-h). \tag{17}$$

Si tratta di dimostrare che non può essere

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{n_i+k}{n_i-1}-\binom{n_i+h}{n_i-1}\right]-\left[\binom{n_j+k}{n_j-1}-\binom{n_j+h}{n_j-1}\binom{n_j+h}{n_j-1}\right]+$$

$$+\left[\binom{n_j+k+1}{n_j}-\binom{n_j+h+1}{n_j}\right]<\nu'(k-h),$$

ossia, tenuto conto della (17),

$$\binom{n_j+k}{n_j}-\binom{n_j+h}{n_j}<(\nu'-\nu)(k-h). \tag{18}$$

Infatti, se vale la (18), non può essere $\nu' = \nu$, ed è quindi $\nu' = \nu + 1$, il che implica che risulti $n_j \geq 2$. Ora è $h \leq k-1$, epperciò

$$\binom{n_j+k}{n_j}-\binom{n_j+h}{n_j}\geq\binom{n_j+k}{n_j}-\binom{n_j+k-1}{n_j}=\binom{n_j+k-1}{n_j-1}\geq k+1,$$

onde la (18) fornisce la limitazione assurda $k+1<k-h$.

Rimane in tal modo provata la sufficienza della (2) per ogni scelta degli n_i, k, eccettuato soltanto se $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-1} = 1$. In questo caso però V_r^n riducesi ad una forma (di ordine $n = n_m = \nu$) di un S_{r-m+1}, sicchè possono applicarsi i risultati dei lavori citati. Si conclude così nel modo enunciato al n. 1.

Geometria. — *Points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

Dans un Mémoire en cours d'impression dans les «Annales de l'Ecole Normale Supérieure» (1), nous avons exposé une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et celle des points de diramation de la surface image d'une telle involution. Nous nous proposons d'appliquer cette méthode à un cas particulier présentant un certain intérêt.

1. Rappelons tout d'abord brièvement en quoi consiste cette méthode.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons construire un système linéaire $|C|$, de dimension aussi grande qu'on le veut, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \cdots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p, le premier, $|C_0|$, étant dépourvu de points-base, les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant un nombre convenable de dimensions, il correspond à F une surface normale Φ image de l'involution.

Considérons un point uni non parfait A de l'involution, simple pour la surface F. Il existe, dans le domaine du premier ordre de ce point, deux points unis pour l'involution. Soient a_1, a_2 les tangentes à F en A passant par ces points.

Les courbes C_0, passant par A, acquièrent en ce point une multiplicité $\rho_1 < p$, les tangentes étant confondues avec a_1, a_2. Appelons $|C_0'|$ le système formé par ces courbes. Les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_2, forment un système $|C_0''|$ dont les courbes ont en A une multiplicité $\rho_2 \leq p$, les tangentes étant confondues avec a_1, a_2 si $\rho_2 < p$. Et ainsi de suite. On construit ainsi une suite de systèmes linéaires $|C_0'|, |C_0''|, \cdots, |C_0^{(\nu)}|$ dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes, les tangentes en ce point étant confondues avec a_1, a_2, sauf pour le dernier système, dont les courbes ont en A la multiplicité p et des tangentes variables.

Au point A est attaché un entier positif k $(1 < k < p)$ tel que si les courbes $C_0^{(i)}$ ont λ_i tangentes en A confondues avec a_2 et μ_i tangentes confondues avec a_1, on ait

$$\lambda_i + k\mu_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Un résumé de ce Mémoire a paru dans les «C. R.», juillet 1948.

Parmi les systèmes $|C_1|, |C_2|, \cdots, |C_{p-1}|$, il en est deux pour lesquels A est un point-base simple. Les courbes de l'un, $|C_1|$, de ces systèmes, touchent la droite a_2 en A et les courbes de l'autre, $|C_k|$, touchent la droite a_1 en ce point. Les courbes C_1, C_k rencontrent les courbes $C_0', C_0'', \cdots, C_0^{(\nu)}$ en p points confondus en A.

Sur chacune des courbes $C_0', C_0'', \cdots$, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches qu'il s'agit de déterminer. Ces branches ont en commun des suites de points fixes infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution I_p, se terminant chacune par un point uni parfait.

2. Nous allons considérer une involution d'ordre $p = 23$ et étudier le point uni A pour lequel on a $k = 13$.

Les nombres entiers positifs λ, μ tels que

$$\lambda + \mu < 23 \quad , \qquad \lambda + 13\,\mu \equiv 0, \qquad \text{(mod. 23)}$$

sont donnés par

$$\lambda = 1 + 3\,i \quad , \quad \mu = 7 - 2\,i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$
$$\lambda = 2 + 3\,i \quad , \quad \mu = 14 - 2\,i, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, 6).$$

On a $\nu = 12$ et les courbes $C_0^{(12)}$ ont en A un point multiple d'ordre 23 à tangentes variables.

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 8, 7 tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_2. Les courbes C_1 rencontrent les courbes C_0' en 15 points $B_1, B_2, \cdots, B_{15}$ infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur a_2. Ces points sont unis pour I_{23} et le dernier, B_{15}, est uni parfait pour cette involution.

Les courbes C_{13} rencontrent les courbes C_0' en un certain nombre de points $A_1, A_2, \cdots, A_\eta$ infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur a_1; ces points sont unis pour l'involution et le dernier est uni parfait.

Les courbes $C_0^{(11)}$ ont en A la multiplicité 22, 2 tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 20 avec a_2. Puisque les courbes C_1, C_{13} rencontrent les courbes $C_0^{(11)}$ en 23 points confondus en A, ces dernières courbes passent simplement par A_1, B_1, mais ne passent pas par A_2, B_2. Il en résulte que les courbes $C_0^{(11)}$ ont en commun un point simple [2] $A\,(1, 1)$ infiniment voisin de A_1 et une suite de 19 points simples $B\,(1, 1), B\,(1, 2), \cdots, B\,(1, 19)$ infiniment voisins successifs de B_1. Tous ces points sont unis pour l'involution et $A\,(1, 1), B\,(1, 19)$ sont unis parfaits.

Le nombre de points d'intersection des courbes $C_0', C_0^{(11)}$, absorbés en A, doit évidemment être multiple de 23. On en conclut que la somme des multiplicités des courbes C' en $A_1, A\,(1, 1)$ est égale à 7. On voit sans difficulté que les courbes C_0' passent 4 fois par A_1, 3 fois par $A\,(1, 1)$ et par suite une fois par les points $A_2, A_3, \cdots, A_{12}$ $(\eta = 12)$.

Soit A' le point de diramation de Φ homologue de A. Projetons la surface Φ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une

(2) Nous écrivons, pour simplifier, $A\,(\alpha, \beta, \gamma)$ au lieu de $A_{\alpha,\beta,\gamma}$.

surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ'_6 correspondent aux courbes C'_6. Aux points infiniment voisins des points A_{12}, $A_{(1,1)}$, B_{15} correspondent respectivement une droite α_1, une cubique gauche α_3 et une droite β_1. Le point A' est donc multiple d'ordre 5 pour la surface Φ_1, le cône tangent en ce point à cette surface étant obtenu en projetant α_1, α_3, β_1 de A'.

Si nous désignons par n le degré et par π le genre des sections hyperplanes Γ_6 de Φ_1, les courbes C sont de degré $23n$ et de genre $23\pi - 22$. Le systèmes $|\Gamma'_6|$ a le degré $n-5$ et le genre $\pi - 4$.

3. Les courbes C''_6 ont en A la multiplicité 9, 5 tangentes étant confondues avec a_1 et 4 avec a_2. A ces courbes correspondent sur Φ_1 les sections Γ''_6 faites par les hyperplans passant par un point A'_1.

Si le point A'_1 n'appartenait pas à la courbe α_3, les courbes C''_6 passeraient 3 fois par le point $A_{(1,1)}$ et au moins 3 fois par le point A_1. Mais cela est impossible, car les courbes C''_6 ayant en A cinq tangentes confondues avec a_1, la somme des multiplicités de ces courbes en A_1, $A_{(1,1)}$ ne peut excéder 5. On en conclut que A'_1 appartient à α_3 et que les courbes C''_6 passent 2 fois par $A_{(1,1)}$, 3 fois par A_1 et une fois par $A_2, A_3, \ldots, A_{12}$.

En utilisant les courbes $C_6^{(11)}$, on voit que les courbes C''_6 passent 4 fois par les points B_1, B_2, B_3, 2 fois par B_4 et 2 fois par un point $B_{(4,1)}$ infiniment voisin de B_4, uni parfait pour l'involution.

On en conclut que le point A'_1 appartient à la droite β_1 et est double conique pour la surface Φ_1. Si nous projetons cette surface de A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ''_6. Au domaine du point A'_1 correspond sur Φ_2 une conique β_2. A la courbe α_3 correspond une conique rencontrant β_2 en un point. A la droite β_1 correspond un point (multiple pour Φ_2) de β_2. A la droite α_1 correspond une droite.

Le système $|\Gamma''_6|$ a le degré $n-7$ et le genre $\pi - 5$.

4. Les courbes C'''_6 ont en A la multiplicité 10, 3 tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 7 avec a_2. A ces courbes correspondent sur Φ_2 les sections L'''_6 de cette surface par les hyperplans passant par un point A'_2.

En raisonnant comme plus haut, on voit que A'_2 est le point de rencontre des coniques α_1, β_2. Les courbes C'''_6 passent deux fois par A_1, une fois par $A_{(1,1)}$ et une fois par $A_2, A_3, \ldots, A_{12}$, 7 fois par B_1, 3 fois par B_2, 2 fois par B_3, une fois par B_4 et par $B_{(4,1)}$. Elles ont en outre en commun quatre points simples $B_{(2,1)}$, $B_{(2,2)}$, $B_{(2,3)}$, $B_{(2,4)}$ infiniment voisins successifs de B_2, le dernier étant uni parfait pour l'involution.

Le système $|\Gamma'_6|$ a le degré $n-8$ et le genre $\pi - 5$, donc le point A'_2 est simple pour la surface Φ_2.

5. Les courbes $C_6^{(4)}$ ont en A la multiplicité 11, une tangente en ce point étant confondue avec a_1 et les 10 autres avec a_2. Ces courbes passent simplement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. On établit ensuite qu'elles passent

7 fois par B_1, 2 fois par B_2, B_3, une fois par B_4 et $B(4,1)$. En outre, elles passent 3 fois par $B(1,1)$, 2 fois par un point $B(1,1,1,1)$ infiniment voisin de $B(1,1)$, une fois par un point $B(1,1,1,1)$ infiniment voisin de $B(1,1,1)$ et enfin une fois par un point $B(1,1,1,1,1)$ infiniment voisin de $B(1,1,1,1)$, uni parfait pour l'involution.

Aux courbes $C_0^{(4)}$ correspondent sur Φ_2 des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ découpées par les hyperplans touchant la conique α_3 en A'_2. Le système $|\Gamma_0^{(4)}|$ a le degré $n-9$ et le genre $\pi-5$.

6. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité 16 en A, 14 tangentes étant confondues avec a_1 et 2 avec a_2. Elles passent 7 fois par les points A_1 et $A(1,1)$, deux fois par les points B_1, B_2, B_3 et une fois par les points B_4 et $B(4,1)$.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ qui correspondent sur Φ_2 aux courbes $C_0^{(5)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ particulières. Elles sont découpées sur cette surface par des hyperplans tangents à la conique α_3 au point A'_2. Comme elles doivent rencontrer cette conique en 7 points, elles la contiennent nécessairement. Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ ne rencontrent plus la droite α_1, donc celle-ci s'appuie sur la conique α_3.

Le système $|\Gamma_0^{(5)}|$ a le degré $n-16$ et le genre $\pi-11$.

Il est inutile de considérer les courbes $C_0^{(6)}, \cdots$, car les courbes $\Gamma_0^{(11)}$, qui correspondent sur Φ_2 aux courbes $C_0^{(11)}$, forment un système linéaire de degré $n-22$ et de genre $\pi-11$. On obtient donc les courbes $\Gamma_0^{(6)}, \Gamma_0^{(7)}, \cdots$ en considérant les sections de Φ_2 par des hyperplans passant par la conique α_3 et par des points simples de la surface.

Aux courbes $C_0^{(12)}$, qui ont un point multiple d'ordre 23 à tangentes variables en A, correspondent sur Φ_2 des courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant également le genre $\pi-11$, et le degré $n-23$.

7. La singularité de la surface Φ au point A' est équivalente à l'ensemble des courbes rationnelles $\alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_1$. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_1,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \alpha_1 + \alpha_3 + 2\beta_2 + \beta_1.$$

On en déduit que les courbes rationnelles $\alpha_1, \alpha_3, \beta_2, \beta_1$ ont respectivement les degrés virtuels $-2, -5, -2, -2$.

On a en outre

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\beta_2 + \beta_1$$

et on vérifie que les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ rencontrent bien la courbe α_3 en 7 points.

Geometria. — *Sopra alcune singolarità di ipersuperficie algebriche* (*). Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

Una Nota di V. Dalla Volta (1) mi ha dato lo spunto per trovare alcune semplici proprietà delle ipersuperficie algebriche di ordine n con un punto $(n-2)$-*plo* il cui cono tangente è tale che la sua generica generatrice ha in esso un incontro n-punto con la ipersuperficie data.

A base di tutti i risultati ottenuti nella presente Nota, sta la semplice considerazione che *se una* V^n_{r-1} *di* S_r *possiede un punto* O $(n-2)$-*plo e ciascuna delle tangenti in esso alla ipersuperficie ha ivi incontro n-punto, esiste una omologia armonica di centro* O *che muta la* V^n_{r-1} *in sè.*

Viceversa *se esiste una omologia armonica che muta in sè una* V^n_{r-1} *avente il centro in un punto* O $(n-2)$-*plo della* V^n_{r-1}, *allora ciascuna delle tangenti in* O *alla* V^n_{r-1} *ha ivi incontro n-punto.*

Incidentalmente trovo poi alcune proprietà dei punti doppi della V^n_{r-1} in esame e queste proprietà messe a confronto con quelle dei punti doppi di una V^n_{r-1} con un punto $(n-2)$-*plo* ordinario, proprietà che si trovano in due mie recenti Note (2), mostrano come diversamente si comportano le V^n_{r-1} esaminate in questa Nota.

Infine applico i risultati ottenuti alle V^4_{r-1} con un punto doppio a tangenti quadripunte e per queste ipersuperficie trovo i teoremi:

Il massimo numero di punti doppi isolati a tangenti quadripunte di una V^4_{r-1} *è* $\delta = r+1$.

Se una V^4_{r-1} *possiede* $r+1$ *punti doppi ed* r *sono a tangenti quadripunte anche lo* $(r+1)^{esimo}$ *gode della stessa proprietà.*

1. È noto (3) che la polare di ordine $n-1$ di un punto $(n-2)$-*plo* di una V^n_{r-1} di S_r rispetto alla V^n_{r-1} è il luogo del coniugato armonico del punto rispetto ai due punti d'intersezione della V^n_{r-1} con una retta variabile intorno al punto stesso.

In particolare se la generatrice generica del cono tangente nel punto $(n-2)$-*plo* ha con la V^n_{r-1} un incontro n-punto, la varietà polare di tale punto rispetto alla V^n_{r-1} risulta spezzata nel detto cono tangente ed in un

(*) Il contenuto della presente Nota è stato comunicato al III° Congresso dell'Unione Mat. Ital. (Pisa 23-26 settembre 1948).

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Cfr. V. DALLA VOLTA, *Su alcuni tipi di quartiche piane.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. III, fasc. 3-4 (1947).

(2) Cfr. *Le ipersuperficie di ordine n con un punto* $(n-2)$, *plo.* Note I e II « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. III, fasc. 3-4 (1947).

(3) Cfr. ad esempio E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli iperspazi* (Principato, Messina, p. 201 e sgg. (1923).

iperpiano, necessariamente non passante per il punto considerato. È noto altresì che tale iperpiano si chiama *iperpiano armonico* del punto $(n-2)$–*plo* considerato.

Sia $F(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{r-1}, z, t)$ l'equazione di una V^n_{r-1} e sia $O(0, 0, \cdots, 1)$ un suo punto $(n-2)$–*plo* tale che la generica tangente alla V^n_{r-1} in esso abbia ivi contatto n–punto. Assumendo come iperpiano improprio dello S_r l'iperpiano armonico di O rispetto alla V^n_{r-1}, la $F = 0$ è della forma:

$$(1.1) \qquad t^2 \varphi_{n-2}(x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}, z) + \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}, z) = 0 .$$

Per la proprietà espressa in principio, i due punti di intersezione di una retta variabile per O con la V^n_{r-1} risultano allora simmetrici rispetto ad O.

L'omologia armonica di centro O ed avente per iperpiano di punti uniti l'iperpiano armonico di O rispetto alla V^n_{r-1}, ha equazioni: $x'_i = -x_i$, $z' = -z$, $t' = t$ ed essa manifestamente muta la V^n_{r-1} di equazione (1.1) in sè.

Viceversa sia V^n_{r-1} una ipersuperficie con un punto O $(n-2)$–*plo* e supponiamo che esista una omologia armonica T di centro O che la muti in sè. Una generica generatrice del cono tangente alla V^n_{r-1} in O, Γ_0, incontra la V^n_{r-1} fuori di O in un punto P. Poichè una tale generatrice è una retta unita della T, al punto P deve corrispondere, per la T, un altro punto P′ della stessa generatrice, ma allora tale generatrice apparterrebbe alla V^n_{r-1}.

Se la generatrice generica del cono Γ_0 non appartiene quindi alla V^n_{r-1}, essa deve avere in O con la V^n_{r-1} incontro n–punto.

Restano così provati i primi due teoremi enunciati nella introduzione.

2. Indichiamo d'ora in poi con W una V^n_{r-1} con un punto O $(n-2)$–*plo*, tale che la generica tangente alla V^n_{r-1} in esso abbia incontro n–punto.

Osserviamo subito *che le rette di* W *uscenti da* O *formano un cono* V_{r-2} *in generale di ordine* $n(n-2)$, mentre in una V^n_{r-1} con un punto $(n-2)$–*plo* ordinario le rette di V^n_{r-1} uscenti da tale punto formano in generale un cono V_{r-3} di ordine $n(n-1)(n-2)$ (4).

Detto ω l'iperpiano armonico di O rispetto a W, si ha che *gli eventuali punti doppi della* W *stanno sulla* V^n_{r-2} *sezione di* W *con* ω.

Per l'esistenza della omologia armonica T di centro O ed iperpiano di punti uniti ω, si hanno per la W le seguenti proprietà:

I. *Ad ogni sezione piana di* W *ne corrisponde un'altra ad essa prospettiva rispetto al centro* O. Cioè data una sezione piana di W le rette che la proiettano da O segano ulteriormente la W ciascuna in un punto il cui luogo è una sezione piana.

II. *Se la* W *possiede un punto doppio* P, *ed una tangente in esso, diciamola r, ha con la* W *un incontro quadripunto, allora esiste un'altra tangente alla* W

(4) Cfr. loc. cit. in (2).

in P *pure a incontro quadripunto e giacente nel piano* π *di* O *e di r. Tali due tangenti, la* OP *e la retta* $\omega \cdot \pi$ *formano un gruppo armonico.*

III. *Se* W *possiede un punto doppio* P, *i punti di contatto degli iperpiani da P tangenti altrove alla* W, *risultano a coppie allineati con* O.

IV. *Se* W *possiede una calotta* σ_1 *a* $r-1$ *dimensioni inflessionale non giacente in* ω, *allora sulla* W *ne esiste un'altra ed i centri di tali due calotte risultano allineati con* O

3. Supponiamo che W abbia oltre ad O un punto doppio $P \neq O$. Due casi sono possibili, o la retta OP non appartiene a W o vi appartiene.

Nel primo caso, il cono Γ_P tangente a W in P, può naturalmente essere di specie qualunque, ma in ogni caso se è di specie $s+1$ lo S_s vertice giace necessariamente nell'iperpiano ω. Infatti poichè lo S_s vertice di Γ_P non passa per O (la retta OP non appartiene a W) se questo non appartenesse all'iperpiano ω, dovrebbe per la T esistere un altro S_s doppio del cono Γ_P, ma allora Γ_P non sarebbe di specie $s+1$. Lo S_s deve essere allora unito nella T e pertanto non potendo passare per O deve appartenere ad ω. In particolare:

V. *Se* P *è un punto doppio di* W *col cono tangente di specie* $r-1$, *cioè spezzato in due iperpiani, e se la retta* OP *non appartiene a* W, *i due iperpiani tangenti in* O, *l'iperpiano* ω *e l'iperpiano per* O *e per lo* S_{r-2} *comune ai due iperpiani tangenti in* P, *formano un gruppo armonico.*

Ed ancora:

VI. *Se* W *possiede un punto doppio* P *uniperplanare e la retta* OP *non appartiene ad essa, l'iperpiano tangente (unico) in* P *è proprio l'iperpiano* ω *ed esso sega quindi la* W *nella* V^n_{r-2} *luogo dei punti di contatto degli iperpiani tangenti che da* O *si possono condurre altrove alla* W.

Se invece, essendo P un punto doppio di W distinto da O, la retta OP appartiene a W, il cono Γ_P, come si vede facilmente, qualunque sia la sua specie deve avere lo S_s vertice passante per O[5] a differenza di quanto avviene se il punto O è $(n-2)$-*plo* ordinario[6].

(5) È facile la verifica analitica degli ultimi risultati. Sia infatti la (1. 1) l'equazione della W. Posto:

$$\varphi_{n-2} \equiv x^{n-2}\theta_0 + x^{n-3}\theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} \quad , \quad \varphi_n \equiv x^n\chi_0 + x^{n-1}\chi_1 + \cdots + \chi_n$$

con θ_i, χ_i forme di grado i nelle sole $x_1, \cdots, x_{r-1}$ il punto P sia di coordinate $(0, 0, \cdots, 1, 0)$. L'ipotesi che P sia doppio porta che l'equazione di W si scrive:

$$t^2\{x^{n-2}\theta_0 + x^{n-3}\theta_1 + \cdots + \theta_{n-2}\} + x^{n-2}\chi_2 + \cdots + \chi_n = 0 .$$

Notiamo che se e solo se $\theta_0 = 0$ la retta OP sta su W.

Se ciò non avviene, fatto $\theta_0 = 1$, il cono Γ_P tangente in P a W è: $t^2 + \chi_2 = 0$ dalla quale si vede che qualunque sia la specie, non potendo mai essere $t \equiv 0$, lo S vertice appartiene all'iperpiano $t = 0$. In particolare se Γ_P è di specie r deve essere $\chi_2 = 0$ ed in questo caso l'iperpiano tangente (unico in P) coincide con ω.

Supponiamo ora che sia $\theta_0 = 0$ con che la retta OP appartiene a W. La W nell'intorno di P si scrive:

$$\chi_2 + (t^2\theta_1 + \chi_3) + \cdots = 0 .$$

Il cono Γ_P è $\chi_2 = 0$ e qualunque sia la sua specie, lo spazio vertice passa per O.

(6) Cfr. loc. cit. in (2).

Sempre nel caso che P sia un punto doppio di W e la retta OP appartenga a W, ogni piano per la OP dello S_{r-1} tangente in un punto generico Q della OP, sega la W nella retta OP ed in una C^{n-1} con un punto $(n-3)$-*plo* in O, passante per P e per Q. Ma per la T essa deve passare anche per il coniugato Q' di Q e quindi la C si spezza ancora nella OP ed in una C^{n-2}. Avvenendo ciò per tutti i piani dello S_{r-1} tangente in Q, si conclude che tale S_{r-1} è tangente in tutti i punti della OP. Si ha così:

Se su una retta r di W *uscente da* O *esiste un punto doppio di* W, *l'iperpiano tangente nei punti di r è fisso.*

Anche qui si noti che mentre per una V^n_{r-1} con un punto O $(n-2)$-*plo* ordinario occorrono due punti doppi su una retta uscente da O, perchè l'iperpiano tangente in un punto della retta sia fisso al variare del punto [7] nel nostro caso ne basta uno.

Infine osserviamo ancora che sempre per la T:

L'iperpiano tangente in un punto di una retta di W *uscente da* O, *risulta tangente in un altro punto della stessa retta.*

4. Consideriamo in particolare la V^4_{r-1} con un punto doppio O, tale che la generica tangente in esso alla V^4_{r-1} abbia incontro quadripunto.

Per questo tipo di ipersuperficie, oltre a tutte le proprietà elencate nei numeri precedenti, vale il seguente teorema.

Una V^4_{r-1} *può avere al massimo* $\delta = r+1$ *punti doppi a tangenti quadripunte.*

Infatti detto δ il massimo numero di punti doppi a tangenti quadripunte di una V^4_{r-1}, l'iperpiano armonico di ognuno di essi passa per i rimanenti $\delta - 1$. Se si considerano due di tali iperpiani armonici, nel loro S_{r-2} di intersezione vi saranno $\delta - 2$ dei punti voluti e così nello S_{r-3} comune a tre S_{r-1} armonici ve ne saranno $\delta - 3$ e così via nello S_0 cioè nel punto comune ad r S_{r-1} ve ne saranno $\delta - r$. Si ha quindi: $\delta - r = 1$ da cui $\delta = r + 1$.

Notiamo che la dimostrazione di questo teorema ci porta anche a concludere che una V^4_{r-1} con $\delta + 1$ punti doppi a tangenti quadripunte non può avere altre singolarità.

Inoltre è subito dimostrata l'esistenza di V^4_{r-1} con $\delta + 1$ punti doppi a tangenti quadripunte. L'equazione di una tale V^4_{r-1} può sempre ridursi alla forma:

$$\sum a_{ik} x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots r+1 \; ; \; i \neq k).$$

Dimostriamo infine il teorema:

Se una V^4_{r-1} *possiede* $r+1$ *punti doppi di cui r a tangenti quadripunte anche lo* $(r+1)^{esimo}$ *è a tangenti quadripunte.*

Infatti detti $A_1, A_2, \cdots, A_{r+1}$ gli $r+1$ punti doppi, siano $A_1, \cdots, A_r$ a tangenti quadripunte. Ognuno di questi r punti determina una omologia

(7) Cfr. loc. cit. in (2).

armonica che muta la V^4_{r-1} in sè. Ora, come si verifica facilmente, il prodotto di queste r omologie è ancora una omologia armonica che muta la V^4_{r-1} in sè ed avente il centro in A_{r+1}. Ma se ciò accade, come si è dimostrato al n. 1, A_{r+1} è tale che la generica tangente in esso alla V^4_{r-1} ha ivi incontro quadripunto, come volevasi dimostrare.

Per $n=4$, $r=2$ si ritrovano i risultati contenuti nella Nota di V. Dalla Volta [8].

Geometria dei numeri. — *Sui determinanti minimi delle sezioni di un corpo convesso.* Nota di KURT MAHLER, presentata [*] dal Corrisp. B. SEGRE.

Siano x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio euclideo ordinario, nel quale consideriamo un corpo convesso finito, K, simmetrico rispetto all'asse x_3. L'intersezione K_ζ di K col piano

$$\pi_\zeta : \quad x_3 = \zeta$$

è pertanto un dominio convesso, simmetrico rispetto al punto $O_\zeta (0, 0, \zeta)$ dove π_ζ incontra l'asse x_3. Nell'ipotesi che K_ζ non sia vuoto per

$$\zeta_1 < \zeta < \zeta_2 ,$$

l'area $V(K_\zeta)$ di K_ζ soddisfa alla disuguaglianza

$$V(K_\zeta)^{1/2} \geqq (1-t)\, V(K_{\zeta_1})^{1/2} + t\, V(K_{\zeta_2})^{1/2} \qquad \text{per} \quad \zeta = (1-t)\zeta_1 + t\zeta_2 , \; 0 \leq t \leq 1 ,$$

in virtù di un teorema dimostrato da H. Brunn nella sua tesi [1]. In questa Nota deduco da questo teorema analogo risultato relativo al determinante minimo $\Delta(K_\zeta)$ di K_ζ.

Onde rammentare il significato di $\Delta(K_\zeta)$, denotiamo con Λ_ζ un qualunque reticolato a due dimensioni che contenga O_ζ ed appartenga a π_ζ, e con $d(\Lambda_\zeta)$ il determinante di questo reticolato (ossia il doppio del minimo dell'area dei triangoli coi vertici in tre punti non allineati di Λ_ζ). Dicendo che Λ_ζ è K_ζ–ammissibile quando O_ζ risulti il solo punto di Λ_ζ interno a K_ζ, il determinante minimo $\Delta(K_\zeta)$ è, per definizione, l'estremo inferiore di $d(\Lambda_\zeta)$ esteso ai vari reticolati K_ζ–ammissibili di π_ζ. Ciò premesso, possiamo enunciare il

TEOREMA. – *Il determinante minimo* $\Delta(K_\zeta)$ *della sezione* K_ζ *di* K *soddisfa alla disuguaglianza*

$$\Delta(K_\zeta)^{1/2} \geqq (1-t)\, \Delta(K_{\zeta_1})^{1/2} + t\, \Delta(K_{\zeta_2})^{1/2} \tag{1}$$

$$\textit{per} \quad \zeta = (1-t)\zeta_1 + t\zeta_2 \; , \; 0 \leq t \leq 1 .$$

(8) Cfr. loc. cit. in (1).

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) *Ovale und Eiflächen*, Munich 1887.

DIMOSTRAZIONE. Sia H_ζ un esagono di π_ζ circoscritto a K_ζ, simmetrico rispetto ad O_ζ, avente area minima, $V(H_\zeta)$, e denotiamo con

$$L_\zeta^{(1)}, L_\zeta^{(2)}, \cdots, L_\zeta^{(6)}$$

le rette che ne contengono ordinatamente i lati. Allora

$$L_\zeta^{(1)} \text{ ed } L_\zeta^{(4)}, \quad L_\zeta^{(2)} \text{ ed } L_\zeta^{(5)}, \quad L_\zeta^{(3)} \text{ ed } L_\zeta^{(6)}$$

saranno coppie di rette simmetriche rispetto ad O_ζ, e ciascuna di quelle sei rette sarà retta d'appoggio di K_ζ. Ne discende che vi sono sei piani d'appoggio di K:

$$M_\zeta^{(1)}, M_\zeta^{(2)}, \cdots, M_\zeta^{(6)},$$

tali che $M_\zeta^{(j)}$ contenga $L_\zeta^{(j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, 6)$, e che

$$M_\zeta^{(1)} \text{ ed } M_\zeta^{(4)}, \quad M_\zeta^{(2)} \text{ ed } M_\zeta^{(5)}, \quad M_\zeta^{(3)} \text{ ed } M_\zeta^{(6)}$$

siano coppie di piani simmetrici rispetto all'asse x_3 (e quindi incontranti quest'asse nello stesso punto, proprio od improprio).

I sei piani $M_\zeta^{(j)}$ determinano sui piani $x_3 = \zeta_1$ ed $x_3 = \zeta_2$ due esagoni, H_{ζ_1}, H_{ζ_2}, i quali rispettivamente risultano simmetrici rispetto ad O_{ζ_1}, O_{ζ_2} e contengono K_{ζ_1}, K_{ζ_2}. Denotiamo con K* il solido limitato dai sei piani $M_\zeta^{(j)}$ e dai piani $x_3 = \zeta_1$, $x_3 = \zeta_2$. Esso è manifestamente un corpo convesso, simmetrico rispetto all'asse x_3. Applicando il teorema di Brunn alle sue tre sezioni $H_\zeta, H_{\zeta_1}, H_{\zeta_2}$, si ottiene che

$$V(H_\zeta)^{1/2} \geq (1-t)\, V(H_{\zeta_1})^{1/2} + t\, V(H_{\zeta_2})^{1/2}. \tag{2}$$

Ora un teorema di K. Reinhardt [2] e mio [3] afferma che

$$\Delta(K_\zeta) = \frac{1}{4} \min V(H),$$

ove il minimo va esteso a tutti gli esagoni H di π_ζ simmetrici rispetto ad O_ζ e contenenti K_ζ. Dunque

$$\Delta(K_\zeta) = \frac{1}{4} V(H_\zeta), \tag{3}$$

ed inoltre

$$\Delta(K_{\zeta_1}) \leq \frac{1}{4} V(H_{\zeta_1}), \quad \Delta(K_{\zeta_2}) \leq \frac{1}{4} V(H_{\zeta_2}). \tag{4}$$

In virtù delle (3), (4), la (1) segue subito dalla (2).

Sarebbe interessante vedere in quali casi nella (1) vale il segno di uguaglianza, ed estendere il teorema qui dimostrato ai corpi di dimensione $n > 3$.

(2) « Abh. Math. Sem. Hamburg », *10*, 216-230 (1934).
(3) « Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam », *50*, 692-703 (1947).

Astrofisica. — *Applicazione del procedimento indicato dal prof. Silva allo studio della flessione dell'astrospettrografo IV di Potsdam.* Nota di GIUSEPPE MANNINO, presentata (*) dal Socio G. SILVA.

Per una applicazione del metodo esposto dal prof. G. Silva (1) sulla flessione in un astrospettrografo, è stato scelto lo spettrografo IV dell'Osservatorio di Potsdam, approfittando del fatto che di questo è noto uno studio (2) nel quale sono riportati i valori $\Delta s = s - s_0$, per le declinazioni 0^0, $+20^0$, $+50^0$, $+80^0$, $+90^0$, essendo s ed s_0 gli spostamenti delle righe, dovuti a flessione, in corrispondenza dell'angolo orario H e dell'angolo orario zero (telescopio in meridiano).

Poichè le osservazioni sono state fatte sempre con lo spettrografo nella posizione normale di osservazione e con il telescopio in posizione I (asse precede), sarà, trascurando i termini del terzo ordine e superiori:

$$\begin{aligned} s = &- k_x \cos\varphi \operatorname{sen} H - k_y (\operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos H) + \\ &+ k_z (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H) + k_{xx} \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2 H + \\ &+ k_{yy} (\operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos H)^2 + \\ &+ k_{zz} (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H)^2 + \\ &+ k_{xy} \cos\varphi \operatorname{sen} H (\operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos H) - \\ &- k_{xz} \cos\varphi \operatorname{sen} H (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H) - \\ &- k_{yz} (\operatorname{sen}\varphi \cos\delta - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos H) (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 = &- k_y \operatorname{sen}(\varphi - \delta) + k_z \cos(\delta - \varphi) + k_{yy} \operatorname{sen}^2(\varphi - \delta) + \\ &+ k_{zz} \cos^2(\delta - \varphi) - k_{yz} \operatorname{sen}(\varphi - \delta) \cos(\delta - \varphi). \end{aligned}$$

e perciò, a declinazione costante, si dovrà avere:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \Delta s = s - s_0 = &a_1 (1 - \cos H) + a_2 \operatorname{sen} H + \\ &+ a_3 (1 - \cos 2H) + a_4 \operatorname{sen} 2H \end{aligned}$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) G. SILVA, *Sulla flessione di un astrospettrografo.* « La ricerca scientifica », in corso di pubblicazione.

(2) G. EBERHARD, *Ueber die Biegung von Astrospektrographen.* « Zeitschrift für Instrumentenkunde », 1910, S. 29.

avendo posto:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} a_1 = -\cos\varphi\,(k_y \operatorname{sen}\delta + k_z\cos\delta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\delta\,(k_{yy} - k_{zz}) + \\ \qquad + \frac{1}{2} k_{yz} \operatorname{sen} 2\varphi\,(1 - 2\operatorname{sen}^2\delta) \\ a_2 = -k_x\cos\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi\,(k_{xy}\cos\delta - k_{xz}\operatorname{sen}\delta) \\ a_3 = \frac{1}{2} k_{xx}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(k_{yy}\operatorname{sen}^2\delta + k_{zz}\cos^2\delta + \frac{1}{2} k_{yz}\operatorname{sen} 2\delta) \\ a_4 = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(k_{xz}\cos\delta - k_{xy}\operatorname{sen}\delta) \end{cases}$$

La risoluzione, col metodo dei minimi quadrati, dei quattro sistemi di equazioni di condizione del tipo (I), relativi alle declinazioni 0°, $+20^\circ$, $+50^\circ$, $+80^\circ$, (il calcolo separato per $d = +90^\circ$ portava ad un sistema normale pressochè indeterminato) condusse a valori a_1, a_2, a_3, a_4, ove le a_4 risultavano affette da un forte errore medio relativo. Il calcolo ripetuto con le sole a_1, a_2, a_3, lasciò praticamente inalterati gli errori medi unitari delle equazioni di condizione dei quattro sistemi, per cui si ritenne opportuno porre $a_4 = 0$. I valori di a_1, a_2, a_3 dati da questo ultimo calcolo e i relativi errori medi, sono:

	a_1	a_2	a_3
$\delta = 0^\circ$	-0.0013 ± 0.0003	-0.0002 ± 0.0006	$+0.0012 \pm 0.0004$
$\delta = +20^\circ$	-0.0066 ± 0.0003	-0.0031 ± 0.0007	$+0.0020 \pm 0.0005$
$\delta = +50^\circ$	-0.0116 ± 0.0004	-0.0045 ± 0.0007	$+0.0029 \pm 0.0005$
$\delta = +80^\circ$	-0.0125 ± 0.0003	-0.0039 ± 0.0009	$+0.0022 \pm 0.0007$

La soppressione di a_4, per valori variabili di δ, equivale, per la quarta delle (II), ad assumere $k_{xy} = k_{xz} = 0$. Notando che i quattro valori ottenuti per a_3 sono pressochè eguali, si è ritenuto a_3 indipendente dalla declinazione, il che, per la terza delle (II), corrisponde a porre $k_{yy} = k_{zz} = k_{yz} = 0$. Le (II) assumono allora la forma:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} a_1 = -\cos\varphi\,(k_y \operatorname{sen}\delta + k_z\cos\delta) \\ a_2 = -\cos\varphi\, k_x \\ a_3 = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\, k_{xx} \end{cases}$$

Per utilizzare anche le osservazioni fatte alla declinazione $+90^\circ$, fu fatta la media pesata dei valori a_3, precedentemente trovati, che fu introdotta nelle corrispondenti equazioni. È stato così possibile determinare le incognite a_1 ed a_2 relative alla declinazione $+90^\circ$, che risultarono:

$$a_1 = -0.0152 \pm 0.0010 \quad ; \quad a_2 = -0.0017 \pm 0.0010 .$$

TABELLA I.

δ^o	H^h	v mm. 0.0001	δ^o	H^h	v mm. 0.0001
0	— 12	+ 10	50	— 6	+ 5
	11	— 3		5	+ 2
	10	— 5		4	+ 3
	8	— 18		3	— 2
	6	— 26		2	— 2
	4	— 16		— 1	— 10
	— 2	+ 8		+ 1	+ 2
	+ 2	— 6		2	+ 10
	4	+ 10		4	+ 7
	6	— 8		6	+ 10
	8	+ 16		8	+ 4
	10	+ 3		10	— 10
	11	+ 7		12	+ 2
	12	+ 9		13	+ 4
0	+ 13	+ 1	50	+ 14	— 5
20	— 12	+ 10	80	— 12	+ 13
	11	+ 2		9	+ 31
	10	+ 9		6	+ 1
	9	+ 9		3	+ 4
	6	— 9		— 2	— 1
	4	— 7		+ 3	+ 11
	— 2	+ 3		6	— 4
	+ 2	+ 3		9	+ 1
	4	+ 1		10	—
	6	— 5		11	+ 4
	9	— 16		12	+ 15
	10	— 18	80	+ 14	+ 14
	11	— 11			
	12	— 2	90	+ 3	+
	13	— 10		6	— 6
20	+ 14	— 14		9	— 15
				10	— 13
50	— 12	— 12		11	— 10
	10	— 2		12	—
	9	+ 21	90	14	— 20
50	— 8	+ 23			

Tenendo conto di tutti i valori disponibili delle a_1 , a_2 , a_3 le equazioni di condizione (III) ci forniscono per le costanti non ritenute nulle i seguenti valori:

$$k_x = +0.0020 \; ; \; k_y = +0.0105 \; ; \; k_z = +0.0015 \; ; \; k_{xx} = +0.0054$$

e questi introdotti nelle equazioni di condizione (I), relative a tutte le cinque declinazioni, conducono a residui l ed a un errore medio ε_l tali che

$$[ll] = +0.000338 \quad , \quad [l] = -0.0114 \quad , \quad \varepsilon_l = \pm 0.0023.$$

Per trovare, infine, i valori più plausibili delle k, si sono indicati con Δk le correzioni incognite da apportare ai valori k prima trovati, e si sono scritte le equazioni di condizione derivanti dalle (I), ove si ponga l in luogo di Δs e Δk in luogo di k. La loro risoluzione dà:

$$\Delta k_x = +0.0002 \pm 0.0003 \quad , \quad \Delta k_y = +0.0006 \pm 0.0004 ,$$
$$\Delta k_z = \; 0.0000 \pm 0.0002 \quad , \quad \Delta k_{xx} = +0.0010 \pm 0.0008 ,$$

per cui in definitiva si ottiene

$$k_x = +0.0022 \pm 0.0003 \quad , \quad k_y = +0.0111 \pm 0.0004 ,$$
$$k_z = +0.0015 \pm 0.0002 \quad , \quad k_{xx} = +0.0064 \pm 0.0008 ,$$

che lasciano nelle equazioni del tipo (I) i residui v riportati nella allegata tabella; essi danno

$$[vv] = +0.000311 \quad , \quad [v] = -0.0006 \quad , \quad \varepsilon_v = \pm 0.0022$$

ove, più che la leggera diminuzione di ε, ha interesse notare che l'introduzione delle correzioni Δk porta ad una somma degli scarti praticamente nulla, il che si accorda con un'assenza di andamento che richieda l'introduzione di altre costanti.

Lo spostamento s delle righe, dovuto alla flessione, per lo spettrografo IV dell'Osservatorio di Potsdam risulta con ciò espresso, in millimetri, dalla formula

$$\Delta s = +0.0022 \cos(gx) + 0.0111 \cos(gy) + 0.0015 \cos(gz) + 0.0064 \cos^2(gx) .$$

Scienza della Alimentazione. — *Sugli autolizzati proteici.* – II. *Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici o di peptoni in cani adulti.* Nota(*) di CESARE LOMBROSO e CESARE ARDY, presentata dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Nella precedente Nota è stato riferito sugli effetti che un autolizzato enzimatico di caseina (Amigen) provoca sul metabolismo gassoso di cani in via di accrescimento, effetti che sono così profondamente differenti a seconda che tale materiale venga somministrato per via orale o per via parenterale (1).

Corrispondenti ricerche abbiamo creduto bene si dovessero estendere anche all'animale adulto, onde poter controllare se i risultati osservati nel cane cucciolo, fossero da addebitarsi allo stato particolare in cui si trova per l'appunto un organismo in accrescimento, ovvero se il fenomeno fosse comune anche all'organismo adulto.

Si è così proceduto allo studio del ricambio gassoso di cani adulti ai quali si somministrava l'autolizzato di caseina o per bocca, o per via parenterale. Qualche esperienza veniva pure condotta con l'uso della proteina genuina, la caseina; naturalmente in questo caso soltanto per-os. Una serie infine di ricerche veniva condotta per via orale e parenterale, facendo uso, invece che della proteina genuina o del suo autolizzato enzimatico, di un materiale intermedio, e cioè soluzione di peptone che preparammo con una prolungata digestione peptica della caseina stessa, ovvero soluzione di peptone puro commerciale.

Queste ultime ricerche venivano suggerite dal fatto che negli autolizzati da noi adoperati circa 7/10 sono costituiti da aminoacidi e 3/10 da peptidi. Volevamo quindi indagare se il fenomeno dell'ipometabolismo osservato nelle esperienze con introduzione parenterale, potesse ascriversi ai complessi peptidici piuttosto che agli aminoacidi liberi. Ancora poi ci venivano suggerite tali indagini – e in modo più impellente, dal fatto che in ricerche ancora inedite di uno di noi, sembrerebbe che l'iniezione endovenosa di un autolizzato provochi una eliminazione urinaria di aminoacidi e polipeptidi alquanto elevata; fenomeno che, se confermato, potrebbe porre in discussione alcune delle conclusioni a cui sono giunti autori precedenti sul valore biologico di tale materiale.

(*) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1948.

(1) C. LOMBROSO e C. ARDY, Nota I, *Modificazioni del M. G. in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici in cani in via di accrescimento* (1948).

Disposizione sperimentale e tabelle.

Abbiamo usato quattro cani adulti tenuti alcuni a dieta ipoproteica, altri invece a dieta normale di laboratorio. Dopo aver determinato in essi il normale metabolismo basale, abbiamo loro somministrato per os o per fleboclisi a goccia una soluzione al 10 % di Amigen (vedi Nota precedente) in quantità tale da fornire all'animale circa gr. 0,40 di azoto pro-kilo; quindi abbiamo ripetuto il calcolo del ricambio gassoso. Con gli stessi animali si è ripetuta l'esperienza dopo somministrazione di caseina per-os e di una soluzione di peptone per fleboclisi, in quantità tali da fornire sempre circa gr. 0,40 di azoto pro kilo.

Riportiamo nella Tabella I i risultati della somministrazione per -os di Amigen e di caseina. Nella Tabella II quelli dopo fleboclisi di Amigen e di peptone.

Tabella I.

N. del cane	trattamento	peso kg.	durata dell'esperienza	grammi di CO_2 emesso	grammi di O_2 consumato	quoz. respirat.	consumo di O_2 in gr. per kgr-ora	variazione percentuale
3	Amigen per os	5,020	3 h	7,700	6,300	0,89	0,418	
			7 h	17,375	15,825	0,80	0,440	+ 5
3	Idem	5,020	5 h	10,500	10,800	0,72	0,418	
			7 h	29,800	18,975	0,75	0,540	+ 29
4	Idem	5,000	6 h	8,000	6,300	0,90	0,210	
			5 h	7,700	6,700	0,83	0,268	+ 27
4	Idem	5,420	4 h	9,540	8,560	0,81	0,395	
			8 h	23,450	20,030	0,85	0,463	+ 17
1	Caseina per os	4,210	3 h	5,825	4,675	0,90	0,370	
			6 h	13,475	11,315	0,89	0,448	+ 21
4	Idem	5,020	5 h	14,475	11,800	0,89	0,470	
			8 h	21,765	19,675	0,80	0,490	+ 4,2
3	Idem	4,950	5 h	14,900	12,200	0,88	0,493	
			8 h	25,800	22,575	0,82	0,570	+ 13
4	Idem	5,010	5 h	13,200	10,900	0,87	0,435	
			8 h	14,400	11,275	0,87	0,450	+ 3

TABELLA II.

N. del cane	trattamento	peso kg.	durata dell'esperienza	grammi di CO_2 emesso	grammi di O_2 consumato	quoz. respirat.	consumo di O_2 in gr. per kgr–ora	variazione percentuale
1	Amigen fleboc. a goccia (10–20 gocce al minuto)	3,780	5 h	8,800	6,675	0,95	0,355	
			5 h	6,550	5,825	0,81	0,309	— 12,9
1	Idem	3,560	5 h	7,700	6,390	0,86	0,358	
			5 h	5,760	5,360	0,77	0,300	— 16,2
2	Idem	2,750	5 h	9,450	9,250	0,73	0,640	
			5 h	9,900	9,300	0,76	0,670	— 5,6
2	Idem	2,740	5 h	8,800	8,050	0,78	0,584	
			6 h	9,150	8,800	0,74	0,531	— 8,9
2	Idem	2,650	5 h	10,300	9,450	0,79	0,710	
			5 h	8,000	7,300	0,79	0,568	— 22,8
2	Idem	2,660	5 h	9,950	9,050	0,80	0,680	
			5 h	8,725	8,250	0,77	0,620	— 9
3	Idem	5,020	4 h	10,280	8,600	0,87	0,428	
			7 h	15,650	14,200	0,80	0,403	— 6
3	Idem	5,050	3 h	8,100	6,550	0,93	0,432	
			8 h	18,220	15,350	0,80	0,380	— 12,5
4	Peptone, fleboel.	5,000	3 h 1/2	8,200	7,200	0,82	0,412	
			6 h	19,180	15,460	0,00	0,525	+ 28
4	Idem	4,900	4 h 1/2	11,000	8,150	0,99	0,366	
			6 h	11,800	11,900	0,72	0,404	+ 9
3	Idem	4,500	5 h	15,500	13,000	0,86	0,577	
			5 h	10,500	13,800	0,65	0,580	+ 0,5
3	Idem	4,200	3 h	4,450	4,050	0,79	0,321	
			7 h	12,290	10,100	0,91	0,340	+ 6
3	Idem	4,250	5 h	12,600	9,600	0.93	0,465	
			7 h	23,040	19,00	0,90	0,641	+ 27

I risultati ottenuti nelle esperienze con cani adulti e riferiti nelle precedenti tabelle, dimostrano che anche in questi, come nei cani cuccioli, si

ha un abbassamento cospicuo del ricambio gassoso allorchè essi ricevono per via parenterale l'autolizzato enzimatico di caseina. La cifra media di tale abbassamento (rispetto al M.B) è del 10 % circa nel cane adulto, invece che del 28 % circa ottenuto nel cane giovane; ma è pur sempre una cifra assai significativa, dato che, secondo le concezioni classiche dell'azione dinamico specifica, l'apporto di sostanze proteiche ad un animale provoca la più alta A. D. S. e dato che fino ad ora tutta la letteratura riguardante l'uso di autolizzati proteici, sembrerebbe accetti come dimostrato il fatto che la somministrazione di tali materiali sia ugualmente efficace e agisca in un medesimo modo sia che vengano somministrati per os che per via parenterale.

Invece, per ciò che riguarda il R. G. vediamo ora che, anche nel cane adulto, come nel cucciolo, la somministrazione dell'autolizzato per via orale ha un effetto del tutto differente da ciò che si osserva quando viene dato parenteralmente; e cioè si ottiene una spinta ipermetabolica che si avvicina alle cifre di A. D. S. ottenibili con la somministrazione della proteina genuina.

Proseguendo l'analisi dei dati, vediamo poi che la somministrazione di peptone di caseina per via endovenosa negli stessi animali, provoca una A. D. S. di notevole intensità, eguale se non superiore a quella ottenuta con l'apporto di peptone per bocca. Vale a dire, soltanto nel caso di una penetrazione diretta nel circolo sanguigno degli autolizzati proteici, si manifesta il fenomeno di un abbassamento del ricambio gassoso.

Cercando di trovare una spiegazione per tale fenomeno, e tenendo presente la composizione degli autolizzati usati, non sembrerebbe probabile che la causa di un abbassamento del ricambio gassoso dopo somministrazione di tali materiali per via parenterale, sia attribuibile ai peptidi superiori rimasti durante la digestione enzimatica. Il peptone di caseina, come abbiamo visto, provoca una elevata A. D. S., anche se dato direttamente per via endovenosa. Sembrerebbe piuttosto che l'attenzione debba essere rivolta agli aminoacidi liberi che vi si trovano nella proporzione di 7 : 10.

Già in passato era stato osservato [2] che uno dei materiali che si ottengono con l'autolisi di alcune proteine, la glucosamina, esercita una azione potentemente ipometabolica gassosa.

Sarà ad uno o a più aminoacidi liberi che si dovrà questo fenomeno di natura quindi quasi farmacologica ?

Per quanto ci consta, le notizie che si possono raccogliere su quello che riguarda l'analisi degli effetti dei singoli aminoacidi, sono le più discordanti possibili. Passata l'epoca nella quale si era attribuita ai vari processi metabolici del gruppo idrocarbonato dell'aminoacido (costo della trasformazione in glucosio combustione dei così detti cascami di carbonio ecc. , o del gruppo azotato (costo della disamidazione lavoro renale per l'espulsione della urea ecc.), la causa dell'ipermetabolismo gassoso, si tende attualmente da

2) C. ZUCCHO, *Una singolare azione ipometabolica della Glucosamina nei colombi*. « Arch Intern. Pharmacodyn. et Thér. » 66, 40 (1932).

parte di molti autori a concepire l'azione di questi aminoacidi come dovuta ad un intervento neuroumorale; concezione questa che meglio si associa alle proteiformi loro manifestazioni (3).

Fra le ultime osservazioni in questo campo ricorderemo le ricerche di Ochume, il quale affermò che la glicocolla, la l-leucina, la l-tirosina, abbassano il metabolismo gassoso; il triptofano, la l-istidina, l-valina, l'esaltano (4). Sulla particolare azione ipermetabolica della istidina concorda pure Eaton che la giudica maggiore di quella della glicocolla; vale a dire quest'ultimo autore, in contrasto col precedente, ma in armonia con tutti gli antichi sperimentatori, troverebbe ipermetabolica e non ipometabolica la glicocolla (5).

Di fronte a tante contrastanti affermazioni è evidente che una revisione sistematica, che tenga specialmente presente il fattore della dose somministrata, si impone; ad essa cercheremo di collaborare.

Concludendo: il quesito principale che sorge dall'analisi dei dati finora raccolti è il seguente: perchè quando l'autolizzato (Amigen) è somministrato per bocca provoca un aumento del consumo di ossigeno, mentre invece se introdotto per via parenterale determina un abbassamento così cospicuo delle combustioni ?

È in generale un arduo compito analizzare con una certa sicurezza esperienze basate su una qualche modificazione del ricambio gassoso, dato che questo è di per sè la risultante di attività complesse e di così svariati agenti dei quali spesso ci sfugge il meccanismo e l'essenza. Tuttavia, il fenomeno da noi osservato in questo caso è così schematico ed opposto nella sua manifestazione che permette di tentarne una spiegazione. In primo luogo appare probabile – come già abbiamo accennato – che l'azione ipometabolica esplicata dall'idrolizzato da noi adoperato (quando venga dato parenteralmente) sia da attribuirsi agli aminoacidi liberi o ai peptidi inferiori piuttosto che ai complessi protidici superiori. Tralasciando ora di addentrarci oltre nell'analisi del meccanesimo con cui gli aminoacidi o i peptidi inferiori determinino un ipometabolismo gassoso, osserviamo che se si accettano le teorie dominanti sulle modalità di assorbimento delle proteine, e cioè che queste debbano sempre venire demolite nei loro costituenti (aminoacidi o al più peptidi inferiori) potremmo addurre come spiegazione tentativa del fenomeno da noi osservato che, durante il passaggio delle sostanze componenti l'autolizzato attraverso la mucosa intestinale o il fegato, avvengano delle modificazioni per ora non individuabili di tali sostanze, per cui esse perdono l'azione ipometabolica che invece esplicano allorchè sono introdotte in circolo direttamente.

(3) Ved. G. SCHAEFFER et E. LE BRETON, *L'Action Dynamyque Specifique des Protides* « Monographie, Actualités Scient. et Ind. », *642*. Hermann e Co., Paris 1938.

(4) O. C. OCHUME, *Action of aminoacids on growth*. « Naturwissenschaften, 29. 725 (1941).

(5) A. G. EATON, *The heat production and blood and urine constituents after administration of l-histidine to the dog*. « J. Nutrition », *21*, 25 (1941).

A questo proposito ricordiamo che in antiche esperienze [6] era stato osservato che, introducendo una soluzione concentrata di aminoacidi in un segmento di intestino sopravvivente mediante circolazione isolata, una notevole quantità di aminoacidi scompariva, mentre la produzione di ammoniaca o di corpi chetonici giustificava soltanto in parte questa scomparsa. Tali risultati venivano interpretati come dovuti alla formazione di peptidi.

A noi sembra quindi legittimo di porre innanzi quale ipotesi di lavoro che la crasi sanguigna sia differentemente modificata quando l'autolizzato proteico è introdotto direttamente in circolo, da quando deve invece attraversare la mucosa intestinale e il fegato per prendere parte al metabolismo intermedio. Che la mucosa intestinale possa, anche con modificazioni minime dal punto di vista chimico, cambiare profondamente il comportamento biologico di alcune sostanze in via di assorbimento, è cosa ben nota. Basti ad esempio ricordare che gli acidi grassi sarebbero dannosissimi se la mucosa intestinale non provvedesse ad una loro sintesi prima che penetrino in circolo. In quanto al fegato poi, esso rappresenta la sede delle più notevoli manipolazioni delle sostanze proteiche in genere e degli aminoacidi in particolare; per cui è logico supporre un suo intervento modificatore del materiale proteico che deve attraversarlo. Infine si potrebbe anche supporre che nelle nostre esperienze un qualche ruolo possa attribuirsi al fattore Strepogenina sulla cui azione stimolatrice dell'accrescimento, allorchè dato per bocca, già sappiamo qualcosa, ma del quale ci possono sfuggire altri eventuali effetti.

Ulteriori ricerche cercheranno, se possibile, di risolvere questi quesiti riguardanti il meccanesimo d'azione degli idrolizzati proteici che tanta importanza hanno assunto e dal punto di vista teorico e da quello pratico.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente annuncia alla Classe che è presente alla seduta il Socio Straniero prof. Ernest Chain dell'Università di Oxford, Premio Nobel per i suoi studi sulla penicellina, della quale è stato uno degli scopritori. All'Illustre scienziato straniero il Presidente porge il saluto della Classe, che si associa con un vibrante applauso.

Il Presidente comunica quindi la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Emilio Almansi, deceduto il 10 agosto del c. a. Emilio Almansi che entrò all'Accademia in giovane età ed era uno dei Soci più anziani, fu chiamato a Roma professore di meccanica razionale nel 1912, ma si ritirò da l'insegnamento nove anni più tardi a causa delle sue condizioni di salute che si aggravarono via via e gli resero molto penosa la vecchiaia. Ingegno

(6) Abderhalden cit. Bottazzi, «Arch. di Fisiol., *10*, 38 (1912); U. Lombroso e C. Artom, «Rendic. Acc. Lincei», *24*, 475 (1915); V. Gayda, «Archivio di Fisiol.», *13*, 83 (1914).

assai versatile, fu indeciso durante gli studi liceali se dedicarsi alla pittura o alla matematica. Scelta quest'ultima via, vi raggiunse un posto elevato con le sue ricerche acute e originali sulla teoria dell'elasticità idrodinamica e meccanica celeste, lasciando numerose pubblicazioni, ormai acquisite al patrimonio scientifico.

Il Presidente dà quindi notizia di un'altra grave perdita subita recentemente dalla Classe con la morte, avvenuta a Torino il 2 ottobre 1948, del Socio Nazionale Federico Sacco, già Professore in quel Politecnico e incaricato all'Università. Geologo e Paleontologo di alta fama, il Sacco si occupò in particolare dei fossili del Terziario e del Quaternario e trattò problemi relativi alle epoche glaciali nelle Alpi piemontesi.

Alla memoria dei due Illustri Consoci scomparsi il Presidente invia il riverente saluto della Classe e dell'Accademia.

Il Presidente comunica poi che hanno ringraziato per la nomina a membri dell'Accademia i Soci Nazionali: Edoardo Amaldi, Nello Beccari, Livio Cambi, Gustavo Colonnetti, Antonino Lo Surdo, Arturo Miolati, Ettore Onorato, Giovanni Polvani, Oscar Scarpa, Sergio Sergi, Francesco Severi, Giancarlo Vallauri; i Soci Corrispondenti: Giuseppe Albenga, Ciro Andreatta, Gilberto Bernardini, Luigi Califano, Umberto d'Ancona, Romolo Deaglio, Giulio De Marchi, Ardito Desio, Bruno Finzi, Paolo Gallitelli, Guido Grandi, Domenico Marotta, Aldo Pavari, Giulio Cesare Pupilli, Achille Roncato, Giovanni Semerano, Alessandro Terracini, Silvio Vardabasso; i Soci Stranieri: Giacomo Fauser, Ciril Hinshelwood, Paul Karrer, Bertil Linblad, Robert Andrews Millikan, Henry, Norris Russell, Leopold Ruzicka, Hugh S. Taylor, Stephen P. Timoshenko.

PLICHI SUGGELLATI

Sono presentati alla Classe i plichi suggellati del prof. Pietro Pisa e del dott. Carlo Brigante Colonna.

Il Socio Bargellini presenta inoltre in plico suggellato una Nota del dottore Enrico Del Pianto.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli dei tre plichi, dispone che gli stessi siano conservati nell'Archivio Accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Boaga presenta il 1° e 2° volume del suo « Trattato di geodesia e topografia con elementi di fotogrammetria » e ne parla.

Il Socio Puntoni presenta, illustrandolo, il 1° volume del suo « Trattato d'igiene », al quale seguirà un secondo volume nel gennaio o nel febbraio del prossimo anno.

Il Presidente Castelnuovo presenta poi il 1° volume delle « Lezioni di geometria moderna » del Socio Beniamino Segre e ne illustra il contenuto.

L'Accademico Segretario procede alla presentazione delle pubblicazioni inviate in omaggio e alla breve illustrazione di alcune di esse, quali l'opera del Socio Sansone dal titolo « Equazioni differenziali nel campo reale » e il numero commemorativo del centocinquantesimo anniversario della fondazione del « The Philosophical Magazine ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Bianchi, Trabacchi, Carobbi, Lombardi, Picone, Cotronei, Carnera, Silva, Bonino, Armellini, Bompiani, Giorgi, Deaglio – a mezzo del Socio Vallauri – e Amoroso.

Il Socio Beccari presenta la Memoria del dott. Lodovico Caporiacco « Le specie e sottospecie del genere ' Euscorpius ' vivente in Italia e in alcune zone extra italiane ». Sarà nominata un'appositа commissione che riferirà su detta Memoria.

L'Accademico Segretario dà lettura dell'elenco delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Armellini G., Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi di un assorbimento del flusso gravitazionale attraverso i mezzi materiali.

Ascoli G., Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione.

Bonino G. B. e Marinangeli Q. M., Ricerche sulla teoria delle soluzioni concentrate di elettroliti forti. – VI. Dipendenza delle temperature di grandezze che intervengono nel calcolo degli abbassamenti crioscopici (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Angeno M. e Chiozzotto M., Sull'assorbimento di elettroni di 17 MeV, in materiali di diverso numero atomico (pres. dal Socio G. C. Trabacchi).

Barozzi F., Sul bilancio di potenza in una rete elettrica ad m morsetti in regime sinusoidale di correnti (pres. dal Socio L. Lombardi).

Bertolani M., I costituenti minori delle antimoniti (pres. dal Corrisp. G. Carobbi).

Bianchi G., Ricerche sui fenomeni di scarica agli elettrodi ad altissima densità di corrente (pres. dal Socio O. Scarpa).

Ceruti A., L'azione di alcuni cationi e dell'acqua sul condrioma isolato in vitro (pres. dal Corrisp. C. Cappelletti).

Cotugno N. e Mengotti-Marzolla C., Approssimazione per eccesso della più bassa frequenza di una piastra ellittica omogenea incastrata (pres. dal Socio M. Picone).

D'Addario R., Osservazioni sulla curva dei redditi (pres. dal Corrisp. L. Amoroso).

Demichelis F., Sullo spessore dello strato di sbarramento nei raddrizzatori a ossidulo di rame (pres. dal Socio E. Perucca).

FANTAPPIÈ L., I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

FENCHEL W., Estensioni di gruppi discontinui e trasformazioni periodiche delle superficie (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

GARELLI C. M. e SACERDOTE G., Determinazioni di una scala di sensazioni visive (pres. dal Corrisp. R. DEAGLIO).

GHIZZETTI A., Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti (pres. dal Socio M. PICONE).

HIEKE MERLIN O., Facies ultrafemiche nei basalti dell'Africa Orientale (pres. dal Socio A. BIANCHI).

NICOLINI T., Perturbazioni e discontinuità nel moto polare (pres. dal Socio L. CARNERA).

NICOLINI T., Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler (pres. dal Socio L. CARNERA).

PELLEGRINO F., Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

PERRI T., La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». Nota III (pres. dal Socio G. COTRONEI).

PURIFICATO A., Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson (pres. dal Socio M. PICONE).

SALVADORI M. G., Sul calcolo degli autovalori mediante differenze finite ed estrapolazione (pres. dal Corrisp. G. KRALL).

SCHIAVINATO G., Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in Alta Val Camonica. – II: Formazioni metamorfiche associate agli scisti del Tonale (pres. dal Socio A. BIANCHI).

STANKIEWICZ L., Sul calcolo della deformazione della piastra poggiata su suolo elastico (pres. dal Socio M. PICONE).

STEFANELLI A., Regolazioni duplicative dell'allungato in embrioni di *Rana esculenta* (pres. dal Socio G. COTRONEI).

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCHI DEI CONCORRENTI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE MATEMATICHE*

(Scadenza 30 aprile 1948 – Premio lire 10.000)

1. AYMERICH GIUSEPPE. — 1. « Sul moto piano di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico di tipo particolare notevole » (st). — 2. « Sul moto prossimo a quello piano di un corpuscolo elettrizzato in un particolare campo magnetico di tipo notevole » (st.). — 3. « Trasformazione conforme delle funzioni biarmoniche ed applicazione all'elasticità piana » (ms.).

2. ASTOLFO ELVIRA. — « Valutazione per eccesso della più bassa frequenza nelle oscillazioni proprie di una piastra ellittica omogeneea incastrata » (st.).

3. BERNASCONI CARLO. — « Tracciamento meccanico di diagrammi – Strumenti – Applicazioni » (ms).

4. BERRETTA DELIO. — « Sulla risoluzione di alcuni tipi particolari di equazioni integrali » (ms.).

5. BRUNETTI FRANCESCO. — « Nozioni fondamentali di Aritmetica e di Geometria per il compimento del Corso elementare e per i Corsi popolari con esposizione di metodo di insegnamento » (ms.).

6. CELLITTI CARLO. — 1. « Relazioni tra i numeri delle classi nei diversi ordini di forme binarie quadratiche di un determinato dato » (ms.). — 2. « Due dimostrazioni elementari della convessità dell'ellisse » (st.). — 3. « Il teorema di Menelao con qualche notevole applicazione nell'ambito della geometria elementare » (st.).

7. CERAVOLO PASQUALE. — « Su la scissione di un numero nella somma di altri due detti « nuclei » e su alcune peculiari proprietà di essi » (st.).

8. DE SIMONI FRANCO. – 1. « Sul moto dei corpi rigidi con sospensione quasi-baricentrica » (st.). — 2. « Teoria elementare dei risonatori sferici cavi eccitati da un dipolo hertziano » (st.). — 3. « Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell–Heaviside » (st.).

(Fuori concorso): 1. « Sull'integrazione del moto di un solido intorno ad un punto fisso col metodo di Hamilton–Jacobi » (st.). — 2. « Su un metodo di integrazione di un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine dipendenti da un parametro » (st.) — 3. « Teoria matematica dei risonatori cavi cilindrici eccitati da un dipolo hertziano. (st.). — 4. « Teoria matematica dei risonatori cavi prismatici eccitati da un dipolo hertziano » (st.).

9. LORUSSO VINCENZO. — « Sul calcolo delle azioni dinamiche per ala finita in corrente non stazionaria e il teorema di Joukowski nel caso tredimensionale » (ms.).

10. MANARINI PINI EDITTA. — 1. « Trigonometria ad uso dei Licei classici e scientifici » (st.). — 2. « Problemi di applicazione dell'algebra per l'Istituto Magistrale » (st.). — 3. « Geometria per gli Istituti Magistrali » (st.).

(Fuori concorso): 1. « Sulla ricerca delle funzioni primitive per le funzioni di più variabili (st.). — 2. Ancora sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più va-

riabili (st.). — 3. « Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie » (st.). — 4. « Sulla continuità degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y, \gamma)$ rispetto ai valori iniziali » (st.). — 5. « Sopra una classe di equazioni integrali » (st.). — 6. « Ancora sulle equazioni integrali del tipo $f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\,\varphi(y)\,dy$ » (st.). — 7. « Recensione del Libro « R. Garnier, *Cours de Mathématiques générales* » (st.).

11. Mercuri Raffaele. — « Sulla divisione del trapezio in parti equivalenti mediante corde parallele alle basi » (ms.).

12. Ossicini Alessandro. — « Le trasformate del Laplace unilaterale e bilaterale e la propagazione del calore in un filo isolato illimitato e in un filo non isolato illimitato » (ms.).

13. Paolini Bruna. — « Sul moto di una corda fissata agli estremi e soggetta a tensione variabile col tempo » (ms.).

14. Rolla Primo Giuseppe. — « Sulla questione Euclidea » (ms.).

15. Roselli Carlo. — « Alcune proposizioni generali relative al triangolo. La similitudine in senso lato » (ms.).

16. Sestini Giorgio. — 1. « Sulla composizione dei moti rigidi » (st.). — 2. « Azioni dinamiche esercitate da una corrente traslocircolatoria su un arco di circonferenza con una sorgente eccentrica » (st.). — 3. « Moto di un punto soggetto a resistenza e a forza di richiamo » (st.). — 4. « Sopra un problema ai limiti in un caso non stazionario di propagazione del calore » (st.). — 5. « Sopra i moti di un sistema rigido un punto del quale è vincolato ad una linea liscia » (st.).

(Fuori concorso): 1. « Sugli sviluppi in serie lacunari di funzioni di Sturm-Liouville » (st.). — 2. « Un teorema sugli sviluppi in serie lacunari di funzioni di Sturm-Liouville » s(t.). — 3. « Sulle serie lacunari di polimoni di Legendre » (st.). — 4. « Osservazione sopra due funzioni analitiche che soddisfano ad una particolare condizione » (st.). — 5. « Sul piano centrale di alcuni sistemi di vettori » (st.). — 6. « De pendulis » (st.). — 7. « Corrente traslocircolatoria in presenza di una ruota a profilo ipocicloidale » (st.). — 8. « La catenaria » (st.). — 9. « Corrente traslocircolatoria, in presenza di un arco di circonferenza, con una sorgente eccentrica » (st.). — 10. « Coppia di sorgenti variabili aperte su una circonferenza » (st.). — 11. « Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati » (st.). — 12. « Sulla dinamica di un particolare sistema piano » (st.). - - (13) « Composizioni di moti rigidi » (st.). — 14. « Composizioni di moti rigidi » (st.). — 15. « Sopra un problema di propagazione del calore » (st.).

17. Tocchi Luigi. — 1. Nuovi teoremi sulla caratteristica delle matrici (ms.). — 2. « I Teoremi di Chasles e di Graves sulle coniche omofocali » (ms.).

18. Toscano Letterio. - 1. Su una classe di equazioni differenziali di primo ordine » (ms.). — 2. Sulle funzioni di matrici del terzo ordine » (ms.). — 3. « Su una classe di funzioni simmetriche » (ms). — 4. « Sulla iterazione dell'operatore xD » (ms.). — 5. « I polimoni ipergeometrici nel calcolo delle differenze finite » (ms.). — 6 « Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer » (ms.).

19. Vaccaro Pietro. — 1. « Sulla ricerca del fuoco di una parabola » (ms.). — 2. « Sulla ricerca del fuoco di una conica a centro « (ms.). - 3° « Sulla ricerca dei fuochi di una conica a centro. Distanza focale » (ms.).

20. Ventriglia Mario. — « Le formule di Eulero e loro applicazioni alle funzioni circolari, iperboliche e esponenziali » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE FISICHE*

(Scadenza 30 aprile 1948. – Premio lire 10.000).

1. ALEANZI GIUSEPPE. — L'equilibrio termico e disposizione di cilindri isolanti sulle colonne del trasformatore » (st.).

(Fuori concorso): 1. « Tendenze attuali del rifasamento elettrico » (st.). — 2.« Studio comparativo fra le perdite di un circuito magnetico con isolamento basato sull'ossido naturale o sulla carta » (st.).

2. ANTONI GIUSEPPE. — 1. « Descrizione di un nuovo tipo di Polarimetro », (ms.). — 2. « I sensi e il problema della conoscenza » (st.).

3. BERRETTA DELIO. — « Il teorema di sovrapposizione e il teorema di reciprocità per i circuiti in corrente alternata » (ms.).

4. BRUNI GIORDANO. — 1. « Il peso molecolare coesivo dell'alluminio ai punti di inversione della curva dilatazione termica-temperatura ». (st.). — 2. « Il peso molecolare del ghiaccio I dedotto dalla coesione » (st.). — 3. « Il calore specifico » (st.). — 4. « Il macrocosmo è un essere vivente » (st.). — 5. « L'opera scientifica italiana ignorata al Congresso dei Fisici di Como ». (st.). — 6. « La legge di Newton si applica anche al microcosmo » (st.).

(Fuori concorso): « Tensile Strength of aluminium. Experimental Determination of Value at the Melting Point » (st.).

5. CERASOLI ERCOLE. — 1. « La Teoria dei Quanti e la sua evoluzione » (ms.). — 2. « Osservazioni sui sistemi assoluti di unità » (ms.). — 3. « Dall'elettrone all'energia atomica » (ms.). — 4. « La dinamica della relatività » (ms.).

6. DI LAZZARO LUIGI. — « Il pendolo differenziale elettromagnetico » (ms.).

7. GIACOMELLI RAFFAELE. – 1. « Nel terzo centenario della morte di Galileo Galilei. – Galileo e la legge d'inerzia » (st.). — 2. « Nel terzo centenario della morte di Galileo Galilei. – Galileo e la resistenza dell'aria » (st.). — 3. « L'invenzione dell'aerostato e l'opera di Tiberio Cavallo » (st.). — 4. « L'aeronautica nel suo sviluppo storico fino a tutto il 1939 » (ms.). — 5. « Programma riassunto del corso libero di storia dell'aeronautica svolto alla Scuola d'Ingegneria Aeronautica dell'Università di Roma nell'anno scolastico 1946-47 » (ms.). — 6. « Rievocando una discussione sul concetto di massa, quarant'anni fa » (st.). — 7. « L'opera scientifica e didattica di Nicola Jukovski nel campo della meccanica e dell'aeronautica – Commemorazione tenuta il 20 dicembre 1947 in occasione del centenario della nascita di Jukovski » (ms.). — 8. « Leggenda e realtà nella giovinezza di Galileo Galilei » (ms.).

8. GLIOZZI MARIO. — « L'Elettrologia nel secolo XIX. – Parte I ». (ms.).

9. LORUSSO VINCENZO. — « Sul calcolo delle azioni dinamiche per ala finita in corrente non stazionaria e il teorema di Soukowski nel caso tridimensionale » (ms.).

10. MAYR GIOVANNA. — 1. « Effetti del campo magnetico sulla cristallizzazione di alcuni sali paramagnetici » (st.). — 2. « Eventuali cause di errore nello studio del comportamento magnetico di una sostanza » (st.). — 3. « Resistenza elettrica specifica del bismuto solidificato in campo magnetico » (st.). — 4. « Effetto del campo magnetico agente durante la cristallizzazione da fusione di alcuni metalli » (st.). — 5. « Effetto del campo magnetico sulla tempera di una lega Co Cu ad alta percentuale di Cu. — 6. « Evoluzione storica delle teorie inerenti alle unità elettriche » (st). — 7. « I sistemi assoluti di unità elettriche » (st.). — 8. « Le dimensioni delle grandezze elettriche e magnetiche nei vari sistemi » (st). – 9. « I Campioni delle unità elettriche. – La tecnica delle misure – I Parte » (st.). — 10. « I Campioni delle unità elettriche – La tecnica delle misure – II Parte » (st.).

11. RANGOZZI GIOVANNI. — « Lavoro su argomento di scienze fisiche » (ms.).

12. SEBASTIANELLI LUIGI. — « Il vettore ellittico » (ms.).

13. VITALE DARWIN. — « Elementi di Elettrofisica generale » (st.).

14. ZANETTI RENZO, 1. « Ricerche in celle frigorifere con frigorimetri " Z " » (st.). | 2. « Un nuovo apparecchio per lo studio delle proprietà termiche delle stoffe » (st.). — 3. « Tavola per il calcolo della velocità dell'aria con il catatermometro argentato » (st.). — 4. « Sui metodi di misurazione della temperatura radiante media ». (st.). — (5. « Ricerche sulle proprietà termiche delle stoffe – Nota II – Influenza dei deboli movimenti dell'aria sulla trasmissione del calore » (ms.).

(Fuori concorso): 1. « Sulla determinazione del calore disperso nell'atmosfera dai corpi riscaldati » (st.). — 2. « Osservazioni al frigorimetro " Z " dell'inverno 1938-1939 in Padova » (st.). — 3. « I Frigorimetri " Z " – Caratteristiche – Costruzioni – Impiego » (st.). — 4. « Sul controllo dei consumi di combustibile per riscaldammento » (st.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE CHIMICHE*

(Scadenza 30 Aprile 1948. — Premio L. 10.000).

1. BRUNI GIORDANO. — 1. « La scelta dei catalizzatori mediante la legge sulla crescita a somiglianza » (st.) — 2. « Orto e paraidrogeno ai loro punti tripli » (st.). — 3. « L'idrogeno nelle condizioni critiche » (st.).

(Fuori concorso): 1. « Das aus der Kokäsion abgeleitete Molekulargewicht des festen Benzols » (st.). — 2. Die Kohäsion das festen Benzols in Schmelzpunkt » (st.).

2. BUSICO UMBERTO. — « Relazione sulle prime esperienze di ricupero dell'acido tartarico dalle fecce per elettrolisi » (ms.).

3. CERASOLI ERCOLE. — 1. « Affinità chimica » (ms.). — 2. « Aspetti storici della chimica colloidale » (ms.). — 3. « Meccanica chimica » (ms.).

4. LASSANDRO PEPE TOGO. — 1. « Ebulliometro per la determinazione del grado alcoolico del vino o di una qualsiasi soluzione alcoolica » (st.).

Fuori concorso): 1. « Apparecchio per la titolazione continua di soluzioni, ad esempio, per la determinazione dell'alcalinità dei sughi che si trattano nella estrazione dello zucchero dalle barbabietole » (st.). — 2. « L'urina come saggio della fatica ». (st.). — 3. « Un apparecchio per la determinazione delle carni in putrefazione » (st.). — 4. « Reazioni caratteristiche » (st.).

5. PROCOPIO MARIO. — 1. « Il siero di latte in panificazione (st.). — 2. « Di alcuni effetti del siero di latte sulle caratteristiche meccaniche degli impasti panari » (st.). — 3. « Considerazioni tecnico economiche sulle concimazioni fosfatiche » (st.). — 4. « Valutazione rapida dell'acidità volatile nei vini » (st.). — 5. « Brevetti relativi agli estratti peptonici di origine crisalidica » (st.). — 6. « Innesto proteico nei mosti zuccherini » (st.). — 7. « Valutazione fotometrica dell'intensità di colorazione dei vini rossi e del potere colorante delle enocianine » (ms.). — 8. « Interpretazione del valore della densità nei vini dolci ai fini della valutazione degli zuccheri » (ms.). — 9. « Indagini sul metodo di apprezzamento colorimetrico dell'acidità totale del latte » (ms.) — 10. « Contributo allo studio della meccanica delle terre » (ms.).

(Fuori concorso): 1. « Principî di chimica organica » (st.). — 2. « Note riguardanti argomenti di interesse agrario generale » (st.).— 3. « Note riguardanti l'argomento " chimica atomica " » (st.). — 4. « Note riguardanti l'argomento " vino " ». (st.). — 5. « Raccolta dispense e moduli vari riguardanti: i prodotti agrari, vini, latte e derivati » (st.).

6. VECCHI GASTONE. — « Effetti cromatici di ossidi metallici in alcune vernici ceramiche ». (ms.).

7. VENTURA BENEDETTO.— « Un antidetonante eccelso: il Piombotetraetile » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE NATURALI*.

(Scadenza 30 aprile 1948 – Premio lire 10.000)

1. BERNARDI CARLO. — 1. « Il problema del ripopolamento ittico dell'Adige » (ms.). — 2. « Suggerimenti per una efficace protezione delle specie ittiche di alto valore economico dell'Aviso nei riguardi della sua totale utilizzazione a scopi industriali » (ms.).

2. BRUNI GIORDANO. — 1. « Le sostanze cinetiche » (st.). — 2. « La causa del fenomeno vitale » (st.). — 3. « Il moto generato dall'idratazione del timolo » (st.). — 4. « Materia viva e morta » (st.).

3. CALESTANI VITTORIO. — « Natura in maschera ». (st.).

4. CERASOLI ERCOLE. — 1. « La polarizzazione cromatica dal punto di vista fisico e matematico » (ms.). — 2. « Sul pleocroismo e sulla direzione delle vibrazioni luminose in un mezzo birifrangente » (ms.).

5. GABOTTO LUIGI. — « Contro le malattie e gli insetti delle piante agrarie » (st.).

6. PITTALUGA ROSETTA. — « Vita intima di una grande scuola scientifica » (ms.).

7. ZANOTTI MAURO. — « Osservazioni sul diradamento precoce dei seminati a canapa da tiglio » (ms.).

8. ZENARI SILVIA. — 1. « La vegetazione del Comelico (Alto Cadore). Ricerche sulla distribuzione altimetrica » (st.). — 2. « Contributo alla conoscenza della flora del Comelico » (st.). — 3. Piante critiche delle Alpi Orientali » (st.). — 4. « Un manipolo di piante critiche delle Alpi Venete » (st.). — 5. « Scrofulariacee delle Alpi Cadorine » (st.). — 6. « Campanulacee delle Alpi Venete » (st.). — 7. « Composite delle Alpi Venete » (st.). — 8. « Contributo alla conoscenza della flora delle Alpi Cadorine » (st.).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 novembre 1948

BAEYENS P. — *The effect of operating conditions on the throwing power of cyanide cadmium plating solutions*. Estr. da « Papers » presented at the third Int. Conference on Electrodeposition, 1947, n. 13.

BANFI Florio. — *Gli albori della cartografia in Ungheria*. Francesco Rosselli alla Corte di Mattia Corvino. Roma, Tip. della Bussola, 1847. (Biblioteca dell'Accademia di Ungheria in Roma diretta da Tiberio Kardos, n. s., 6).

— « *Imago Hungariae* » *nella cartografia italiana del rinascimento*. Roma, Tip. della Bussola, 1947. (Biblioteca dell'Accademia d'Ungheria in Roma diretta da Tiberio Kardos, n. s., 11).

BEIER M. — *Pseudoscorpionidea*. [*Arachnida*]. Estr. da « Bulletin of the Society Fouad 1er of Entomology », vol. XXXI, 1947. (Results of the Armstrong College Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert), 1935).

BOAGA Giovanni. — *Trattato di Geodesia e Topografia con elementi di Fotogrammetria*. Padova, « CEDAM », 1948. Voll. 2 in-8°.

BRADFORD B. — *The biology of* « *Anomala Vetula* » *wied an arthropod pest of turf in South Africa*. Estr. da « South African Journal of Science », vol. XLIV, 1948.

BRITTON E. B. — « *Cicindelidae* » *and* « *Carabidae* ». [*Coleoptera*]. Estr. da « Bulletin of the Society Fouad 1er of Entomology », vol. XXXI, 1947. (Results of the Armstrong College Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert), 1935).

CENTRO DI STUDIO PER LA BIOLOGIA. — *Conferenze tenute presso la Stazione Zoologica di Napoli*. (Pasqua 1947). Suppl. a « La Ricerca Scientifica », a. XVIII, 1948. (Consiglio Nazionale delle Ricerche).

CRASS R. S. — *May flies* (*Ephemeroptera*) *collected by Omer-Cooper in the Eastern Cafe Province, South Africa, with a description of a new genus and species* (*Notonurus Cooperi*). Estr. da « Proceedings of the Royal Entomological Society of London », s. B, vol. XVI, 1947, Pp. 9–10.

DARROW Karl K. — *Davisson and Germer*. Estr. da « Scientific American », 1948, May.

DENIS Jacques. — *Spiders*. [*Aranae*]. Estr. da « Bulletin of the Society Fouad 1a of Entomology », vol. XXXI, 1947. (Results of the Armstrong College Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert), 1935).

DONISTHORPE Horace. — *A second list of the Formicidae*. [Hymenoptera]. Estr. da « Bulletin of the Society Fouad 1a of Entomology », vol. XXXI, 1947. (Results of the Armstrong College Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert), 1935).

D'ORCHYMONT A. — *Report on the Palpicornia* (*Coleoptera*), *Mr. Omer-Cooper's investigation of the Abyssinian Fresh Waters* (*Hugh Scott Expedition*). Estr. da « Proccedings of the Zoolopical Society », vol. CXVII, 1947.

EULER Leonhard. — *Theoria motus corporum solidorum seu ripidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus qui in huiusmodi corpora cadere possunt accomodata*. Edidit Charles Blanc. Vol. I. Bernae, Soc. Scientiarum Naturalium Helvetica, 1948. Pp. XXII–327, in-4° con figg. (Leonhardi Euleri opera omnia, s. 2a, vol. III).

FANO Gino. — *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve – sezioni canoniche*. Estr. da « Commentationes Pontificiae Academiae Scientiarum » vol. XI, a. XI, 1947, n. 11.

FENWICH E. M. — Vedi: Omer – Cooper J., Whitnall A.B.M. and Fenwick E. M.

FU C. Y. — Vedi: Gutenberg Beno and Fu C. Y.

GADOLA Arnaldo. — *Zootecnia, profilassi e igiene zootecnica in Africa Orientale*. Pt. I e II. Roma, Ist. Sup. di Sanità – Fondaz.

E. Paternò, 1947–1948. Pp. 230, 511, in-8°, con figg.

GIUSTI Ugo. — Vedi: Toniolo Antonio Renato e Giusti Ugo.

GLAHOLM J. — Vedi: Omer-Cooper J., Whitnall A.B.M. and Glaholm J.

GOMME George Laurence. — *Ethnology in Folklore*. London, Kegan Paul, Trench, Trübner and C., 1892, Pp. VII–200, in-16°. (Modern Science).

GREGORIO Gaetano. — *Monografia sulla origine dei corpi celesti e del globo terrestre e legge universale*. Patti, Tip. «Littorio», 1934. Pp. 39, in-8°.

GUTENBERG Beno. — *A Geophysicist X – Rays Mother Earth*. Estr. da «Engineering and Science Monthly», vol. XI, 1948, n. 2.

— *Geophysics in war and peace*. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXIX, 1948, n. 2.

— *On the layer of relatively low wave velocity at a depth of about 80 Kilometers*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XXXVIII, 1948, n. 2.

GUTENBERG Beno and FU C. Y. — *Remarks on multiple reflections*. Estr. da «Geophysics», vol. XIII, 1948, n. 1.

GUTENBERG Beno and RICHTER C. F. — *Deep-focus earthquakes in the Mediterranean Region*. Estr. da «Geofisica pura e applicata», vol. XII, 1948, fasc. 3–4.

— *Earthquake study* in *Southern California, 1947*. Estr. da «Transactions of the Geophysical Union», vol. XXIX, 1948, n. 3.

HEMMINGSEN Axel M. — *Zoological observations at a chinese temple*. Estr. da «Reports of the Steno Memorial Hospital and the Nordisk Insulinlaboratoriom», vol. I, 1946.

HUDSON Gerda Bland. — *A study of the tentorium in some orthopteroid Hexapoda*. Estr. da «Yournal of the Entomological Society of Southern Africa», vol. VIII, 1945.

LEHMANN I. — *On two explosions in Danish waters in the autumn of 1446*. Estr. da «Geofisica pura e applicata», vol. XII, 1948, fasc. 3–4.

MANTERO Giacomo. — *Armando Balioni*, Genova, Fratelli Pagano, Tip. Ed., 1948. Pp. 8, in-8°.

MARTNER Samuel T. — *The Dominguez Hills. California, earthquake of june 18, 1944*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America»., vol. XXXVII, 1948,n. 2.

MORANDI Luigi. — *L'organizzazione della ricerca scientifica nell'industria*. Estr. da «La chimica e l'Industria», vol. XXX, 1948, nn. 5 e 6.

Natural Philosophy through the Eighteenth Century and Allied Topics. Commemoration Number to mark the 150th Anniversary of the foundation of the Philosophical Magazine. London, Taylor and Francis, 1948. Pp. VII–164, in-4°.

OFFICE NATIONAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE. ÉCOLE D'APPLICATION. — *Cours de climatologie* à l'usage des élèves météorologistes par MM. Sanson et Buffault. I: Texte, II: Imprimés et pubblications cités dans le texte 1941. Pp. 248–VIII, con tavv. Dispense litografate.

OLDROYD H. – *Diptera Tabanidae, Asilidae, Therevidae, and Bombyliidae*. Estr. da «Bulletin of the Society Fouad 1er of Entomology», vol. XXXI, 1947. (Results of the Armstrong College Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert), 1935).

OMER-COOPER J. — *Desiccation*. Estr. da «Veld Trust News», vol. IV, 1948, n. 9.

OMER-COOPER J., WHITNALL A. B. M. and FEUWICH E. M. — *The insect and the golfer*. Estr. da «South African Golf», 1941–1942, june-aug.

— *The problem of South African turf in relation to invertebrate pests*. Estr. da «South African Journal of Science», vol. XXXVII.

— *Notes on four species of «Coleoptera» attacking turf in the Eastern Cape Province*. Estr. da «Sout African Yournal of science», vol. XLIV, 1948.

OMER-COOPER J., WHITNALL A. B. M. and GLAHOLM J. — *Natural control of red scale. Aonidiella aurantii Mask*. Estr. da «The Citrus Grower», 1946, february.

PATXOT I JUBERT R. — *Lettre aux membres de l'Organisation Météorologique Internationale et aux Météorologues en général*. Ed. privée. Fribourg, Impr. Fragnière Frères, 1948. Pp. 44, in-4°.

PUNTONI Vittorio. — *Trattato d'igiene*. Vol. I. *Igiene generale e speciale*. Roma, «Studium Urbis», 1948. Pp. XVII–794, in-8°, con figg.

RICHTER C. F. — Vedi: Gutenberg Beno and Richter C. F.

SANSONE Giovanni. — *Equazioni differenziali nel campo reale*, Pt. I. 2ª ed. Bologna, N. Zanichelli, 1948. Pp. XVII–400, in 8° con figg.

SEGRE Beniamino. — *Lezioni di geometria moderna*. Vol. I. Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi. Bologna, N. Zanichelli, 1948. Pp. IV–195, in–8°, con figg.

SERGENT Edmond et SERGENT Étienne. — *Histoire d'un marais algérien*. Alger, Inst. Pasteur d'Algérie, 1947, Pp. 293, in–8°, con figg. e tavv.

SERGENT Étienne. — Vedi: Sergent Edmond et Sergent Étienne.

SILVESTRI Filippo. — *Contributo alla conoscenza degli Japygidae* (*Insecta Diplura*). Estr. da « Rendiconti dell'Accademia dei XL », s. 3ª, vol. XXVII, 1948.

— *Distribuzione geografica di alcuni piccoli Artropodi*. Estr. da « Bollettino di Zoologia », vol. XV, 1948, nn. 1–2–3.

— *Gli insetti parassiti delle piante*. Estr. da « L'Italia agricola », 1948, nn. 7–8.

— *Intorno ad alcune anomalie di Japygidae* [*Insecta, Diplura*]. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. VIII, 1948.

— *Japyginae* [*Japygidae: Insecta Diplura*] *della fauna italiana finora note*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agragia di Portici », vol. VIII, 1948.

— *Specie di Japygidae* [*Insecta Diplura*] *finora raccolti nel Messico*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. VIII, 1948.

— *Tavola sinottica dei generi di Diplopoda Penicillata*. Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. VIII, 1948.

SOCIETÀ ILVA. — *Ilva. Alti forni e acciaierie d'Italia*. 1897–1947. Bergamo, Ist. It. di Arti Grafiche, 1948. Pp. 369, in–4°, con figg. e tavv.

TONIOLO Antonio Renato. — *A proposito della situazione e della prima conoscenza dell'isola di Clipperton*. Estr. da « Rivista Geografica Italiana », a. 1919.

— *L'ambiente geografico della Dalmazia*. Estr. da « Studi Geografici sulle terre redente e nuovi territori », vol. IX, « La Dalmazia », 1943. (Consiglio Nazionale delle Ricerche – Pubblicazioni del Comitato per la Geografia, s. 3ª).

TONIOLO Antonio Renato. — *Die bedeutendsten Meliorationsarbeiten der letzten Zeit in Italien und deren geographische Bedingungen*. (Zusanumenfassung). S. n. t.

— *Breve Guida Geografica dell'escursione nel Trentino e nell'Alto Adige*. Trento, Tip. Nazionale, 1919. Pp. 62, in–16°. (Reale Società Geografica Italiana – I Convegno estivo).

— *Crisi della geografia?* Estr. da « Scientia », s. 4ª, a. XXXVII, 1943, febbraio–marzo–aprile.

— *Escursioni geografiche nella Venezia Giulia durante il IX Congresso della Società per il Progresso delle Scienze in Trieste* (Settembre 1921). Estr. da « Rivista Geografica Italiana », a. XXIX, 1922.

— *Fattori geografici e storici dell'insediamento umano nella Venezia Tridentina*. Estr. da da « Schola » Boll. del R. Provveditorato agli Studi per la Venezia Tridentina, 1924–1925, n.1.

— *La geografia politica della Regione Tirolese*. Estr. da « Schola », Boll. del R. Provveditorato agli Studi della Venezia Tridentina. 1924, n. 3-4.

— *La geografia prende quota*. A proposito dei nuovi programmi di geografia per le scuole medie di secondo grado. Estr. da « Annali della Istruzione Media », a. VI, 1931, quad. 1.

— *Le grandi bonifiche del Ravennate e del Ferrarese*. Estr. da « L'Universo », a. VIII, 1927, n. 2.

— *L'idrografia*. Estr. da « Terra e Nazione », vol. « Italia ».

— *Introduzione allo studio dei progressi della geografia in Italia, negli ultimi cento anni*. Estr. da « Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839–1939 ». (Società Italiana per il Progresso delle Scienze).

— *L'italianità del paesaggio geografico della Corsica*. Riassunto delle lezioni tenuto nell'Ist. di Geografia della Regia Università di Bologna nei giorni 15 e 27 febbraio e 6 e 25 marzo 1942. Bologna. Poligrafici « Il Resto del Carlino », 1942. Pp. 28, in–8°, con tavv.

— *I limiti altimetrici nella Val Visdende* (*Comelico*). Estr. da « Memorie geografiche », pubblicate come supplemento alla « Rivista Geografica Italiana », 1911, n. 16. (Studi sopra i limiti altimetrici, n. 3).

TONIOLO Antonio Renato. — *I moderni concetti di geografia sociale e politica secondo J. Brunhes e C. Vallaux*. Estr. da « L'Universo », a. IV, 1923, n. 3.

— *La nuova Austria e la nuova Italia*. Estr. da « Rivista di Politica e di Letteratura », a. II, 1926, quad. 3.

— *La nuova terra italiana dell'Alto Adige*. Estr. da « Archivio per l'Alto Adige », a. XIV, 1919.

— *I nuovi indirizzi della Geografia e il X Congresso Geografico Italiano*. Estr. da « Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali », s. 2ª, vol. II.

— *Il nuovo retroterra commerciale di Venezia in relazione a quelli di Genova e Trieste*. Estr. da « Atti dell'VIII Congresso Geografico Italiano », vol. II, 1921.

— *Per lo studio delle variazioni dei litorali sabbiosi del bacino Mediterraneo*. Estr. da « Report of the International Geographical Congress », 1928, luglio.

Politica e geografia. Estr. da « Giornale di Politica e di Letteratura, », a. VI, 1930, quad. 4.

– *Saggio di un Atlante del Paesaggio Italiano*. Nota pubblicata in occasione del Congresso Geografico Internazionale, Cambridge 1928. Milano, Arti Grafiche Calamandrei, 1928. Pp 19, in–4°, con tavv. (Comitato Geografico Nazionale Italiano - Touring Club Italiano).

— *La seconda escursione geografica interuniversitaria al Carsio e all'Istria*. Estr. da « Rivista Geografica Italiana », a. XXXIV, 1927.

— *Lo spopolamento montano nella Venezia Tridentina*. Estr. da « Bollettino della Reale Società Geografica Italiana», s. 6ª, vol.VIII, 1931.

– *L'unità economica e politica del Mediterraneo*. Estr. da « Geopolitica », 1941, n. 3.

— *La unità linguistica e nazionale del Principato di Trento*. Estr. da « Rivista Geografica Italiana », a. XXX, 1923.

— *Variation des littoraux sablonneux dans le bassin Méditerranéen*. Estr. da «Rapport de la Commission des Terrasses Pliocènes et Pléistocènes », II, 1930.

– *Le variazioni storiche del litorale toscano tra l'Arno e la Magra*. Estr. da « Atti del X Congresso Geografico Italiano », 1927.

TONIOLO Antonio Renato e GIUSTI Ugo. — *Lo spopolamento montano nelle Alpi Liguri–Piemontesi*. Note introduttive e riassuntive. Estr. da « Studi e monografie dell'Istituto Nazionale di Economia Agraria », n. 16, I.

— *Lo spopolamento montano nell'Appennino Emiliano–Tosco–Romagnolo*. Note introduttive e riassuntive. Estr. da « Studi e Monografie dell'Istituto Nazionale di Economia Agraria », n. 16, IV.

TRAVASSOS Harold. — *Contribução ao Estudo da Família « Characidae » Gill, 1893. V – Redescrição do Genótipo de « Characidium » Reinhardt, 1866, com uma Análise de Literatura e Descrição de « Characidium lagosantensis », n. sp.* (Actionopterygii - Ostareophysi). Estr. da « Summa Brasiliensis Biologiae », vol. I, a. II, 1947, fasc. 14.

— *Contribuições para o conhecimento da Familia « Characidae » Gill, 1893 III*. Estr. da « Summa Brasiliensis Biologiae », vol. I, a. I, 1946, fasc. 9.

— *Nota sôbre o genótipo de « Mabuya » Fitzinger, 1826*. Estr. da «Boletim do Museu Nacional » di Rio de Janeiro, n. s., 1945, n. 37.

VERCELLI Francesco. — *Giovanni Agamennone nel suo 90° compleanno*. Estr. da « Geofisica pura e applicata », vol. XII, 1948, fasc. 3–4.

WHITNALL A. B. M. — Vedi: Omer-Cooper J., Whitnall A. B. M. and Fenwick E. M.

WHITNALL A. B. M. and BRADFORD B. — *An arsenicresistant tick and its control with gammexane dips*. Estr. da « Bulletin of Entomological Research », vol. XXXVIII, 1947, pt. 2.

WHITTICK R. J. — *Scorpiones*. [*Arachnida*]. Estr. da « Bulletin of the Society Fouad 1er of Entomology », vol. XXXI, 1947. (Results of the Armstrong College Expedition to Siwa Oasis (Libyan Desert), 1935).

ZANGHERI Pietro. — *Il patrimonio naturalistico della Romagna*. (Riassunto schematico). Estr. da « La pié », 1948, nn. 3–4, 5–6.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 dicembre 1948

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Sulle* V_n *contenenti più di* $\infty^{n-k} S_k$ (*). Nota II (**) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

7. Una risposta parziale ai problemi *a*) e *b*) della Nota I (n. 1), può dedursi dal lemma seguente.

Ogni sistema continuo di S_k *giacente in* S_n $(k \geqq 0)$, *che abbia dimensione*

$$d \geqq \delta(n, k) - k = \delta(n-1, k) + 1, \tag{6}$$

invade necessariamente tutto l' S_n.

Il risultato enunciato è ovvio se $k = 0$, essendo allora $d \geqq n$ in forza delle (1), (6), epperciò $d = n$. Supponiamo dunque

$$k \geqq 1,$$

ed ammettiamo per assurdo che i suddetti S_k ricoprano una V_m subordinata di S_n, di dimensione

$$m \leqq n-1. \tag{7}$$

Consideriamo l'insieme di quelli fra tali S_k che contengono un punto P genericamente fissato di V_m. In virtù delle (1), (6), (7), esso ha dimensione

$$d - (m-k) \geqq (k+1)(n-k-1) + 1 - (n-k-1) =$$
$$= k(n-k-1) + 1 \geqq k(m-k) + 1 = \delta(m-1, k-1) + 1;$$

ed è chiaro che i suoi S_k stanno tutti nell'S_m tangente in P a V_m. Segando con un generico iperpiano di S_n, si ottengono almeno $\infty^{\delta(m-1, k-1)+1}$ S_{k-1}

(*) Continuazione della Nota I, apparsa in questo volume dei «Rendiconti», pp. 193-197.

(**) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1948.

giacenti in un S_{m-1}; ma ciò non può essere, la totalità degli S_{k-1} di S_{m-1} avendo dimensione $\delta(m-1, k-1)$, e questa contraddizione prova l'asserto.

8. Possiamo ora dimostrare che

Una V_n *invasa da* ∞^c S_k, *ove*.

$$k \geqq 1 \quad , \quad c \geqq \delta(n, k) - k + 1 ,$$

è necessariamente uno spazio lineare, S_n, *sicchè per essa risulta* $d(n, k) = \delta(n, k)$.

Osserviamo all'uopo che l'insieme di quelli fra i suddetti S_k che contengono un punto P genericamente fissato di V_n, ha dimensione

$$c - (n-k) \geqq \delta(n, k) - k + 1 - (n-k) = k(n-k-1) + 1 = \\ = \delta(n-2, k-1) + 1 ,$$

e consiste di S_k giacenti nell'S_n tangente in P a V_n. Segando con un generico iperpiano dell'S_p ambiente, si ottiene un insieme di S_{k-1} – situati in un S_{n-1} – avente ancora quella dimensione. Pertanto – l'insieme sezione invade tutto l'S_{n-1} (n. 7), sicchè l'insieme inizialmente considerato ricopre lo spazio $PS_{n-1} = S_n$, e si ha dunque $V_n = S_n$.

9. Dal n. 8 segue immediatamente come corollario che:

Se $k \geqq 1$, *il carattere* $d(n, k)$ – *introdotto nel n.* 1 – *ammette come massimo il valore* (1), *raggiunto soltanto dagli* S_n. *Inoltre, se* $k > 1$, *si hanno per* $d(n, k)$ *i seguenti* $k-1$ *valori lacunari consecutivi*

$$\delta(n, k) - k + 1 , \delta(n, k) - k + 2 , \cdots , \delta(n, k) - 1 .$$

Dalla prima parte di questo corollario si deduce poi subito il seguente affinamento del lemma del n. 7.

Un sistema continuo di S_k *giacenti in* S_n $(k \geqq 1)$, *che abbia dimensione*

$$c = \delta(n-1, k) ,$$

o invade tutto l'S_n, *oppure è formato dalla totalità degli* S_k *di un* S_{n-1}.

Osservato poi che – per ogni $i \geqq 2$ – è

$$\delta(n-1, k) - k + 1 > \delta(n-i, k) ,$$

e tenuto anche conto del n. 8, si ricava quindi la seguente estensione dell'ultimo risultato:

Un sistema continuo di S_k *giacenti in* S_n $(k \geqq 1)$, *che abbia dimensione*

$$c \geqq \delta(n-1, k) - k + 1 ,$$

invade sia l'S_n, *sia un* S_{n-1} *subordinato di* S_n.

10. A complemento del corollario dato al principio del n. 9, dimostriamo che:

Se $k > 1$, *una* V_n *avente*

$$d(n, k) \geqq \delta(n, k) - 2k + 2$$

è luogo di $\infty^1 S_{n-1}$ *o, in particolare, è un* S_n.

All'uopo basta osservare che la totalità degli S_k di V_n contenenti un punto P generico di V_n, sta nell'S_n tangente in P a V_n ed ha dimensione

$$d(n, k) - (n - k) \geqq \delta(n, k) - n - k + 2 =$$
$$= \delta(n - 2, k - 1) - (k - 1) + 1.$$

Applicando il risultato finale del n. 9 ad una sezione iperpiana generica della totalità suddetta, si vede che quella totalità invade l'S_n od un S_{n-1} subordinato di S_n; è quindi chiaro che nel primo caso si ha $V_n = S_n$, mentre nel secondo V_n è luogo di $\infty^1 S_{n-1}$.

11. Per un S_n e per una V_n luogo di $\infty^1 S_{n-1}$ risulta rispettivamente $d = \delta(n, k)$, $d \geqq \delta(n, k) - k$ (nn. 1, 2); in forza del n. 10 ne discende che:

Se $k > 2$, *il carattere* $d(n, k)$ *definito nel n. 1 ammette i seguenti* $k - 2$ *valori lacunari consecutivi (distinti da quelli considerati nel n. 9)*

$$\delta(n, k) - 2k + 2, \delta(n, k) - 2k + 3, \cdots, \delta(n, k) - k - 1.$$

Se $k \geqq 2$, *ogni* V_n *avente* $d = \delta - k$ *risulta luogo di* $\infty^1 S_{n-1}$.

12. Ci resta ora soltanto più da trattare i problemi *a*), *b*) del n. 1 nell'ipotesi che sia $d(n, k) \leq \delta(n, k) - 2k + 1$. Incominciamo col dimostrare che

Le sole V_n *per cui sia* $d > n - k$ *e valga la*

$$d = d(n, k) = \delta(n, k) - 2k + 1 \tag{8}$$

sono le quadriche V_n^2 *specializzate h volte, ove*

$$h \leq n - 2 \quad , \quad h \leq n - 3 \quad , \quad h = n - 3 \quad od \quad n - 4$$

secondochè $k = 1$, $k = 2$, $k \geqq 3$, *e – per* $k = 1$ *– le* V_n *luoghi di* $\infty^1 S_{n-1}$.

Osserviamo dapprima che, in forza dei nn. 2, 3, 4, per le V_n dianzi enumerate vale proprio la (8). Reciprocamente, riferiamoci ad una V_n per cui valga la (8), e consideriamo la totalità degli S_k di V_n che contengono un punto P generico di V_n: essa sta nell'S_n tangente in P a V_n e, in forza delle (1), (8), ha dimensione

$$c = d - (n - k) = \delta(n - 2, k - 1) - k + 1. \tag{9}$$

Trattiamo successivamente i tre casi $k = 1$, $k = 2$, $k \geqq 3$.

1°. – Per $k = 1$, la (8) e la $d > n - k$ implicano $n \geqq 3$. Se $k = 1$, $n = 3$, dalla (9) risulta $c = 1$; allora, o le ∞^1 rette di $V_n = V_3$ uscenti da P stanno in un piano, sicchè V_n è una V_3 luogo di $\infty^1 S_2$, oppure un iperpiano condotto genericamente per due generiche di quelle rette sega V_3 secondo una superficie non piana avente un punto semplice in P, e tale che

su essa vi sono (almeno) due rette – prossime alle suddette due contenenti un suo punto comunque assegnato nell'intorno di P. In quest'ultima ipotesi la sezione considerata risulta una quadrica V_2^2 non specializzata di S_3; ne consegue agevolmente che anche V_3 è algebrica, ed è quindi una V_3^2 specializzata al più una volta (5). Se poi $k = 1$, $n > 3$, la (8) porge $d(n, 1) = 2n - 3$, ed il risultato da stabilire si ottiene subito per induzione rispetto ad n, dopo aver osservato che la sezione iperpiana generica di V_n è di conseguenza una V_{n-1} avente $d(n-1, 1) = 2n - 5$.

2°. – Se $k = 2$, dev'essere $n \geq 4$ affinchè valgano la (8) e la $d > n - k$. Incominciamo col supporre $k = 2$, $n = 4$, e consideriamo la V_3 sezione iperpiana generica di $V_n = V_4$; poichè, in forza della (8), V_4 contiene ∞^3 piani, così V_3 conterrà ∞^3 rette e quindi (in virtù di quanto si è ottenuto in 1°) sarà un luogo di ∞^1 S_2 oppure una V_3^2 specializzata al più una volta. Ne consegue che V_4 è od un luogo di ∞^1 S_3 oppure una V_4^2 specializzata al più due volte: ma nel primo caso in virtù del n. 2 sarebbe $d \geq \delta(n, 2) - 2$, in contraddizione colla (8), sicchè resta soltanto l'ultima alternativa in cui anzi $V_n = V_4^2$ – non potendo contenere ∞^1 S_3 – dev'essere al più specializzata una sola volta. Se poi $k = 2$, $n \geq 5$, la (8) porge $d(n, 2) = 3n - 9$, ed il risultato da stabilire si ottiene subito per induzione rispetto ad n, dopo aver osservato che la sezione iperpiana generica di V_n è di conseguenza una V_{n-1} avente $d(n-1, 2) = 3n - 12$.

3°. – Se $k \geq 3$, la (8) e la $d > n - k$ implicano $n \geq 5$ e la (9) fornisce

$$c \geq \delta(n-2, k-1) - 2(k-1) + 2. \tag{10}$$

Segando gli ∞^c S_k di V_n per P con un iperpiano generico si ottengono ∞^c S_{k-1} di S_{n-1}, i quali non possono invadere S_{n-1}, poichè altrimenti sarebbe $V_n = S_n$ e non varrebbe la (8). Sia V_m ($m \leq n - 2$) la varietà di S_{n-1} ricoperta da questi ∞^c S_{k-1}: non può essere $m \leq n - 3$, in quanto allora la (9) fornirebbe $c > \delta(m, k-1)$ contrariamente al primo risultato del n. 9, ed è quindi $m = n - 2$. Rammentando la (10) ed il n. 10, si vede così che $V_m = V_{n-2}$ è un S_{n-2} od un luogo di ∞^1 S_{n-3}, onde su V_n vi è un S_{n-1} o vi sono ∞^1 S_{n-2} uscenti dal generico punto P. Di queste due alternative la prima va esclusa, in quanto essa porterebbe ad una V_n luogo di ∞^1 S_{n-1}, per la quale la (8) non potrebbe sussistere (n. 2); resta dunque soltanto la seconda, implicante che su V_n vi siano ∞^3 S_{n-2}. Segando V_n con un generico S_{p-n+3} dell'S_p ambiente, si ha pertanto una V_3 che contiene ∞^3 rette senza essere luogo di ∞^1 piani. In virtù di quanto si è ottenuto in 1°, V_3 dev'essere una V_3^2 non specializzata, sicchè V_n – contenendo degli S_{n-2}, ma non essendo luogo di ∞^1 S_{n-1} – risulta una V_n^2 specializzata $n-3$ od $n-4$ volte.

(5) Il risultato ora stabilito per $k = 1$, $n = 3$ trovasi già in F. SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e ai suoi punti tripli apparenti*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », *15* (1901), 33-51, n. 10; l'argomentazione di questo Autore non differisce sostanzialmente dalla nostra, sebbene egli si riferisca soltanto a V_3 **algebriche**.

13. Proseguendo nel nostro ordine d'idee, avremmo ora da classificare le V_n per le quali si abbia

$$d(n,k) = \delta(n,k) - 2k. \tag{11}$$

Senza approfondire questo studio, osserviamo che alla (11) soddisfanno in ogni caso le generiche varietà luoghi di ∞^2 S_{n-2} (n. 2); inoltre, nell'ipotesi che sia $k = 1$, $n \geq 4$, lo stesso può dirsi delle varietà luoghi di ∞^1 quadriche V^2_{n-1} specializzate $n-4$ volte (n. 5), ed anche, se $k = 1$ ed $n = 4$, delle V^3_4 sezioni con S_7 della grassmanniana di indici 4, 1 (n. 6). Tanto basta già per asserire che il suddetto valore di d non è mai lacunare.

Aggiungasi che, i *tre tipi di* V_4 ottenibili in particolare da quanto sopra per $n = 4$, $k = 1$ dànno *tutte le* V_4 *appartenenti ad uno spazio di dimensione* ≥ 7 soddisfacenti alla (11), ossia *contenenti* ∞^4 *rette* [6]. Va rilevato che in questo enunciato la condizione che V_4 appartenga ad uno spazio di dimensione ≥ 7 non può venir omessa, in quanto – come si dimostra agevolmente – tanto le V^3_4 generali di S_5, quanto le V^4_4 basi di un fascio generico di quadriche di S_6 e le proiezioni di queste ultime su di un S_5, contengono ∞^4 rette; resta da vedersi se queste varietà e le proiezioni di quelle dianzi considerate siano o meno le sole V_4 di S_5 od S_6 su cui giacciano ∞^4 rette.

14. Dimostreremo da ultimo che *il valore*

$$d(n,k) = \delta(n,k) - 2k - 1 \tag{12}$$

risulta lacunare per ogni scelta di k *e di* $n \geq k+3$, *colle sole eccezioni* $k = 1, 2, 4$.

Osserviamo anzitutto che la condizione $n \geq k+3$, in base alle (1), (12), non fa che esprimere la $d(n,k) \geq n-k$. Il valore (12) non è lacunare per $k = 1, 2$, in forza rispettivamente dei nn. 2, 5; esso del pari non lo è per $k = 4$ in quanto, in virtù del n. 4, per $k = 4$ il carattere (12) compete alle V^2_n specializzate $n-5$ od $n-6$ volte. Dobbiamo dunque soltanto più dimostrare che il valore (12) risulta lacunare per $k = 3$ e per $k \geq 5$.

All'uopo rileviamo che, se vi è una V_n per cui valga la (12) con $k \geq 3$, la totalità dei suoi S_k contenenti un suo punto P generico ha la dimensione

$$c = d(n,k) - (n-k) = k(n-k-2) - 1 = \delta(n-3, k-1) - 1. \tag{13}$$

Considerando una generica sezione iperpiana di quella totalità e rammentando il primo enunciato del n. 9, si deduce che i suddetti ∞^c S_k invadono una V_m di S_n avente dimensione $m > n-2$, ossia una V_{n-1} o tutto l'S_n tangente in P a V_n; l'ultima alternativa resta però esclusa, in quanto implicherebbe $V_n = S_n$ e quindi $d(n,k) = \delta(n,k)$, in contrasto colla (12).

(6) Questo risultato devesi a E. G. TOGLIATTI, *Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno* ∞^k *rette*, « Atti Acc. Sc. Torino », 57 (1921-1922), 63-74, nn. 6, 7; per una dimostrazione più semplice cfr. una Nota di E. BOMPIANI, collo stesso titolo della suddetta, in questi « Rendiconti » (8) 1 (1946), 1001-1005.

Supposto dapprima per assurdo che esista una V_n soddisfacente alla (12) con $k \geqq 5$, per essa in virtù della (13) sussiste la limitazione

$$c \geqq \delta(n-2, k-1) - 2(k-1) + 2.$$

Possiamo dunque applicare il teorema del n. 10 alla sezione iperpiana generica della $V_m = V_{n-1}$ associata a V_n come nel precedente capoverso, e dedurne che a V_{n-1} appartengono almeno ∞^1 S_{n-2}. Ne consegue che V_n contiene almeno ∞^2 S_{n-2}, sicchè (n. 2)

$$d(n, k) \geqq \delta(n, k) - 2k.$$

Questo risultato contraddice la (12), ciò che prova la non esistenza della suddetta V_n.

Ammettiamo in secondo luogo che vi sia una V_n soddisfacente alla (12) con $k = 3$; in virtù della (13), sarà dunque per essa.

$$c = 3n - 16. \tag{14}$$

Possiamo sempre ridurci ad una V_n immersa in un S_{n+1}, potendo sostituirsi V_n con una sua proiezione generica su di un S_{n+1}. Allora la sezione della V_n coll'S_n ad essa tangente nel generico punto P ha in P molteplicità non superiore a 2, poichè altrimenti ogni tangente di V_n avrebbe incontro almeno tripunto nel relativo punto di contatto, sicchè ogni sezione piana di V_n sarebbe rettilinea e risulterebbe $V_n = S_n$. Ne consegue che il cono $V_m = V_{n-1}$, dianzi considerato, nel caso attuale deve far parte della suddetta sezione ed essere algebrico (7) d'ordine $\leqq 2$: dunque V_{n-1}, non potendo in forza della (12) essere uno spazio lineare, sarà un cono quadrico di vertice P, ciò che implica (nn. 3, 4) $c \geqq 3n - 15$. Questa contraddizione colla (14) dimostra l'assurdità dell'ipotesi fatta in principio del capoverso, onde il teorema enunciato rimane compiutamente stabilito.

Geometria. — *Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione.* Nota I (*) del Corrisp. Guido Ascoli.

In una sua recente Nota (1) F. Tricomi si è occupato di una formula data da Steiner per calcolare il volume compreso tra un pezzo di una superficie Σ_1, il pezzo corrispondente di una superficie parallela Σ_2, abbastanza vicina a Σ_1, e le normali nei punti di contorno. Oltre ad assegnare in modo preciso

(7) Ciò risulta subito analiticamente, rappresentando V_n – com'è lecito in base al n. 1 – coll'uguagliare una delle coordinate di punto dell'S_{n-1} ad una funzione delle altre coordinate avente continue tutte le derivate dei primi due ordini.

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) F. Tricomi, *Sul volume compreso tra due superficie parallele*. (« Atti Accad. Scienze Torino », vol. 81–82, p. 10, 1945–47).

le condizioni di validità della formula, il Tricomi ha ricavato per lo stesso volume l'elegante espressione

$$(a) \qquad V = hA + \frac{h^3}{12}\int_{\Sigma} K d\Sigma = hA + \frac{1}{12} h^3 A^* \qquad \Sigma$$

in cui compaiono ora, oltre l'altezza h dello strato, elementi relativi alla superficie mediana Σ dello strato stesso: l'area A, la curvatura totale K, l'area A^* (con segno) dell'immagine sferica.

La forma della (a) suggerisce un'interessante osservazione; e cioè che essendo A e K (e quindi anche A^*) invarianti per ogni flessione della superficie, lo stesso avviene per il volume V, supponendo, s'intende, che ogni elemento di Σ trasporti con sè nella flessione, in collegamento rigido, la propria normale. E ciò suggerisce a sua volta la questione: *quale sia la più generale congruenza di rette, avente* Σ *come superficie di partenza, tale che, portando sopra un suo raggio generico, uscente da un punto* P *di* Σ, *i segmenti* $PQ_1 = PQ_2 = h/2$, *il volume riempito dai segmenti* Q_1Q_2 *risulti, per ogni h abbastanza piccolo e per ogni pezzo di* Σ, *invariante per ogni flessione di* Σ.

Con un facile calcolo il problema si trasforma nell'altro, egualmente espressivo: *quali siano le congruenze, aventi* Σ *come superficie di partenza, tali che ogni flessione di* Σ *induca sulla immagine sferica della congruenza una trasformazione equivalente* [proprietà $(\mathfrak{E})$].

Sotto l'una o l'altra forma, la questione mi è sembrata abbastanza interessante da meritare una breve ricerca; e questa è stata assai fortunata, avendomi consentito di ridurre il problema a quello delle deformazioni infinitesime di una superficie in sè attraverso il semplice risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una congruenza avente Σ *come superficie di partenza goda della proprietà* $(\mathfrak{E})$ *è che il versore del raggio della congruenza uscente da un punto* P *di* Σ *si proietti sul piano tangente in* P *nel vettore indicatore di una deformazione infinitesima di* Σ *in sè.*

Donde la conseguenza che per una superficie generica Σ l'unica congruenza che ammetta la proprietà $(\mathfrak{E})$ è quella delle normali a Σ; mentre altri casi, facilmente caratterizzabili, si hanno solo per le deformate delle superficie di rotazione (∞^1 congruenze) e in particolare per le superficie a curvatura costante (∞^3 congruenze).

All'esposizione dei risultati indicati e di alcune osservazioni complementari è dedicata la presente Nota.

1. La superficie Σ sia riferita ad un arbitrario sistema di coordinate curvilinee (u, v) e il raggio della congruenza che passa per il punto generico P di Σ, e che supponiamo non giaccia nel piano tangente, sia orientato in modo da formare angolo acuto con la normale positiva a Σ in P. Detto $\mathbf{T}$ il relativo versore, $\boldsymbol{n}$ quello della normale, sarà dunque:

$$P_u \wedge P_v \times \mathbf{T} > 0 \quad , \quad \mathbf{T} \times \boldsymbol{n} > 0.$$

Posto allora:

$$Q(u, v, w) = P(u, v) + w\,\mathbf{T}(u, v)$$

al variare di w da $-h/2$ ad $h/2$ il punto Q descriverà il segmento $Q_1 Q_2$ accennato nell'introduzione; e per il volume generato da $Q_1 Q_2$ al variare di P in un pezzo A di Σ si avrà la formula:

$$V = \iint_A du\,dv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_u \wedge Q_v \times Q_w\,dw = \iint_A du\,dv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (P_u + w\mathbf{T}_u) \wedge (P_v + w\mathbf{T}_v) \times \mathbf{T}\,dw .$$

Sviluppando si ottiene subito

$$(1) \qquad V = h \iint_A P_u \wedge P_v \times \mathbf{T}\,du\,dv + \frac{h^3}{12} \iint_A \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T}\,du\,dv$$

che per $\mathbf{T} = \boldsymbol{n}$ si riduce a quella data da Tricomi, e che consente anche una analoga interpretazione geometrica.

Si ha difatti:

$$P_u \wedge P_v\,du\,dv = dA \cdot \boldsymbol{n} ,$$

e, posto poi

$$S = O + \mathbf{T} ,$$

con che S descrive l'immagine sferica della congruenza, si ha pure:

$$\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T}\,du\,dv = S_u \wedge S_v \times (S - O)\,du\,dv = dA^* ,$$

elemento d'area sferica corrispondente all'elemento dA di Σ; onde la (1) può scriversi:

$$(2) \qquad V = h \int_A \mathbf{T} \times \boldsymbol{n} \cdot dA + \frac{h^3}{12} A^* ,$$

dove il primo termine corrisponde alla valutazione del solido elementare come un cilindro obliquo, mentre il secondo la corregge tenendo conto della « convergenza » o « divergenza » delle sue generatrici.

Si osserverà ora che se la Σ si deforma trascinando con sè, nel modo usuale, la congruenza, l'elemento del primo integrale non varia; onde, per l'invarianza di V, per ogni h, dovrà rimanere invariata A^*, come si era annunziato. E ciò avverrà per ogni pezzo di Σ quando rimanga invariata la quantità

$$\omega = \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T}.$$

Posto il problema in questi termini, la restrizione che il raggio generico della congruenza non sia tangente a Σ potrà anche togliersi, domandandosi cioè tutti i casi in cui ω risulti invariante di flessione. E si potrebbe anche supporre $\mathbf{T}$ qualsiasi, cioè non necessariamente unitario, purchè non nullo, perchè si vede subito che se λ è una qualunque funzione numerica di P si ha:

$$(\lambda \mathbf{T})_u \wedge (\lambda \mathbf{T})_v \times \mathbf{T} = \lambda^2 \cdot \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T}.$$

2. Quando nella costruzione dell'espressione ω ci si valga di un riferimento generico gli sviluppi di calcolo richiesti dal nostro problema appaiono a prima vista alquanto laboriosi; onde si può esser tentati di ricorrere a riferimenti speciali, legati alla congruenza stessa che si tratta di trovare. Effettivamente ciò conduce con rapidità allo scopo, come sarà accennato al n. 5, ma solo a prezzo di distinzioni artificiose e rinunciando a porre direttamente in luce l'interessante collegamento di cui si è fatto parola nell'introduzione. Ci atterremo perciò al riferimento generico, superando le complicazioni formali mediante l'uso di elementari nozioni di Calcolo tensoriale.

Notiamo per questo, anzitutto, che allo studio dell'espressione ω si può sostituire quello dell'altra

$$\Omega = \omega \cdot \mathrm{P}_u \wedge \mathrm{P}_v \times \boldsymbol{n} = \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T} \cdot \mathrm{P}_u \wedge \mathrm{P}_v \times \boldsymbol{n} ,$$

il fattore introdotto ($= \sqrt{EG - F^2}$, o $\sqrt{a}$, secondo le notazioni classiche) essendo un invariante di flessione, sempre diverso da zero. E questa a sua volta si può scrivere, giusta una nota formula di calcolo vettoriale,

$$\Omega = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_u & \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_v & \mathbf{T}_u \times \boldsymbol{n} \\ \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_u & \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_v & \mathbf{T}_v \times \boldsymbol{n} \\ \mathbf{T} \times \mathrm{P}_u & \mathbf{T} \times \mathrm{P}_v & \mathbf{T} \times \boldsymbol{n} \end{vmatrix} .$$

In secondo luogo immagineremo $\mathbf{T}$, supposto qui unitario, decomposto in una parte normale $z\boldsymbol{n}$ e in una tangenziale $\boldsymbol{t}$ sicchè sia:

$$\mathbf{T} = z\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t} \quad , \quad \mathbf{T} \times \boldsymbol{n} = z \quad , \quad \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad , \quad t^2 + z^2 = 1 .$$

Introdurremo finalmente le notazioni tensoriali ponendo

$$u = x^1 \quad , \quad v = x^2 \quad , \quad \mathrm{P}_u = \mathrm{P}_{/1} \quad , \quad \mathrm{P}_v = \mathrm{P}_{/2}$$

e chiamando t_1 , t_2 le componenti covarianti di $\boldsymbol{t}$, t^1 , t^2 le contravarianti; le derivazioni covarianti si intenderanno fatte rispetto al tensore fondametale della superficie. Ci occorreranno nel seguito anche le quantità

$$b_{rs} = - \boldsymbol{n}_{/r} \times \mathrm{P}_{/s}$$

(D, D', D'' nelle notazioni di Gauss) che ci permetteranno di rappresentare con $- b_{r1}$, $- b_{r2}$ le componenti covarianti del derivato $\boldsymbol{n}_{,r}$.

Dopo ciò, per le quantità che compariscono nell'espressione di Ω si ha:

$$\mathbf{T} \times \mathrm{P}_{/s} = \boldsymbol{t} \times \mathrm{P}_{,s} = t_s \quad , \quad \mathbf{T} \times \boldsymbol{n} = z ,$$

$$\mathbf{T}_{/r} \times \mathrm{P}_{/s} = (z_{/r}\, \boldsymbol{n} + z\boldsymbol{n}_{/r} + \boldsymbol{t}_{,r}) \times \mathrm{P}_{/s} = t_{s/r} - z\, b_{rs}$$

$$\mathbf{T}_{/r} \times \boldsymbol{n} = (z_{/r}\, \boldsymbol{n} + z\boldsymbol{n}_{,r} + \boldsymbol{t}_{,r}) \times \boldsymbol{n} = z_{/r} - \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}_{/r} = z_{/r} + t^1 b_{r1} + t^2 b_{r2} ,$$

e per Ω stesso:

$$(3) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} t_{1/1} - z b_{11} & t_{2/1} - z b_{12} & z_{/1} + t^1 b_{11} + t^2 b_{12} \\ t_{1/2} - z b_{21} & t_{2/2} - z b_{22} & z_{/2} + t^1 b_{21} + t^2 b_{22} \\ t_1 & t_2 & z \end{vmatrix} ,$$

dove tutti i simboli usati sono invarianti di flessione, salvo i coefficienti b_{rs} della seconda forma fondamentale di Σ.

È chiaro che Ω è un polinomio di 2° grado nei b_{rs}, nel quale la parte quadratica è data da:

$$\begin{vmatrix} -\zeta b_{11} & -\zeta b_{12} & t^1 b_{11} + t^2 b_{12} \\ -\zeta b_{21} & -\zeta b_{22} & t^1 b_{21} + t^2 b_{22} \\ t_1 & t_2 & \zeta \end{vmatrix} = \zeta^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & t^1 b_{11} + t^2 b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & t^1 b_{21} + t^2 b_{22} \\ -\frac{t_1}{\zeta} & -\frac{t_2}{\zeta} & \zeta \end{vmatrix}$$

che si riduce facilmente a

$$\zeta \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} (\zeta^2 + t_1 t^1 + t_2 t^2) = \zeta (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)(\zeta^2 + \boldsymbol{t}^2) = \zeta (b_{11} b_{22} - b_{12}^2);$$

e per la formula di Gauss questo è un invariante di flessione.

Basterà dunque occuparci dei termini di primo grado. Ora, posto

$$\Omega = \zeta (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) + \alpha b_{11} + \beta b_{12} + \gamma b_{22} + \delta \tag{4}$$

derivando i due membri rispetto a b_{11} e facendo poi nulli tutti i b_{rs} si ha subito:

$$\alpha = \begin{vmatrix} -\zeta & 0 & t \\ t_{1/2} & t_{2/2} & \zeta_{/2} \\ t_1 & t_2 & \zeta \end{vmatrix} = -t_{2/2} (\zeta^2 + t_1 t^1) + t_2 (\zeta \zeta_{/2} + t^1 t_{1/2}).$$

Ma

$$\zeta^2 + t_1 t^1 + t_2 t^2 = \zeta^2 + \boldsymbol{t}^2 = 1$$

$$\zeta \zeta_{/2} + t^1 \cdot t_{1/2} + t^2 t_{2/2} = \zeta \zeta_{/2} + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_{/2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\zeta^2 + \boldsymbol{t}^2) = 0,$$

quindi

$$\alpha = -t_{2/2} (1 - t_2 t^2) - t_2 t^2 t_{2/2} = -t_{2/2}.$$

Analogamente:

$$\gamma = -t_{1/1}.$$

In modo simile si procede per calcolare β: basta derivare la (4) rispetto a b_{12} e porre poi i b_{rs} tutti nulli. Risulta per β la somma di due determinanti i cui valori sono $t_{1/2}$ e $t_{2/1}$; è dunque:

$$\beta = t_{1/2} + t_{2/1}$$

Concludendo, per la parte lineare di Ω si ha l'espressione:

$$\Omega_1 = -t_{2,2} b_{11} + (t_{1/2} + t_{2/1}) b_{12} - t_{1/1} b_{22}. \tag{5}$$

Ora è facile vedere che affinchè Ω_1 sia un invariante di flessione dovrà essere:

$$t_{1,1} = 0 \quad , \quad t_{1,2} + t_{2,1} = 0 \quad , \quad t_{2,2} = 0. \tag{6}$$

E difatti è ben noto che i b_{rs} sono legati agli elementi del tensore fondamentale di Σ dalla relazione in termini finiti

$$\frac{b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2} = K \tag{7}$$

di Gauss e dalle relazioni differenziali

$$b_{11/2} = b_{12/1} \quad , \quad b_{22/1} = b_{12/2}$$

di Codazzi e Mainardi; e che ad ogni scelta delle b_{rs} che soddisfi a queste condizioni corrisponde una e – a meno di un movimento – una sola superficie applicabile su Σ. Tale sistema di condizioni si può ridurre a due equazioni alle derivate parziali, del 1° ordine, in due funzioni incognite, le quali, per noti teoremi di esistenza, ammettono certamente soluzioni che fanno assumere alle incognite, *in un punto determinato*, valori arbitrariamente scelti. Se ne conclude che Ω_1 deve conservare lo stesso valore per ogni scelta delle b_{rs} soddisfacente alla (7). Ma poichè la quadrica (7) è irriducibile, si vede subito che ciò è assurdo ove Ω_1 non risulti indipendente dalle b_{rs}; e ciò conduce alle (6).

L'interpretazione delle (6) è molto semplice: esse esprimono infatti che la forma $t_{i/k}\,dx^i\,dx^k$ è identicamente nulla, ciò che traduce l'equazione vettoriale

$$d\boldsymbol{t} \times d\mathrm{P} = 0$$

caratteristica del vettore $\boldsymbol{t}$ indicatore di una deformazione infinitesima di Σ. E poichè $\boldsymbol{t}$ è tangente a Σ, si conclude che tale deformazione muta Σ in sè. Il teorema enunciato nell'introduzione è così dimostrato.

Meccanica. — *Dinamica ed aerodinamica dei fili.* – IV. *Problemi non lineari delle vibrazioni acustiche.* Nota(*) del Corrisp. G. KRALL.

Prima di concludere lo studio della (31) considerata nella Nota III mi occorre fissare l'attenzione su una $a(t)$ importante, quella che non provoca oscillazioni visibili.

È essa dovuta alla scia vorticosa, cosidetta di Kármán, scia che il filo investito da una corrente lascia dietro a sè. A questa si collega un'azione pulsante con periodo τ_0 stabilito da Krüger e Lauth ed intensità $p(t)$ calcolata nella Nota II citata. Si è trovato precisamente(1)

$$p(t) = p_0\left\{\sin\frac{2\pi}{\tau_0}t + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi}{\tau_0}t + \cdots\right\}, \qquad a(t) = \frac{p(t)}{\mu_0} \tag{32}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Nella Nota II alla (18 *c*) manca il fattore $\frac{4}{\pi}$. Essendosi posto $2h - k_0 : \mu_0$ le (20 23) devonsi moltiplicare per $8/\pi$; allora ricadono, con ovvia intesa sul coefficiente β, nella (35 *a*) se si ammette la (33 *b*) e quando si ponga $4H_0 : D^2\pi = s_0$ e $\mu_0 g - q_0$. Nelle (22 *b*) e (23) è ovviamente q_0 non p_0.

essendo

$$p_o = \frac{4}{\pi}\rho_o \varkappa D V^2$$

e per la sezione circolare

$$\varkappa = 0{,}73 \quad , \quad \tau_o = \frac{D}{0{,}20\, V}.$$

Ritenendo che V sia costante lungo x occorrerebbe sviluppare a sua volta il termine costante $\frac{4}{\pi}\rho_o \varkappa D V^2$ in serie trigonometrica rispetto ad x e portare l'armonica che si vuol considerare nella (32); allora si avrebbe per la componente con distribuzione $\sin\frac{n\pi}{L}x$,

$$(32\,a) \qquad p(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \rho_o \varkappa D V^2 \left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\left\{\sin\frac{2\pi}{\tau_o}t + \cdots\right\}, \quad (n = 1, 3, 5, \cdots).$$

Ma così si considera un aspetto estremamente ridotto del fenomeno potendosi ben realizzare in regime stazionario per un tratto notevole di fune la concomitanza dell'intensità totale della forza con l'armonica $\sin\frac{n\pi}{L}x$ (è infatti difficile ammettere che tutti i vortici si stacchino per ogni valore di x in fase tra loro e non si può certamente ammettere ch'essi abbiano lunghezza dell'ordine di quella del filo). Sicchè si può ritenere, mettendosi all'estremo opposto per accentuare il fenomeno, che $p(t)$ sia addirittura espresso dalla relazione

$$p(t) = \frac{4}{\pi}\rho_o \varkappa D V^2 \cdot \sin\frac{n\pi}{L}x \cdot \sin \nu t \quad , \quad \left(\nu = \frac{2\pi}{\tau_o}\right),$$

essendo $\nu = \sigma$ e quindi n dato dalla relazione (21) della Nota II, relazione che, trascurando, *come è ben legittimato da alcuni apprezzamenti numerici*, la rigidità flessionale, scriverò nella forma

$$(21\,a) \qquad \sigma = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{H_o}{\mu_o}} = 0{,}40\,\pi\,\frac{V}{D}.$$

Allora si ha, per la resistenza idraulica, in base alla (29),

$$(33) \qquad w_{max} \sim \frac{32}{9\pi}\sqrt{\frac{p_o}{\sigma^2 k_o^*}}.$$

In questa relazione k_o^* va specificato secondo la relazione

$$(33\,a) \qquad k_o^* \dot{w}^2 = c\,\rho_o \frac{D\dot{w}^2}{2} \quad \text{quindi} \quad k_o^* = \frac{c\,\rho_o D}{2}$$

con $c = c(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{R}$ essendo il numero di Reynolds $\mathfrak{R} = \frac{\dot{w} D}{\nu^*}$ e ν^* il coefficiente di viscosità cinematica ($\nu^* = 0{,}133$ cm^2 sec^{-1} per l'aria a 0°; $\nu^* = 0{,}144$ a 15°).

La dipendenza di c da $\Re$ è ben nota (cfr. ad esempio l'*Aerodinamica* del Pistolesi, p. 365). Per $\bar{w}$ si porrà $\bar{w} = \frac{2}{\pi} w_{max} \cdot \sigma$ con $\sigma = 0{,}40\,\pi\,\frac{V}{D}$; evidentemente occorre procedere per approssimazioni successive ponendo ad esempio inizialmente $c \sim 1{,}00$. Naturalmente, un tanto solo a titolo di orientamento nella problematica del fenomeno.

Per la resistenza viscosa si ha invece, con le più gravi incertezze intorno al valore di k_0 (nella Nota II questo è stato considerato del tutto arbitrariamente),

$$w_{max} \simeq \frac{p_0}{k_0 \sigma}. \tag{33 b}$$

In tutti e due i casi è, evidentemente,

$$p_0 = \frac{4}{\pi} \rho_0 \varkappa D V^2 \quad , \quad \varkappa = 0{,}73 \quad , \quad \sigma = 0{,}40\,\pi\,\frac{V}{D}. \tag{34}$$

Per trovare le sollecitazioni specifiche s_{max} nella fune a trefoli senza perderci nel giro, che è apparso non privo di oscurità anche per l'arbitraria introduzione del fattore ζ della Nota II, scriverò seguendo Bach,

$$s_{max} = \alpha \cdot \frac{E}{r} \cdot \varepsilon \tag{35}$$

essendo $\frac{1}{r}$ *la curvatura*, α un coefficiente di riduzione, ($\alpha \sim 3{,}8$), E il modulo d'elasticità del materiale che costituisce la fune, ε il raggio di un filo.

Essendo ora

$$\frac{1}{r} \cong w'' = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot w, \tag{36}$$

attesa l'espressione (21 *a*) di $\frac{n\pi}{L}$ risulta, con riguardo alla massima curvatura,

$$\frac{1}{r_{min}} = \left(\frac{1}{r}\right)_{max} \cong \frac{\mu_0}{H_0} \left(0{,}40\,\pi\,\frac{V}{D}\right)^2 w_{max}. \tag{36 a}$$

Abbiamo così in definitiva, associata alle (33) (meno attendibile è la (33 *b*)) e (35), la relazione fondamentale

$$s_{max} = E\,\alpha\varepsilon \left(\frac{1}{r}\right)_{max} \quad , \quad (\alpha \sim 3{,}8). \tag{35 a}$$

Esempio: Sia D = 2,64 cm, $\mu_0 g$ = 2,34 Kgm^{-1}, H = 22700 Kg, $\rho_0 g$ = = 0,125·0,81 Kgm^{-3}, V = 15 m sec^{-1}, E = 2,10·10^{10} Kgm^{-2}, g = 0,81 m sec^{-2}, α = 3,8, ν^* = 0,144 cm^2 sec^{-1} = 0,144·10^{-4} m^2 sec^{-1}.

Poniamo c = 1, valore intorno a cui resta c per $10^3 < \Re < 10^5$. Si ha dalle (21 *a*) e (34), σ = 714; dalla (32), p_0 = 0,690 Kgm^{-2}; dalla (33 *a*), k_0^* = 0,00105 e quindi, essendo $p_0 : \sigma^2 k_0^*$ = 0,820·10^{-3}, la (33) porge w_{max} = = (32:9 π)·0,0280 = 0,0324 m. Segue per la (36 *a*), $\frac{1}{r_{min}}$ = 0,173 m^{-1} e da

qui secondo la (35) e la (35 *a*) ponendo $\varepsilon = \frac{1}{20} D = 0{,}00132$ m, $s_{max} = 180 \cdot 10^4$ $Kgm^{-2} = 180$ Kg cm^{-2}.

Come si vede, in linea, le sollecitazioni non risultano molto sensibili neanche nelle condizioni gravose qui considerate.

Agli attacchi però, il fenomeno vibratorio si complica fortemente e la (35) che introduce il raggio ε di uno dei fili che costituiscono la fune, e non quello della fune, appare lì molto problematica. Ciò dimostrano gli effetti dannosi che, proprio agli attacchi, si rendono sensibili. Per evitarli non resta che neutralizzare le onde in arrivo – e non si allude solo a quelle del tipo acustico ma a quelle *comunque provocate* – mediante ammortizzatori oscillanti appositamente studiati.

Astronomia. — *Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi di un assorbimento del flusso gravitazionale attraverso i mezzi materiali.* Nota (*) del Socio Giuseppe Armellini.

1. Come è noto, Laager ed Erisman, nel 1904, dimostrarono sperimentalmente (1) che una sfera d'argento non perde nemmeno la quindicimillesima parte del proprio peso, quando viene circondata da una sfera cava di piombo con pareti molto spesse. Ma alcuni anni dopo il nostro illustre consocio Q. Majorana (2), con esperimenti di estrema delicatezza, potè raggiungere una precisione immensamente superiore e cioè circa un miliardesimo del peso totale della sfera da lui adoperata. Ed egli, tenendo conto che tra la sfera pesata e la Terra era interposto uno strato di piombo di circa cm. 50 di spessore e di densità 11,3 e supponendo che l'assorbimento del flusso gravitazionale terrestre fosse proporzionale alla densità del mezzo attraversato, ne dedusse che il coefficiente di assorbimento gravitazionale era, al più, di circa 10^{-12}.

Ora, nella presente Nota, io mi propongo di dimostrare che un tale coefficiente di assorbimento è ancora troppo elevato per poter essere ammesso nell'astronomia. E più precisamente mi propongo di dimostrare che, dal lato astronomico, si può certamente ammettere un debolissimo assorbimento del flusso gravitazionale nell'attraversamento di mezzi materiali ed anzi si può anche spiegare, con questa ipotesi, il moto del perielio di Mercurio; ma, in tal caso, il coefficiente di assorbimento deve essere oltre mille volte inferiore al valore sospettato dal Majorana, e cioè dell'ordine di 10^{-16}. Se però si ammette, come ormai è opinione comune tra gli astronomi, che il

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Cfr. « Vierteljahrschr. Naturforsch. Gesell. Zurich », Bd. LIII (1908) e « Dissert. Univ. Zurich », 1904.

(2) Cfr. Q. Majorana, *Sull'assorbimento della gravitazione*, Note IX in « Rend. Lincei », 1921, sem. II e 1922, sem. I.

moto del perielio di Mercurio sia già spiegato dalla Teoria di Relatività, allora l'assorbimento gravitazionale – se pure esiste – deve essere ancora più piccolo ed il coefficiente può difficilmente superare 10^{-18}, come ora passiamo a vedere.

2. Supponiamo dunque che il flusso gravitazionale venga debolmente assorbito nell'attraversare mezzi materiali. E precisamente, in conformità alle note formole fisiche sopra l'assorbimento della luce nei mezzi non perfettamente trasparenti, supponiamo che un raggio gravitazionale d'intensità I si riduca all'intensità $I' = Ie^{-a\rho l}$ percorrendo un cammino di lunghezza l in un mezzo materiale di densità ρ. Notiamo che il coefficiente di assorbimento gravitazionale a avrà le dimensioni $[\rho^{-1} L^{-1}]$ ossia $[M^{-1} L^2]$, e che quando a è estremamente piccolo, come supponiamo, potremo porre $e^{-a\rho l} = 1 - a\rho l$, onde sarà più semplicemente $I' = I(1 - a\rho l)$.

Consideriamo ora l'attrazione che il Sole esercita sopra un pianeta e, per il momento, per maggiore semplicità, supponiamo il Sole omogeneo. Prendiamo come origine il centro O del Sole, supposto sferico, come senso positivo dell'asse x la retta diretta da O verso un pianeta P, che supporremo puntiforme, e consideriamo nell'interno del globo solare una particella materiale A di massa $dm = \rho dx\,dy\,dz$, posta nel punto x, y, z.

Il raggio gravitazionale che da A si dirige verso P, taglierà la superficie solare nel punto A', percorrendo quindi nell'interno del globo solare il cammino AA'. Ma, poichè la distanza r del pianeta P dal centro del Sole è sempre molto grande rispetto al raggio solare R (nel caso di Mercurio, che è il pianeta più vicino, r è circa ottanta volte maggiore di R), il segmento AA' sarà pochissimo inclinato sull'asse x, ed in conseguenza, le coordinate del punto A' saranno approssimatamente $x' = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$; $y' = y$; $z' = z$; dove il radicale è sempre positivo.

Ne segue che la lunghezza l del segmento AA' sarà, con molta approssimazione, eguale a $\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} - x$, onde l'attrazione che la particella materiale A eserciterà sul pianeta P sarà identica a quella che si avrebbe se non esistesse nessun assorbimento gravitazionale e la particella A, invece di avere la densità ρ avesse una densità minore ρ', data da

$$(1) \qquad \rho' = \rho(1 - a\rho l) = \rho\left[1 - a\rho\left(\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} - x\right)\right].$$

Da questa osservazione, derivano due fatti importanti, e cioè:

I. La *massa apparente* (o massa attirante) M' del Sole, data da

$$(2) \qquad M' = \iiint \rho'\,dx\,dy\,dz = \rho \iiint \left[1 - a\rho\left(\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} - x\right)\right] dx\,dy\,dz$$

dove l'integrale è esteso a tutto il globo solare, e cioè ad una sfera di raggio R avente per centro l'origine O, risulta *minore* della sua massa reale M.

II. Il baricentro B della massa *apparente* non coincide col centro O della sfera, ma si trova sulla parte positiva dell'asse x ad una distanza ε da O.

Esaminiamo dettagliatamente le due questioni.

3. Poichè la massa reale M del Sole è data da

$$M = \rho \iiint dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\,\pi\rho R^3 \tag{3}$$

mentre, per ragioni di simmetria, si ha

$$\iiint x\,dx\,dy\,dz = 0 \tag{4}$$

la (2) ci dà immediatamente

$$M' = M - a\rho^2 \iiint \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dx\,dy\,dz\,. \tag{5}$$

Ora, estendendo l'integrale a tutta la sfera avente per centro l'origine O e per raggio R, abbiamo dalle regole del calcolo, ricordando che il radicale va preso sempre col segno positivo, e che basta eseguire l'integrazione per un ottante e moltiplicare quindi per 8:

$$\iiint \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dx\,dy\,dz = 8 \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} dx = \tag{6}$$

$$= 8 \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} (R^2 - y^2 - z^2)\,dy = \frac{16}{3} \int_0^R (R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz\,.$$

Ma, ponendo $z = R\cos\vartheta$, si ha

$$\frac{16}{3} \int_0^R (R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \frac{16}{3} R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\vartheta\,d\vartheta = \pi R^4 \tag{7}$$

onde la (5) diviene, tenendo conto della (3),

$$M' = M - a\pi\rho^2 R^4 = M\left(1 - \frac{9\,aM}{16\,\pi R^2}\right) \tag{8}$$

che ci fa conoscere la massa reale in funzione della massa apparente e viceversa, supposto noto il coefficiente di assorbimento a. L'omogeneità della formola è evidente, ricordando che a ha le dimensioni $[M^{-1} L^2]$.

4. Indicando con ε l'ascissa del Baricentro B, il quale cade evidentemente sulla parte positiva dell'asse x, abbiamo dalla Meccanica, per la (1) e la (2):

$$\varepsilon = \frac{\iiint \rho'\,x\,dx\,dy\,dz}{M'} = \frac{\rho}{M'} \iiint \left[1 - a\rho\left(\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} - x\right)\right] x\,dx\,dy\,dz\,. \tag{9}$$

Ma si ha per ragioni di simmetria

$$\iiint \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,x\,dx\,dy\,dz = 0 \tag{10}$$

onde, tenendo conto della (4), la (9) diviene

$$\varepsilon = \frac{a\rho J}{M'} \tag{11}$$

dove J indica il momento d'inerzia della massa reale del Sole (supposto sempre omogeneo) rispetto al piano diametrale $y\zeta$. Ricordando l'espressione di J, data dalla Meccanica, abbiamo infine

$$\varepsilon = \frac{a\rho MR^2}{5\,M'}. \tag{12}$$

5. Passiamo ora a studiare il moto del pianeta P, supposto puntiforme. Poichè per simmetria (per cui basta che il Sole si supponga sferico e composto di strati sferici omogenei), la linea d'azione della forza attrattiva che esso esercita sul pianeta P passa sempre per il centro solare O, vediamo subito che in ogni caso – esista, o no, un assorbimento gravitazionale – il pianeta P descriverà un'orbita piana con la legge delle aree. Avremo dunque

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c \tag{13}$$

dove, al solito, r, ϑ, t, c, indicano il raggio vettore, l'anomalia, il tempo e la costante delle aree.

Ciò posto ricordiamo che, per noti teoremi di Meccanica, l'attrazione che un corpo esercita sopra un punto *lontano* è, in prima approssimazione, la medesima che si avrebbe se tutta la massa del corpo fosse concentrata nel suo baricentro. In conseguenza la forza attrattiva F che il Sole esercita su P, sarà approssimatamente identica a quella che si avrebbe se tutta la massa *apparente* M' del Sole fosse concentrata in B, e cioè avremo

$$F = -\frac{fM'}{(r-\varepsilon)^2} \tag{14}$$

essendo f il coefficiente attrattivo della legge di Newton. Notiamo che la (14) vale anche quando si supponga il Sole sferico non omogeneo, ma composto di strati sferici omogenei; soltanto, in tal caso, la ε non è più legata dalla (12) al coefficiente di assorbimento gravitazionale a.

Poichè, essendo ε costante, la F deriva dal potenziale $-\frac{fM'}{r-\varepsilon}$, avremo l'integrale dell'energia

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2fM'}{r-\varepsilon} + 2h \tag{15}$$

dove v indica la velocità del pianeta nel suo moto orbitale ed h la costante dell'energia, che per i pianeti è sempre *negativa*.

6. Tenendo conto della (13), la (15) diviene

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{2hr^4}{c^2} + \frac{2fM'r^4}{c^2(r-\varepsilon)} - r^2. \tag{16}$$

Ma, essendo ε estremamente piccola rispetto ad r (come vedremo, ε è una lunghezza di circa km. 4, mentre, nel caso di Mercurio che è il pianeta più vicino al Sole, r è di circa 60.000.000 km.) possiamo trascurare le potenze superiori del rapporto $\frac{\varepsilon}{r}$, scrivendo

$$\frac{1}{r-\varepsilon} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right) \tag{17}$$

onde la (16) si riduce facilmente alla forma

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r}{c}\sqrt{2hr^2 + 2fM'r + 2fM'\varepsilon - c^2} \tag{18}$$

dove, essendo $d\vartheta$ sempre positiva, il radicale va preso con lo *stesso segno* del dr.

Ora, poichè h è negativa, come pure è negativo il termine noto $2fM'\varepsilon - c^2$ a causa della piccolezza di ε, il trinomio di secondo grado sotto al segno di radice, avrà due radici *reali positive* r_1 ed r_2, date da

$$r_1 + r_2 = -\frac{fM'}{h} \tag{19}$$

$$r_1 r_2 = \frac{2fM'\varepsilon - c^2}{2h} \tag{20}$$

onde la (18) potrà porsi sotto la forma

$$d\vartheta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{2h(r-r_1)(r-r_2)}}. \tag{21}$$

Essendo h negativa, si vede subito che r dovrà essere sempre *compresa tra* r_1 ed r_2, affinchè $d\vartheta$ sia reale; onde la radice minore r_1 corrisponderà al minimo valore di r (*distanza perieliaca*) e la maggiore r_2 al massimo (*distanza afeliaca*). In conseguenza l'angolo Θ descritto dal raggio vettore quando il pianeta P va da un perielio al successivo afelio, sarà

$$\Theta = c\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\sqrt{2h(r-r_1)(r-r_2)}} \tag{22}$$

dove il radicale va preso col segno *positivo*, essendo r crescente e quindi dr sempre positiva. Si ha allora, eseguendo l'integrazione che non presenta difficoltà e ricordando la (20):

$$\Theta = \frac{c\pi}{\sqrt{-2hr_1r_2}} = \frac{c\pi}{\sqrt{c^2 - 2fM'\varepsilon}}. \tag{23}$$

Questa equazione ci mostra che, se non esistesse assorbimento gravitazionale sarebbe $\Theta = \pi$, come è evidente essendo allora l'orbita ellittica; nel caso di assorbimento invece, essendo ε positiva, sarà necessariamente $\Theta > \pi$ e cioè avremo un *avanzo del perielio*.

Nella seconda parte della rivoluzione, quando il pianeta va dall'afelio al successivo perielio, vale ancora l'integrale (22) con l'avvertenza però che i due limiti sono ora *scambiati* e che il radicale va preso col segno *negativo*, essendo r decrescente e quindi dr negativa. Il valore numerico dell'integrale è perciò ancora dato dalla (23), e quindi l'*avanzo* $\delta\omega$ *del perielio durante una rivoluzione del pianeta*, sarà

$$\delta\omega = 2\,\Theta - 2\,\pi = 2\,\pi\left[\frac{c}{\sqrt{c^2 - 2\,f\mathrm{M}'\,\varepsilon}} - 1\right] \tag{24}$$

e, cioè trascurando le potenze superiori di ε:

$$\delta\omega = \frac{2\,\pi f\mathrm{M}'\,\varepsilon}{c^2}\,. \tag{25}$$

Ma dalla teoria delle orbite abbiamo la nota equazione:

$$c^2 = f\mathrm{M}'\,p \tag{26}$$

dove p è il *parametro*, onde la (25) si riduce alla forma semplicissima:

$$\delta\omega = \frac{2\,\pi\varepsilon}{p}\,. \tag{27}$$

Osserviamo, che essendo ε una costante identica per tutti i pianeti, il risultato a cui si giunge è *analogo* a quello dato dalla Teoria di Relatività; e cioè *l'avanzo del perielio durante una rivoluzione risulta inversamente proporzionale al parametro dell'orbita del pianeta*. Si comprende quindi la possibilità di spiegare con l'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale il moto del perielio di Mercurio, senza alterare sensibilmente quello degli altri pianeti; precisamente come avviene nella Teoria di Relatività. Soltanto, mentre nella spiegazione relativistica del moto del perielio di Mercurio (ed è questo il grande vantaggio della Teoria di Relatività) non vi è *nessun coefficiente arbitrario*, nella spiegazione fondata sopra l'ipotesi dell'assorbimento (come del resto in tutte le spiegazioni non relativistiche) vi è un coefficiente (nel nostro caso, ε) che occorre fissare opportunamente.

Inutile aggiungere che il $\delta\omega$, dato dalla (27), è espresso in radianti. Se pertanto si vuole lo spostamento *secolare* $\Delta\omega$ del perielio espresso in *secondi di arco*, avremo subito, chiamando con T la durata di rivoluzione del pianeta misurata in *anni* e ricordando che nella circonferenza vi sono 1296000 secondi

$$\Delta\omega = \frac{129\,600\,000\,\varepsilon}{\mathrm{T}\,p}\,. \tag{28}$$

7. Applichiamo ora questa equazione al pianeta Mercurio, il cui perielio, come è noto, subisce uno spostamento secolare di circa 42″ maggiore di quello dovuto alle perturbazioni cagionate dall'attrazione degli altri pianeti.

Se si vuole spiegare tale fenomeno con l'ipotesi di un assorbimento gravitazionale, essendo la durata T di rivoluzione di Mercurio di 88 giorni e cioè circa 0,24 anni, ed essendo il parametro p della sua orbita di circa 55600000 km., basta supporre, secondo la (28), che lo spostamento ε sia di

circa *quattro chilometri*. Come abbiamo osservato, un tale spostamento tra il centro geometrico ed il baricentro della massa apparente del Sole, non porterebbe nessun disturbo per gli altri pianeti. Tenendo conto infatti che ciò che si ricava dalle osservazioni è il prodotto $e\Delta\omega$ (dove e indica l'eccentricità dell'orbita) ed applicando la (28), si ha per *Venere*: $e\Delta\omega = 0'',06$; per la *Terra*: $e\Delta\omega = 0'',06$; per *Marte*: $e\Delta\omega = 0'',13$. Ovviamente nessuna perturbazione viene prodotta nei nodi delle orbite, onde la spiegazione ora data potrebbe trovar posto tra quelle non relativistiche.

Se il Sole fosse omogeneo, prendendo le unità del sistema C. G. S. ed essendo quindi $\varepsilon = 4$ km $= 4 \cdot 10^5$ cm. ed $R = 700000$ km $= 7 \cdot 10^{10}$ cm. dalla (12) risulterebbe $a = 4{,}1 \cdot 10^{-16}\, M'/\rho M$; vale a dire (poichè il rapporto M'/M è certamente minore dell'unità e la densità media reale ρ del Sole è certamente maggiore della sua densità media apparente 1,41), il coefficiente di assorbimento gravitazionale a, nel sistema C. G. S., dovrebbe essere dell'ordine di 10^{-16} od anche minore. E cioè: il flusso gravitazionale, attraversando uno strato di acqua distillata dello spessore di un centimetro, verrebbe assorbito nella proporzione di 10^{-16} od anche in proporzione minore.

Ma non basta. Tutto ciò vale nell'ipotesi che si voglia spiegare l'avanzo del perielio di Mercurio, ammettendo un assorbimento gravitazionale nell'attraversamento di mezzi materiali. In realtà però l'avanzo del perielio di Mercurio, almeno secondo la grande maggioranza degli astronomi, può considerarsi già spiegato dalla Teoria di Relatività. Ed allora, poichè l'assorbimento gravitazionale deve essere tanto piccolo da non produrre nessuna perturbazione apprezzabile nel moto del perielio di questo pianeta, si vede subito dalla (28) e dalla (12), che a difficilmente potrebbe superare 10^{-18}.

Riepilogando; quando gli astronomi vollero esaminare la velocità di propagazione della gravità, trovarono valori elevatissimi, immensamente superiori alla velocità della luce, mentre ora, nella ricerca del coefficiente di assorbimento, si trovano valori straordinariamente piccoli. E ciò conferma il carattere assolutamente eccezionale di questa forza misteriosa!

Chimica Organica. — *Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – V. Indici di legame negli orto- e para–benzochinoni* (*). Nota (**) di G. B. Bonino e M. Rolla, presentata dal Socio G. B. Bonino.

In precedenti lavori (1), seguendo il cosidetto metodo degli orbitali, abbiamo riferito sulla risoluzione delle equazioni secolari delle forme orto - e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna. Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del C. N. R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1948.

(1) G. B. Bonino e M. Rolla, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, *4*, 25, Nota I (1948); id., VIII, *4*, 273, Nota II; id., Nota III, in corso di stampa; M. Rolla e A. M. Marinangeli, « Boll. Sc. Fac. Chim. Ind. Bologna », Nota IV, in corso di stampa.

para-benzochinoidi; abbiamo altresì pubblicate le energie dei vari livelli elettronici, come pure i coefficienti $c_{j,k}$ delle combinazioni lineari dei vari orbitali. Tali coefficienti ci rappresentano, con il loro quadrato, le densità relative della nuvola di carica elettronica p_z nelle varie posizioni della molecola. Si indichi con j l'orbitale jesimo e con $1, 2, 3, \cdots, k, l \cdots$ le diverse posizioni occupate dagli atomi nelle rispettive molecole. Se $c^2_{j,k}$ rappresenta la densità della nuvola elettronica nella posizione k per il livello j, i prodotti $c_{j,k} \cdot c_{j,l}$ (k ed l atomi contigui) ci rappresentano (se risultano maggiori di zero) la probabilità che ha un elettrone di partecipare al legame fra i due atomi k ed l nell'orbitale j. Siccome a detto legame partecipano due elettroni, il prodotto $2\, c_{j,k}\, c_{j,l}$ misurerà la densità elettronica p_z che corrisponde a detto legame, sempre per il livello j, ed allora $2 \sum_l c_{j,k}\, c_{j,l}$ ci rappresenterà la densità elettronica relativa al complessivo legame k, l.

Analogamente il prodotto $2\, \beta_{k,l}\, c_{j,k}\, c_{j,l}$ ci rappresenterà il contributo dato all'energia del legame dall'orbitale j e $2\, \beta_{k,l} \sum_j c_{j,k}\, c_{j,l}$ sarà l'energia globale del legame k, l riferibile alla risonanza delle onde elettroniche p_z. È chiaro che, se per ciascun livello j, sommiamo tutte le energie dei vari legami, otterremo:

$$\varepsilon_j = \sum_{k,l} 2\, \beta_{k,l}\, c_{j,k}\, c_{j,l} \tag{1}$$

e cioè l'energia di perturbazione relativa all'orbitale j. Nel caso semplice che i $\beta_{k,l}$ siano tutti uguali a β si avrà:

$$\varepsilon_j = 2\, \beta \sum_{k,l} c_{j,k}\, c_{j,l} = 2\, \rho_i\, \beta \tag{2}$$

essendo come al solito $\rho_j = (\Delta W_j + \alpha)/\beta$.

Esaminiamo ora più da vicino la grandezza:

$$2 \sum_l c_{j,k}\, c_{j,l} = I_{k,l}.$$

Questa sommatoria, estesa a tutti i livelli j, ci rappresenta la densità elettronica p_z globale sul legame k, l. Chiameremo questa grandezza, in analogia, se non sempre in perfetta coincidenza, con quanto definito da Lennard-Jones e Coulson [2] e da Pullman e Collaboratori [3], « ordine » o « indice » di legame.

Questo « indice » o « ordine » di legame, che sta assumendo una notevole importanza nella chimica organica moderna nel caso di corpi aromatici, polienici, ecc. contenenti cioè in molecola dei doppi legami nel senso della classica grafia chimica, ci può dare un'idea della cosidetta localizzazione dei doppi legami stessi.

(2) LENNARD-JONES e COULSON, « Trans. Farad. Soc. », *35*, 817 (1939); COULSON, « Proc. Roy. Soc. London », *169*, 413 (1939).

(3) PULLMAN A. e B., « Experientia », *2*, 364 (1946).

Se $I_{k,l} = 1$, il doppio legame è « totalmente localizzato » come per esempio nella molecola dell'etilene. Se $I_{k,l} < 1$ il doppio legame non è totalmente localizzato e l'indice o ordine di legame $I_{k,l}$ può misurare il « grado di localizzazione » del doppio legame stesso. Tale grado di localizzazione potrà passare da 1 (doppio legame tipico al cento per cento) a zero (legame semplice).

Tutta la chimica delle sostanze aromatiche polieniche ed in genere contenenti legami doppi in molecola secondo la grafia classica, può trarre dalla conoscenza degli ordini di legame un più alto grado di precisazione, che è quasi del tutto sconosciuto alla chimica organica classica.

Per esempio i fenomeni di coniugazione dei doppi legami si interpretano come una diminuita localizzazione dei doppi legami nei punti della molecola dove la grafia classica li rappresentava, con conseguente assunzione da parte dei legami semplici, contigui al legame doppio graficizzato classicamente, di un carattere parziale di doppio legame.

Dunque l'ordine di legame ci può dare un'idea del se e del come i doppi legami tipici delle formule chimiche della chimica organica si possano coniugare lungo le catene aperte o chiuse.

Per le forme orto o parachinoidi (orto e parabenzochinone) Pullman e Collaboratori [4] hanno recentemente pubblicati i valori dei coefficienti delle combinazioni lineari costituenti gli orbitali, utilizzando però l'approssimazione più semplice che noi abbiamo indicato con il simbolo [A] nei precedenti lavori di questa serie [1]. Abbiamo perciò voluto calcolare in questa Nota gli ordini di legame che si raggiungono utilizzando l'approssimazione [B] da noi discussa in un precedente lavoro e per la quale valeva la condizione $\beta_d/\beta_s = 2{,}04$.

Nella tabella seguente sono riportati i valori degli indici o ordini di legame calcolati col metodo degli orbitali per le due forme orto e parabenzochinoidi seguendo sia l'approssimazione [A], sia l'approssimazione [B]. Le posizioni degli atomi nelle molecole dei due chinoni corrispondono alle due numerazioni convenzionali adottate nella fig. 1 e 2.

Fig. 1.

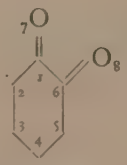


Fig. 2.

Per comodità del lettore riportiamo gli ordini di legame calcolati secondo l'approssimazione [C] di Coulson [2]. A fondo tabella diamo anche per ciascun tipo di legame il valore medio degli ordini di legame calcolati secondo le approssimazioni [A] e [B].

(4) PULLMAN e Collaboratori, « Bull. Soc. Chim. France », p. 450 (1948).

TABELLA I.

Ordini di legame per le forme orto- e para-benzochinoidi.

Tipo di approssimazione	para-benzochinone			orto-benzochinone				
	legami π			legami π				
	1-7; 4-8	1-2; 1-6 3-4; 4-5	2-3; 5-6	1-7; 6-8	1-2; 5-6	2-3; 4-5	3-4	1-6
Appross. [A] $\beta_d/\beta_s = 1$	0,7580	0,4524	0,8174	0,7748	0,4768	0,7792	0,5326	0,3874
Appross. [B] $\beta_d/\beta_s = 2,04$	0,9378	0,2428	0,9438	0,9400	0,2440	0,9400	0,2566	0,2304
Appross. [C] (Coulson) (1)	0,7950	0,3050	0,8990	0,8220	0,3560	0,8330	0,4480	0,1540
Valori medi {[A] + [B]}/2.	0,8479	0,3476	0,8806	0,8574	0,3604	0,8596	0,3946	0,3089

(1) COULSON, «Trans. Farad. Soc.», *42*, 109 (1946).

Nelle due diverse approssimazioni di calcolo (come si vede dalla tabella) i doppi legami chinonici non appaiono in nessun caso come doppi legami totalmente localizzati. Gli ordini di legame ci dicono che più o meno (a seconda dell'approssimazione scelta) i doppi legami della formula classica sono «coniugati» e cioè nessuno di essi è un vero e proprio doppio legame tipico, come nessuno dei legami semplici della formula organica ordinaria risulta un legame semplice puro,ma partecipa più o meno sempre del carattere di doppio legame.

La coniugazione (e perciò la diffusione del carattere di doppio legame) appare particolarmente intensa nei risultati dell'approssimazione [A] utilizzata da Pullman e Collaboratori (4). Ma una tale intensa coniugazione è in contrasto, per esempio per il parabenzochinone, con le misure röntgenografiche di Robertson (5), che mettono in evidenza lunghezze di legame C = O e C = C non molto diverse da quelle corrispondenti a doppi legami prevalentemente localizzati. Perciò emerge dalla tabella che l'approssimazione [B] darebbe una migliore percezione della realtà. Però questa approssimazione [B], non tenendo conto della elettroaffinità dell'ossigeno rispetto al carbonio, giunge a valori ancora troppo elevati per l'indice di legame C=O. D'altra parte abbiamo già accennato in una Nota precedente (v. (1) Nota III) alle grandi incertezze che si incontrano quando si vogliano valutare con

(5) ROBERTSON, «Chem. Rev.», *16*, 430 (1935).

maggiore approssimazione i termini riferibili a legami C = O. Le costanti all'uopo valutate da Coulson [6] sono approssimate a ± 50% come lo stesso Autore rileva.

Così anche per l'ortochinone i valori calcolati con la nostra approssimazione [B] si mostrano ragionevoli. I valori di Coulson si avvicinano alle medie dei valori ottenuti con le due approssimazioni [A] e [B]. In genere i calcoli di Coulson esprimono un maggior grado di « coniugazione » dei doppi legami chinonici che non i nostri calcoli secondo l'approssimazione [B]. Una forte discrepanza tra i valori medi delle approssimazioni [A] e [B] ed i valori di Coulson si hanno per il legame 1–6 della molecola dell'orto–benzochinone. Questo legame nella approssimazione di Coulson mostra un carattere di doppio legame più basso ancora di quello ottenuto con la nostra approssimazione [B]. La rarefazione della nuvola di carica sul legame 1–6 dell'ortobenzochinone è una delle salienti più caratteristiche della approssimazione di Coulson. Altra caratteristica che nettamente distingue l'approssimazione di Coulson dalle altre per l'ortobenzochinone è il relativamente alto valore dell'indice per il legame 3–4.

Ci sembra però opportuno ritornare sugli ordini di legame e sul modo di definirli. In una prossima Nota ci proponiamo di esporre alcune osservazioni in proposito.

Chimica–Fisica. — *Ricerche sulla teoria delle soluzioni concentrate di elettroliti forti.* – VI. *Dipendenza dalla temperatura di grandezze che intervengono nel calcolo degli abbassamenti crioscopici* [*]. Nota [**] di Giov. Battista Bonino e Anna Maria Marinangeli, presentata dal Socio G. B. Bonino.

In precedenti lavori si è ripresa l'idea, già sviluppata da vari Autori, di utilizzare la teoria di Debye-Hückel per le soluzioni di elettroliti forti estendendola alle soluzioni concentrate: si è così sostituito al valore della costante dielettrica D_0 del solvente (grandezza che appare nelle formule dedotte da quella teoria) un valore « efficace » D. Si era poi rilevato che il tentativo di Hückel di collegare D e D_0 con una relazione lineare, rispetto alle concentrazioni, poteva plausibilmente valere solo per soluzioni diluite. Si trovavano invece ragioni atte a dare un ragionevole supporto all'ipotesi che le due grandezze D e D_0 fossero legate da una relazione esponenziale del tipo:

$$D = D_0 e^{-\mu}$$

(6) Coulson, « Trans. Farad. Soc. », *42*, 109 (1946).

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimico-fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Presentata nella seduta del 13 novembre 1948.

dove $\mu = \frac{A}{D_o}$ era anche funzione della concentrazione. Si era posto in genere per una soluzione di elettroliti contenente un certo numero di ioni di specie diversa j:

$$A = \sum_j \gamma_j A_j$$

dove: $\gamma_j = \frac{n_j}{n_1 + n_2 + \cdots}$ (la somma è estesa solo ai numeri n_j di mol dei soluti escluso il solvente).

Le grandezze A_j si ponevano proporzionali ad una potenza del rapporto tra il volume ionico di Debye (e cioè $\frac{4\pi}{3} a^3$, essendo a il noto raggio ionico caratteristico della teoria di Debye–Hückel) e il volume medio della « nuvola ionica secondo Debye », grandezza questa che dipende dalla concentrazione della soluzione.

Cioè:

$$A_j = \eta_j \left(\frac{a_j}{1/\chi_o} \right)^{\varphi}$$

χ_o è l'inverso dello spessore medio della nuvola ionica di Debye, φ un esponente da determinarsi e η una costante.

Ponendo:

$$A = \sum \gamma_j A_j = \bar{\eta} \sum \gamma_j (a_j \chi_o)^{\varphi}$$

si trova che $\bar{\eta}$ corrisponde al valore che assume A in una soluzione nella quale si verifichi:

(*) $$\sum \gamma_j (a_j \chi_o)^{\varphi} = 1$$

e cioè $\bar{\eta} = A^*$ quando con $A^*, \chi_o^*, c_j^*, \Gamma_j^*$ si indicano la funzione A, lo spessore medio χ_o, le concentrazioni c_j e le forze ioniche Γ_j per quelle soluzioni per le quali si verifica la (*).

Considerazioni sviluppate secondo la teoria di Sach portavano a scrivere:

(**) $$A^* = \bar{\eta} = \left[(D_o - 1) \frac{4\pi}{3} \frac{N}{1000} \sum c_j^* \right] \bar{r}^3$$

dove N è il numero di Avogadro e $\bar{r}^3$ la media dei cubi dei raggi degli ioni idratati e cioè delle sfere (attorno agli ioni) nelle quali il solvente (acqua) si deve intendere come completamente polarizzato (sfere di saturazione dielettrica).

In uno dei precedenti lavori partendo dai valori di χ_o^* e c^* dedotti dall'andamento dei coefficienti di attività degli ioni in soluzioni di cloruri di metalli alcalini ed alcalino terrosi a $t = 25°$ C si erano calcolati i valori di $\bar{r}$ trovando dei numeri oscillanti tra due e tre unità Å circa [1].

(1) Le tabelle IV e V pubblicate in un precedente lavoro (« Gazz. Chim. Ital. », 78,

In questa Nota ritorniamo ulteriormente sul significato della costante $\bar{\eta}$ che abbiamo definito nei precedenti lavori. E ciò sotto due punti di vista:

1° L'equazione (**) è per sua natura di carattere approssimato e quindi in genere la sua applicazione può essere giustificata solo per soluzioni diluite. I valori di c_i^* (specie per le soluzioni di elettroliti mono–monovalenti di cui si sono riportati i dati nelle Tabelle IV e V della precedente nota a piè di pagina) non sono piccoli, giungendo per esempio a valori di 1,37 mol/litro per le soluzioni di NaCl e a ben 2,20 mol/litro per soluzioni di KCl. Le considerazioni svolte nelle Note precedenti ci permettono però di fissare in modo quantitativo i limiti di concentrazione entro i quali l'applicazione della (**) può ritenersi valida. Questi limiti evidentemente sono quelli entro i quali il valore dell'esponenziale $e^{-\mu}$ può essere sufficientemente valutato con i due primi termini dello sviluppo in serie e cioè con $(1 - \mu)$. Perciò possiamo stabilire che la (**) potrà essere applicabile in tutti quei casi nei quali $\frac{e^{-\mu} - (1 - \mu)}{e^{-\mu}}$ potrà essere trascurabile.

p. 74 (1948)), per il fortuito cambio di una colonna di numeri intercorso nella formazione delle stesse, debbono essere così rettificate:

TABELLA IV, p. 74.

Elettrolita	$\chi_0^* \cdot 10^{-8}$ a 25°C	Γ^* a 25° C.	c_i^* a 25° C.
LiCl.	0,20795	0,80341	0,40170
NaCl	0,27165	1,37101	0,68550
KCl	0,34482	2,20906	1,10453
$CaCl_2$	0,22595	0,94852	0,15808
$SrCl_2$	0,25821	1,23870	0,20645
$BaCl_2$	0,26866	1,34099	0,22349

TABELLA V, p. 75.

Elettrolita	c_i^* mol/litro a 25° C.	Σc_i^* conc. totale ionica a 25° C	$\bar{\eta}$	$\bar{r} \cdot 10^8$ cm.
LiCl.	0,40170	0,80340	4,5283	3,06
NaCl	0,68550	1,37100	4,1611	2,49
KCl	1,10453	2,20906	4,1869	2,12
$CaCl_2$	0,15808	0,47424	3,4311	3,32
$SrCl_2$	0,20645	0,61935	2,5708	2,76
$BaCl_2$	0,22349	0,67047	2,2301	2,56

2° Dato il modo semiempirico con il quale è stata posta la costante $\bar{\eta}$ può essere interessante studiare come essa vari eventualmente al variare della temperatura. La relazione (**) ci direbbe che $\bar{\eta}$ varia con la temperatura per due cause distinte e cioè per il variare di D_0 e per il variare di $\bar{r}$. La prima di queste variazioni (dD_0/dT) è nota sperimentalmente; la seconda ($d\bar{r}/dT$) può ragionevolmente esser considerata come relativamente piccola.

Osserviamo d'altra parte che l'ipotesi fondamentale sviluppata a supporto di questi calcoli è quella che la funzione A, che serve per passare dalla costante dielettrica effettiva D_0 del solvente a quella «efficace» D, sia semplicemente proporzionale ad una certa potenza del rapporto dei due volumi caratteristici della teoria e cioè del rapporto tra il volume ionico di Debye ed il volume medio della nuvola ionica (che contiene già la temperatura in conseguenza del suo significato statistico legato all'applicazione che Debye fa della teoria di Boltzmann).

Può essere perciò interessante studiare a quali conseguenze empiriche porti nei calcoli la posizione $\frac{d\bar{\eta}}{dT} = 0$. Questa ricerca potrà contribuire per tanto a dare un utile chiarimento sull'effettivo significato della costante $\bar{\eta}$

I due problemi sovra accennati sono fra loro collegati perchè, se l'applicazione della (**) non risultasse corretta, essendo le concentrazioni c_i^* troppo elevate tanto da non poter identificare $e^{-\mu}$ con $(1-\mu)$, si potrebbero attribuire le eventuali differenze, trovate per r, alla imprecisione nella valutazione della costante $\bar{\eta}$ in conseguenza dell'abnorme valore della concentrazione anzicchè in conseguenza di eventuali dipendenze della costante stessa dalla temperatura. La ricerca resterebbe perciò indeterminata.

Abbiamo sviluppati i calcoli per temperature vicine allo zero centigrado utilizzando a tale scopo tutta una serie di misure crioscopiche in soluzione acquosa da noi ricalcolate nel campo delle soluzioni acquose di elettroliti forti. Gli abbassamenti crioscopici sono previsti attraverso la teoria svolta con soddisfacente concordanza tra calcolato e trovato. Il calcolo procede nel modo seguente. Per un determinato elettrolita, conosciuti i raggi di Debye a_j, si calcola il valore di χ_0^* con la nota relazione:

$$\sum_j \gamma_j (a_j \chi_0^*)^{\varphi} = 1$$

ponendo, come già si è discusso in un precedente lavoro, $\varphi = 5/2$.

Dalle curve sperimentali che dànno gli abbassamenti crioscopici in funzione delle concentrazioni delle rispettive soluzioni si ricava il valore dell'abbassamento crioscopico che corrisponde al χ_0^* così calcolato e si determina con ciò la temperatura T alla quale si suppone di operare.

Si hanno allora tutti gli elementi per calcolare $\bar{r}$ a mezzo della relazione (**) dato che dal valore di χ_0^* si deducono immediatamente la forza ionica Γ^* e la concentrazione totale Σc_i^*. Dalla temperatura T come sopra dedotta si può ricavare il giusto valore di D_0 da introdurre nei calcoli.

TABELLA I.

Soluzioni acquose.

$a_{Cl^-} = 2{,}9$ Å

ELETTROLITI	a_{Me} in Å	$\chi^*_0 \cdot 10^{-5}$	ΔT	$D_{0,4T}$	Γ^*	$\Sigma \alpha^*_i$	η	$\bar{r}$ in Å a circa 0° C dalle misure crioscopiche	$\bar{r}$ in Å a 25° C	$\frac{n}{\rho}\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{\rho}{n}}\right)\cdot 100$
LiCl	5,97	0,20795	1°,48	88,83	0,82532	0,82532	4,5283	2,91	3,06	0,13
NaCl	4,27	0,27165	2°,41	89,21	1,40962	1,40962	4,1611	2,36	2,49	0,11
KCl	2,9	0,34482	3°,81	89,79	2,27524	2,27524	4,1869	2,01	2,12	0,11
RbCl	2,45	0,37187	4°,38	90,02	2,64624	2,64624	4,6630	1,98	2,09	0,14
CsCl	2,34	0,37845	4°,41	90,03	2,74072	2,74072	4,1401	1,88	1,99	0,11
$CaCl_2$	6,18	0,22595	0°,80	88,55	0,97439	0,48720	3,4311	3,16	3,32	0,08
$SrCl_2$	5,14	0,25821	1°,02	88,64	1,27250	0,63624	2,5708	2,63	2,76	0,04
$BaCl_2$	4,84	0,26866	1°,20	88,72	1,37757	0,68877	2,2301	2,44	2,56	0,03

Seguendo l'ipotesi di porre la costante $\bar{\eta}$ come indipendente dalla temperatura, abbiamo inserito nella relazione (**), per calcoli riferentisi a temperature vicine allo zero centigrado, i valori delle costanti $\bar{\eta}$ ricavate per le soluzioni degli stessi elettroliti a 25° C nei lavori precedenti.

Nella tabella seguente sono dati per ciascun elettrolita i valori del raggio del catione in Å (seconda colonna), χ_o^* (III colonna), ΔT (IV colonna), $D_{o,T}$ (V colonna), la forza ionica nella VI colonna, Σc_i^* (VII colonna), $\bar{\eta}$ (VIII colonna), $\bar{r}$, ricavato dalle misure crioscopiche a circa 0° C (IX colonna) e a 25° C (X colonna), e infine il valore del rapporto $\frac{e^{-\mu} - (1 - \mu)}{e^{-\mu}}$ % (XI colonna).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – Si vede che le differenze percentuali tra $e^{-\mu}$ e $(1 - \mu)$ anche nel caso di soluzioni di cloruri di metalli alcalini che richiedono per il calcolo di $\bar{r}$ l'introduzione di valori abbastanza elevati delle concentrazioni, sono assolutamente trascurabili e giustificano nei casi trattati l'applicazione della relazione (**).

I valori di $\bar{r}$ calcolati (ponendo la costante $\bar{\eta}$ indipendente da T) da esperienze crioscopiche differiscono di quantità di poco superiori a un decimo di Å dai valori degli stessi raggi calcolati da esperienze elettrochimiche su soluzioni acquose degli stessi elettroliti a 25° C.

La concordanza è favorevole e può giustificare l'ulteriore continuazione della ricerca onde poter chiarire ulteriormente il significato chimico-fisico delle ipotesi precedentemente formulate.

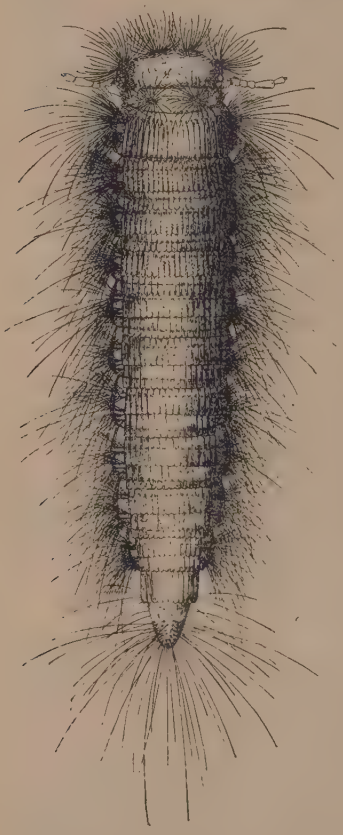
Zoologia. — *Distribuzione del genere « Synxenus » Silv. (Diplopoda-Penicillata).* Nota (*) del Socio FILIPPO SILVESTRI.

Nel novembre del 1899 trovandomi in escursione entomologica nell'Uruguay raccolsi presso la città di Salto alcuni esemplari di un piccolo Diplopodo Penicillato, che mi colpì per la forma conica della parte posteriore del corpo e per i tergiti provvisti di squame e fu riconosciuo subito come rappresentante di un nuovo genere, che descrissi poco dopo (1) col nome di *Synxenus* (fig. 1) colla specie tipica *S. orientalis* Silv.

Dal 1900 al 1923 nessun autore descrisse altre specie di tale genere, ma io stesso avevo avuto occasione di raccoglierne esemplari il 22 marzo 1913 presso Stellenbosch nell'Africa meridionale, il 16 aprile dello stesso anno sul Monte Lofty nell'Australia meridionale, il 13 aprile 1922 lungo l'Uadi Laoelia presso Merg in Cirenaica e nel gennaio 1923 sul Monte Montcià presso Ulldecona (Tarragona) e presso Lloret de Mar (Barcellona) in Spagna. Con

(*) Presentata nella seduta dell'11 dicembre 1948.
(1) « Zool. Anz. », XXIII, p. 114 (5 marzo 1900).

questo materiale potei riconoscere che gli esemplari del Mediterraneo (Spagna e Cirenaica) potevano essere riferiti ad una specie dell'Algeria descritta dal Lucas col nome di *Polyxenus platycephalus*, e quelli dell'Africa meridionale e dell'Australia a due specie nuove: *Synxenus capensis* Silv. e *S. Novaehollandiae* Silv. (2).



Synxenus platycephalus Lucas (esemplare di Cefalù, ingr. circa 20 volte).

Nel 1928 raccolsi un esemplare di *Synxenus*, che considero nuovo (*S. cubanus* (3) in località Guayabal dell'isola di Cuba e nel 1935 due esemplari, che riferisco pure a specie nuova, *S. chilensis* (4) in una collinetta presso Chorrillo (Chile).

(2) « Treballs del Museu de Ciencies Naturals de Barcelona », vol. IV, n. 5 (1923), pp. 5–15, figg. I–VI.

(3) *Synxenus cubanus* sp. n. – ♂ Corpus avellaneum setis et squamis paullum obscurioribus. Caput setis frontalibus maioribus submedianis mm. 0,20 longis, seta sensitiva A mm. 0,42 longa; oculi ocellis 8 (in exemplo typico saltem numerum ipsum vidi); antennae articulo 6° c. ⅓ longiore quam latiore et quam 7^{us} fare duplo longiore, sensillis typicis bacilliformibus distalibus 3 et sensillo simili alio in exempli typici antenna distinctissimo, articulo 7° parum longiore quam latiore, sensillis bacilliformibus distalibus 2.

Tergita 1^{um} ad 10^{um} setis et squamis forma consueta, rosa antica laterali setarum seriebus transversalibus 2, rosa postica seriebus 4–5, setis maioribus in segmento 5° mm. 0,40 longis.

Pedes breves, pedum parium 2°–15^{um} papillis et praetarso speciei sequentis similibus, pedum paribus 16^{i} spatuliformi (17° in exemplo typico mondum omnino evoluto).

Penes conici, mm. 0,50 longi.

Segmentum anale conicum, elongatum setis typicis, maioribus mm. 1 longis.

Long. corporis cum setis segmenti analis mm. 4,10; lat. capitis 0,68; long. antennarum 0,50, pedum segmenti 5^{i} 0,35, seriei anticae squamarum 0,26, seriei posticae 0,20.

Habitat. Exemplum descriptum ad Guayabal (Ins. Cuba) sub foliis emortuis legi.

Observatio. Species haec a *S. orientalis* Silv. statura minore, oculis ocellis 8 (an semper ?), antennis articulo 6° sensillis bacilliformibus 4 (an semper ?), saltem pro tempore distincta consideranda est.

(4) *Synxenus chilensis* sp. n. – ♀ Corpus avellaneum setis et squamis umbrinis. Caput setis frontalibus majoribus submedianis mm 0,30 longis, seta sensitiva A mm. 0,40 longa; oculi ocellis 9 compositi; antennae articulis 1° et 2° longitudine subaequalibus, 3° et 5° brevioribus, 4° quam 3^{us} parum longiore, 6° parum magis quam ¼ longiore quam latiore, sensillis bacilliformibus subapicalibus typicis 3, articulo 7° quam 6^{us} fere dimidio breviore sensillis subapicalibus typicis 2.

Nel 1939 raccolsi esemplari di *Synxenus platycephalus* presso Cefalù ed ebbi anche recentemente esemplari di tale specie raccolti pure nei dintorni di Cefalù e di Castelbuono (Palermo); quindi per quanto finora sappiamo il genere *Synxenus* è rappresentato da 6 specie, così distribuite:

S. platycephalus (Lucas): Nord Africa (Cirenaica, Algeria, Spagna, Sicilia).

S. capensis Silv.: Africa meridionale.

S. Novaehollandiae Silv.: Australia sud-occidentale, Adelaide.

S. orientalis Silv.: America meridionale: Uruguay.

S. chilensis Silv.: Chile centrale.

S. cubanus Silv.: Cuba.

Questa distribuzione, che è estesa dalla parte meridionale della regione paleartica alla etiopica meridionale, alla neotropicale, all'australiana, fa ritenere probabile l'esistenza di qualche specie di *Synxenus* anche nella regione orientale.

Una così vasta distribuzione indica che tale genere è molto antico e che specie di esso furono già presenti probabilmente fin dall'epoca terziaria su tutti i Continenti e continuarono ad esistere fino ad oggi in regioni temperate e subtropicali e tropicali, mentre scomparvero da regioni fredde.

Sarà importante accertare con altre ricerche la esistenza di altre specie, la distribuzione di quelle conosciute e particolarmente del *Synxenus platycephalus* noto ora per il Nord Africa, per la Spagna meridionale e per la Sicilia.

Tergita 1^{um} ad 10^{um} setis et squamis forma consueta, rosa antica laterali setarum seriebus 2, postica setarum seriebus transversalibus 5, paratergitis setarum seriebus transversalibus 11–12, setis maioribus (in segmento 5°) mm. 0,80 longis.

Pedes breves parium 2° ad 15^{um} articulis 2°, 3°, 4°, 6° papilla parte proximali cylindracea et parte apicali parum longiore setiformi, tarso papilla conica longiuscula distali, pedes a pare 16° forma generis typica.

Ovipositores mm. 0,50 longi.

Segmentum anale conicum setis maioribus mm 1 longis.

Long. corporis cum setis segmenti analis mm. 5; lat. capitis 0,78; long. antennarum 0,60, pedum segmenti 5^{i} 0,50, seriei anticae squamarum mm. 0,34, seriei posticae 0,22.

Habitat. Exempla duo cotypica sub foliis emortuis ad Chorrillo (Chile) legi.

Observatio. Species haec ad *S. orientalis* Silv. perproxima est, sed statura parum minore, squamis parum brevioribus, antennarum articulo 6° apice parum angustiore, saltem distincta est, sed cum exempla numerosa lecta sint, notae omnes speciei huius et praecedentis melius comparandae sunt.

Antropologia. — *I piegamenti della base nei paleantropi di Saccopastore e del Monte Circeo* (*). Nota (**) del Corrisp. S. Sergi.

Alla architettura generale del cranio si riferisce quell'insieme di fatti che riguardano il *complesso morfologico* da me detto *basignatico* che interessa cioè la regione sfeno-occipitale della base del cranio nelle sue connessioni con la regione mascellare della faccia. Le conoscenze in riguardo degli ominidi fossili di forme estinte sono ancora assai scarse e del tutto incerte e incomplete. Esse non hanno potuto avanzare ad onta degli straordinari reperti venuti alla luce negli ultimi decenni, perchè questi sono per lo più mutilati, e quelli che si sono presentati nelle migliori condizioni di conservazione difettano di parti più o meno estese del *complesso basignatico*. Cosicchè ancora nulla si sa della architettura di questo settore nel Pitecantropo ed anche nel Sinantropo. [Benchè per quest'ultimo di recente Weidenreich abbia tentato in via indiretta e presuntiva di chiarirne la condizione, lo stesso A. riferisce che: *in Sinantropus the central part of the cranial base is missing in all specimens* (*The skull of Sinanthropus pekinensis*, 1943, p. 138)]. Per quanto riguarda i paleantropi sono solamente il cranio della Rhodesia e quelli di Saccopastore e del Circeo che hanno portato un contributo concreto di fatti, mentre tutti gli altri rinvenimenti lasciano adito per la loro incompletezza o deformazione a dubbi e discussioni, compreso il cranio del paleantropo palestinese Skuhl V nel quale sono specialmente incerte le connessioni dei mascellari che gli vengono attribuite e per le quali risulta una eccezionale prognatia, mentre la situazione del basisfenoide e del basioccipitale sembra abbastanza corretta. In qualcuno dei reperti del paleantropo di Giava (Ngandong XI) secondo una recentissima pubblicazione del compianto Weidenreich (1), la regione della base è integra e presenta caratteristiche particolari. Lo scritto di W. non era ancora a mia conoscenza quando feci questa mia comunicazione all'Accademia. Le condizioni morfologiche descritte dal W. richiedono una speciale disamina critica e comparata che io tratterò in una comunicazione successiva a complemento di quanto viene qui esposto.

Il problema centrale è costituito dalle condizioni che riguardano i piegamenti della base. Il piano sfenoidale in Saccopastore II è fortemente inclinato in basso ed in avanti (inclinazione positiva) in modo eccezionale. Così pure in Saccopastore I dove l'inclinazione è ancora più accentuata.

In Saccopastore II l'angolo del *planum* sul piano orbitoauricolare, determinato sul tratto parziale del *planum* conservato a destra in una sezione sagittale laterale distante

(*) Dall'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta del 10 aprile 1948.

(1) Fr. Weidenreich, *Some particulars of skull and brain of early hominids and their bearing on the problem of the relationship between man and anthropoids*. « Am. J. Phys. Anthrop. », 1947. N. 4, December.

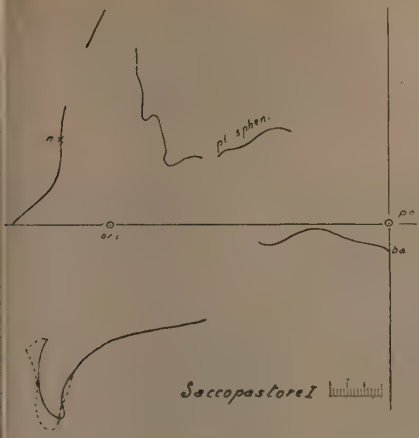


Fig. 1.

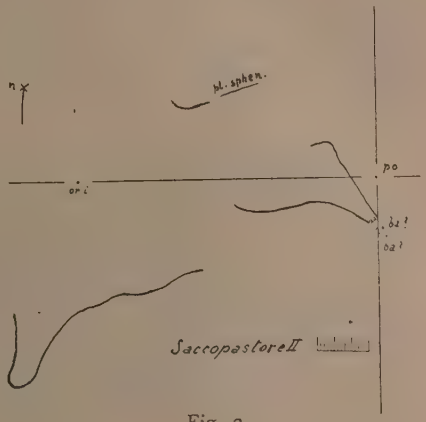


Fig. 2.

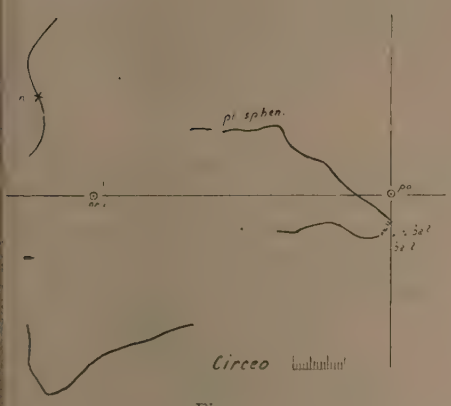


Fig. 3.

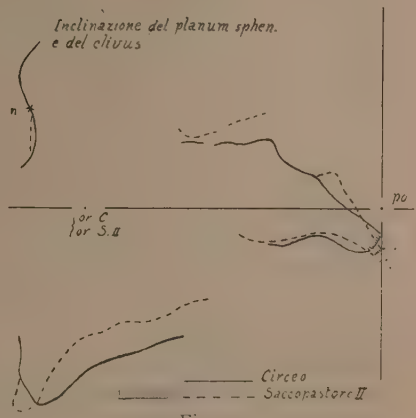


Fig. 4.

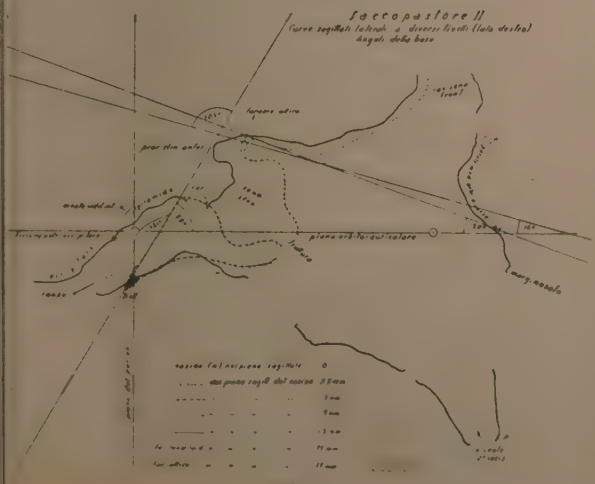


Fig. 5.

Figg. 1–3. – Curve sagittali mediane dei crani di Saccopastore I, Saccopastore II e del Monte Circeo nelle quali è riportata la regione della base.

Abbreviazioni comuni: *ba* basion, *n* nasion, *or. i.* punto orbitario inferiore. *pl. sphen.* planum sphenoidale, *po* porion.

Fig. 4. – Curve sagittali del cranio di Saccopastore II e del cranio del Monte Circeo sovrapposte sulla linea po–or. i. per dimostrare la diversa inclinazione del planum e del clivus nei due crani.

Fig. 5. – Gli angoli della base nel cranio di Saccopastore II.

mm. 5,5 dal piano mediano che passa per il nasion, è di 16°. Una inclinazione di 20° nello stesso è anche probabile, se si vuole ritenere corrispondente ad essa l'inclinazione del tratto posteriore del *planum* conservato un poco più lateralmente, cioè a 9 mm. dal piano mediano nasale, e che si continua con il tratto anteriore mediale predetto e si arresta più in avanti (v. figg. 2 e 5).

In Saccopastore I l'angolo del piano sfenoidale sul piano orbitoauricolare è molto grande (valore minimo probabile 19°, massimo più probabile 26°) (v. figg. 1 e 6). Anche qui occorre chiarire perchè si prospettano valori incerti. Per la determinazione dell'inclinazione del *planum sphenoidale* mi sono valso del suo tracciato sul piano sagittale mediano ottenuto per mezzo del mio diagrafo. Nello stesso tracciato si vede anche il tratto corrispondente alla *crista frontalis* ed alla *crista galli*; tra la linea della *crista galli* e quella del *planum sphenoidale* vi è una interruzione per la frattura della estremità posteriore della lamina cribrosa e della estremità anteriore della *crista sphenoidalis*. L'inclinazione del *planum sphenoidale* determinata dalla tangente alle sue due estremità raggiunge 26°. Io credo che questa sia la pendenza naturale sul piano orbitoauricolare. Ma può sorgere il dubbio che nella sede della frattura, dove è interrotto il contatto tra la lamina cribrosa ed il *planum*, si sia verificata una depressione postuma dell'estremità anteriore del *planum*. Questa non avrebbe potuto in ogni modo trovarsi al di sotto del piano base della *crista galli* cioè del piano della fossa olfattoria, per cui la tangente che individua in avanti il piano considerato non si inclina meno di 19°, valore minimo che avrebbe potuto comportare la pendenza del *planum*.

La più forte inclinazione del *planum* che Keith chiama *deflection* è segnalata negli uomini attuali tra gli Australiani (Keith, *Report on the Galilee skull*, fig. 21 e p. 79. – Burkitt e Hunter, 1922. *Description of a Neanderthaloid Australian skull*, con angolo di 15°,5. – Craniogrammi di Australiani pubblicati da Duckworth). Secondo la ricostruzione di Keith l'inclinazione è forte nel cranio di Galilea e questo A. ritiene che si tratta di una condizione di acquisto recente nella evoluzione, mentre l'opposto sarebbe particolarmente tipico degli antropoidi. Ma ciò non è esatto perchè ad esempio in orango si può incontrare lo stesso fatto (Angelotti, *Osservazioni antropologiche sulla base del cranio*. « Riv. Antrop. », XVI, 1911; Lucae, *Affen und Menschenschädel ecc.* « Arch. Anthrop. », 1873, tav. IV, fig. 6) in gorilla e in Symphalangus (mie osservazioni dirette) e comunque la morfologia della regione del *planum* è diversa negli antropoidi. Per lo più negli uomini attuali si ha tendenza al parallelismo del piano sfenoidale con il piano di Francoforte con frequenti valori positivi o negativi fra 5° e 6° (Ranke, Angelotti). In questa serie rientrano Circeo (5°) (figg. 3 e 7), Skuhl V (2°,5–0°,5), Rhodesia (6° calcolato da me), Gibraltar (7° ?).

L'inclinazione del *clivus* in Saccopastore II è forte (59°), essa rientra nelle variazioni medie degli uomini attuali (Luthy, come anche in Saccopastore I (minimo probabile 51°) e così in Skuhl V ed anche in Rhodesia (57° ?, da me calcolato su figura di Keith). (Figg. 1, 2; 5, 6).

In Saccopastore I la inclinazione del *clivus*, che non è stato possibile determinare direttamente per le condizioni in cui si trova la regione, è indicata con il valore limite minimo (51°) che può essere ritenuto più probabile e che è dato dalla linea che congiunge

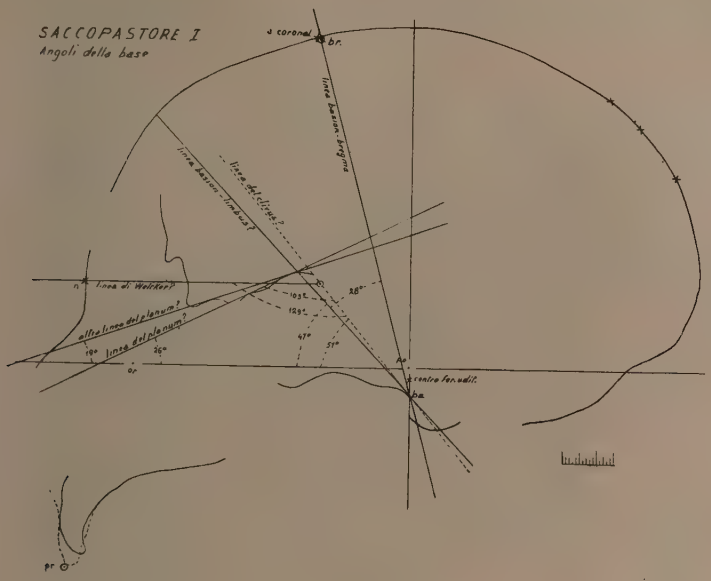

SACCOPASTORE I
Angoli della base
d coronal
br.
linea basion-bregma
linea del clivus?
linea basion-inion?
n
linea di Welcker?
alto linea del planum?
linea del planum
103°
128°
28°
47°
51°
19°
36°
or
ba
centro for. occip.
pr

Fig. 6.

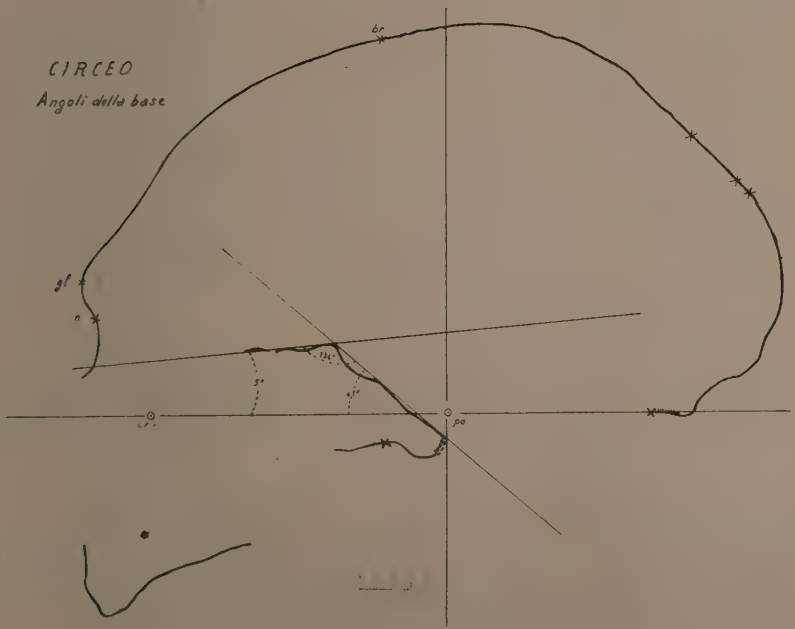

CIRCEO
Angoli della base
br.
gl
n
124°
5°
41°
po

Fig. 7.

il *basion* con un punto situato immediatamente dietro l'estremità posteriore della curva del *planum* a livello della base del *tuberculum sellae* là dove questo limita inferiormente il solco del chiasma. Non si esclude che l'angolo possa essere anche maggiore.

Nel cranio del Circeo invece il piegamento è molto ridotto, misura appena 41° (figg. 3, 4, 7) al di sotto delle variazioni individuali date da Luthy, si allontana cioè dai minimi dei fanerantropi. Le stesse differenze tra Saccopastore I e II e Circeo si constatano con la misura della inclinazione della linea basicraniale *basion–limbus* (*tylion* di Török) sul piano orbito–auricolare (Gibraltar 49°, Saccopastore I, 47°–48°?, Saccopastore II, 50°?, Circeo 42°). La flessione (angolo di Landzert) determinata dalla reciproca inclinazione del *planum* e del *clivus* risulta nei due Saccopastore accentuata più particolarmente per il forte piegamento positivo del *planum* (Saccopastore I 103°?, Saccopastore II 101°–105°?) ed è assai ridotta in Circeo (134°) per la particolare riduzione del piegamento del *clivus* come si avvera anche in La Chapelle (135° Boule) con il quale il paleantropo del Circeo ha in comune quasi lo stesso valore. Anche con l'angolo sfenoidale di Welcker si mette in evidenza il distacco tra i due gruppi di crani, nei due Saccopastore l'angolo è compreso nei valori medi degli Europei (Saccopastore I 129°?, Saccopastore II 132°), mentre nel Circeo (145°–146°) ed in La Chapelle (150°) ha valori eccezionali.

Nei neandertaliani tipici quindi la flessione della base è minore per minore piegamento del clivus, nei paleantropi di Saccopastore la flessione è maggiore più specialmente per eccezionale inclinazione positiva del planum.

È la prima volta che si può stabilire l'esatto comportamento della base del cranio dei neandertaliani del würmiano per mezzo del cranio del Circeo, perchè questo offre le migliori condizioni per la perfetta conservazione della regione in esame, come in nessuno di tutti i fossili conosciuti. Lo stesso comportamento constatato nel cranio di la Chapelle fino alla quasi uguaglianza dei valori angolari costituisce un altro elemento fondamentale a dimostrare la sorprendente identità di forma e di architettura dei due crani, che io ho rilevata fin dal mio primo esame al momento della scoperta del cranio del Circeo. Di tutto si darà dettagliata dimostrazione con i craniogrami relativi nello studio analitico del reperto.

Il cranio di Gibraltar era ritenuto fino ad ora l'unico nel quale si potesse determinare l'angolo di flessione della base. Nella più recente monografia (1939) nella quale è trattato questo argomento McCown e Keith asseriscono che *of all the Neandertal skulls known to us, there is only one in which the base in approssimately complete and in which the basi–cranial angle can be accurately determined. This is the original Gibraltar skull.* (*The stone age of Mount Carmel. The fossil human remain from the levalloiso–mousterien.* Vol. II, Oxford, 1939). Ma questo famoso cranio dell'*Homo calpicus* di Falconer, il primo della serie dei paleantropi rinvenuto in Europa un secolo fa (1848), in realtà presenta difetti che hanno reso sempre imprecisa la determinazione delle misure nella regione basale, donde divergenze nei

risultati dei diversi misuratori, divergenze che appaiono anche molto grandi [2]. Io esaminai a lungo l'originale a Londra nel Surgeons College dove si conserva e mi convinsi della sua grande somiglianza con il cranio di Saccopastore. Nel 1932 al Congresso internazionale di scienze preistoriche e protostoriche (Londra) comunicai che adottando come linea basicraniale la linea *basion-tylion* (punto mediano del *limbus sphenoidalis*) già proposta da Török, linea che io ritengo rappresenti l'asse basioccipitale meglio che quella del piano del *clivus*, la detta linea forma con la basion-bregma angoli quasi uguali in Gibraltar 29°,5 e Saccopastore I 28° e così anche con il piano di Francoforte, con valori che si trovano negli uomini attuali. Il cranio cioè di Gibraltar mi risultava che possedeva un grado di flessione della base che si trova entro l'umanità attuale. Il cranio di Gibraltar è stato a varie riprese sempre meglio ripulito e sistemato, avendo servito più volte di confronto, specialmente da Keith e poi più recentemente in modo più definitivo e completo da McCown che lo ha liberato della roccia che lo riempiva in alcune parti e ne ha curato la ricomposizione. Secondo le ultime determinazioni di McCown e Keith, l'angolo del *clivus* misura 50°, l'angolo di Landzert 123° e quello di Welcker 140°, tutti valori compresi nella umanità attuale, come pure il palestinese Skuhl V e il Rhodesiano. Solamente dunque nel momento attuale due crani neandertaliani tipici Circeo e La Chapelle sono gli unici che si conoscono possedere sicuramente una ridotta flessione della base agli estremi di quella degli uomini attuali e di tutti gli altri paleantropi nei quali la regione è conservata ad eccezione del cranio del paleantropo di Ngandong XI (Giava), secondo la recente indicazione di Weidenreich, della quale, come già sopra ho detto, credo necessario di trattare in una nota a parte. Non conosciamo fino ad oggi quali siano le condizioni architetturali della base nella umanità protomorfa (uomo di Heidelberg, sinantropo, africantropo). Se si vuole considerare la riduzione della flessione quale una caratteristica di primitività questa caratteristica è un attributo fino ad ora riscontrato nei neandertaliani suddetti e nell'uomo di Ngandong ma con modalità diverse. Non si può non ammettere che varie siano state le condizioni con cui si è determinato il piegamento della base, tenendo presente che i neandertaliani tipici sono più tardivi delle varietà a flessione più avanzata sia in Europa che in Palestina. La soluzione dei quesiti che si pongono e che sono al centro della antropogenesi non può essere risolta teoricamente ma solo da nuovi reperti che potranno svelare la successione degli eventi, pur essendo portati a considerare la riduzione della flessione della base come una caratteristica di primitività.

(2) Fin dal 1909 Sera, dopo l'esame diretto compiuto sul cranio di Gibraltar, aveva *rilevato dei fatti* per cui *si formò* in lui *il grave dubbio sull'attendibilità dei valori delle misure* della base a causa delle condizioni in cui questa gli si presentava nel momento del suo esame e cioè sia per lo strato di ganga che rivestiva il fondo della fossa olfattoria e la sella turcica (condizioni già rilevate anche da Sollas) sia per le mutilazioni, fratture e deformazioni postume. *Nuove osservazioni ed induzioni sul cranio di Gibraltar*. «Arch. per l'Antropologia e la Etnologia», vol. 39°, 1909.

A queste condizioni interne si associa un diverso comportamento della inclinazione della superficie esterna del basioccipitale (fig. 8). Questa superficie in Saccopastore II presenta una debole inclinazione sulla orizzontale, inclinazione che ho misurata con l'angolo al punto più elevato della superficie faringea della base compreso tra la tangente a questo punto parallela al piano orbito-auricolare e la congiungente di questo punto al basion. L'angolo misura 27° ed è approssimativo, perchè la misura si riferisce ad un piano paramediano di circa un centimetro distante dal piano mediano a causa della mutilazione.

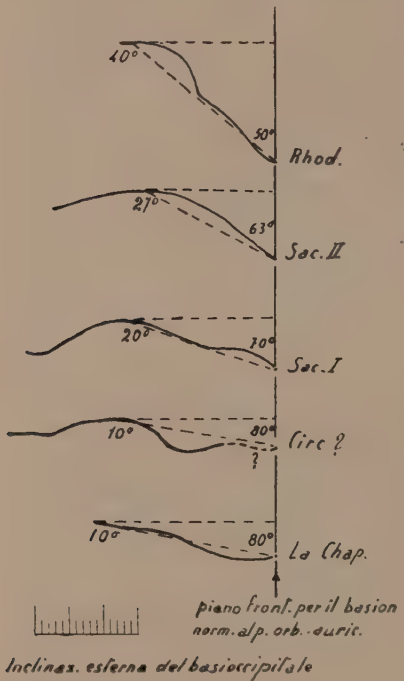


Fig. 8.

Il riferimento esatto si può constatare nella figura del testo (fig. 5 angoli della base). In Saccopastore I l'inclinazione è di 20° ed in Gibraltar è prossima a questa (Sollas aveva già accennato al fatto, Sera dà 17°, per me è circa 19°). Nel cranio del Circeo è di 10°, così come in quello di La Chapelle (10°). mentre in Rhodesia è di 40° ed in Skuhl V di 33° (?) determinato sulla figura 167 di McCown e Keith.

Il valore minimo molto prossimo alla orizzontale (10°) si trova in Circeo e La Chapelle che anche in questo coincidono e si distinguono dai due Saccopastore e da Gibraltar, che pure hanno valori che sono eccezionali nella umanità attuale, dove più di frequente si incontrano più spesso i valori bassi in condizioni patologiche (Ranke). Il palestinese Skuhl V e il Rhodesiano si distaccano ancora dai precedenti in modo assoluto entrando nella media dei fanerantropi (media di Ranke). Non risulta perfetta correlazione tra il comportamento esterno e quello interno della base per i valori che la caratterizzano, anche usando i metodi più diversi. Una delle cause della discordanza si deve attribuire alle variazioni di spessore e di forma del basioccipitale. Si può concludere quindi che: la superficie esterna (faringea) del basioccipitale nei paleantropi europei presenta una debole inclinazione, minima nel gruppo Circeo-La Chapelle, meno accentuata in quello di Saccopastore-Gibraltar; nei paleantropi asiatici di Palestina, tipo Skuhl, e nei paleantropi africani, tipo Rhodesia, la inclinazione è più forte ed è conforme alla media dei fanerantropi.

La relazione di Schultz (*Anthropologischen Untersuchungen an der Schädelbasis.* «Arch. f. Anthrop.», 1918 della nasion-hormonion alla nasion-basion uguagliata a 100, con cui si determina il valore relativo della lunghezza basale del cranio è uguale in Saccopastore I (74,27) ed in Circeo (74,48). I

loro valori corrispondono a quelli più alti della serie fanerantropica di adulti, esaminati da Schultz, di razze le più diverse, mentre sono assai lontani dalle scimmie, tra le quali appena negli antropoidi (cimpanzè) si possono avere valori individuali che entrano nei limiti individuali minimi umani. Il rapporto di Schultz assume un particolare significato se si confronta con i risultati ora esaminati relativi alla flessione della base, esso cioè sta a dimostrare l'indipendenza dello sviluppo cerebrale frontale basale dal grado di flessione della base. L'accorciamento relativo della parte basilare retrofacciale è già stato raggiunto nei paleantropi nella misura dei fanerantropi, mentre non risulta correlazione del grado di flessione del *clivus* con il grado di inclinazione della superficie esterna del basioccipitale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

Oltre le citazioni riportate già nel testo si consulti: SERGIO SERGI, *Il cranio del secondo paleantropo di Saccopastore*. « Paleontographia Italica ». Vol. XLII, 1948.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico.* Nota I (*) di LUIGI AMERIO, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Il problema di Cauchy per l'equazione lineare di tipo iperbolico a coefficienti costanti, di ordine $2k$, in m variabili $x_1, \cdots, x_m$:

$$(1) \qquad E_k(u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \lambda \right)^{(k)} u = f,$$

dove λ è una costante qualsiasi, u l'incognita e f una funzione assegnata in un dominio dello spazio S_m $(x_1, \cdots, x_m)$, può risolversi con il metodo della trasformata multipla di Laplace, *senza fare alcuna ipotesi sul comportamento all'infinito della soluzione*, nel modo seguente.

Supponiamo assegnati i valori di

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x_1^{2k-1}}$$

su una ipersuperficie S di equazione

$$x_1 = \varphi(x_2, \cdots, x_m)$$

dotata in ogni suo punto di iperpiano tangente non caratteristico.

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1948.

Possiamo senz'altro ammettere che su S risulti

$$(2) \qquad (u)_S = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_S = \cdots = \left(\frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x_1^{2k-1}}\right)_S = 0$$

perchè a questo caso ci si può sempre ricondurre assumendo come nuova incognita la funzione

$$u' = u - \sum_0^{2k-1}{}_h \left(\frac{\partial^h u}{\partial x_1^h}\right)_S \frac{(x_1 - \varphi)^h}{h!} .$$

Siano $P(x_1, \cdots, x_m)$ e $Q(y_1, \cdots, y_m)$ punti dello spazio S_m e poniamo

$$(3) \qquad \begin{cases} r(P) = r(x_1, \cdots, x_m) = \{x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_m^2\}^{1/2}, \\ r(P - Q) = r(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m) = \{(x_1 - y_1)^2 - \\ \qquad - (x_2 - y_2)^2 - \cdots - (x_m - y_m)^2\}^{1/2}, \end{cases}$$

supponendo i radicandi non negativi. La funzione $r(P - Q)$ si dirà la *distanza secondo Lorentz* dei punti P, Q. Se Q si considera fisso e P mobile, $r^2(P - Q) = 0$ è l'equazione del cono caratteristico della (1) col vertice nel punto Q e, unitamente alle disuguaglianze $x_1 - y_1 \geqq 0$ o $x_1 - y_1 \leqq 0$, definisce rispettivamente il semicono diretto e il semicono retrogado. Indicheremo con τ_Q, T_Q i dominî formati rispettivamente dai punti non esterni al semicono diretto o retrogado con il vertice in Q, con τ e T i medesimi dominî in cui Q coincida con l'origine di S_m.

Scegliamo poi un punto $R(\zeta_1, \cdots, \zeta_m)$, con

$$\zeta_1 > \varphi(\zeta_2, \cdots, \zeta_m),$$

in modo che l'ipersuperficie S incontri tutte le semirette spiccate da R e contenute in T_R e sia ω il dominio delimitato superiormente da una parte, σ, del semicono retrogado col vertice in R e inferiormente da quella parte di S che appartiene a T_R.

Applichiamo ora la formula di Green all'equazione (1). Se $u(x_1, \cdots, x_m)$ è un integrale, in ω, e $v(x_1, \cdots, x_m)$ una funzione continua in ω insieme alle sue derivate parziali fino all'ordine $2k$ incluso, risulta, per le (1) e (2),

$$(4) \qquad \int_\omega u\, E_k(v)\, d\omega = \int_\omega v f\, d\omega +$$

$$+ \sum_0^{k-1}{}_i \int_\sigma \left\{ E_{k-i-1}(u) \frac{\partial E_i(v)}{\partial \nu} - E_i(v) \frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu} \right\} d\sigma \qquad (E_0(u) = u),$$

dove ν è la direzione conormale (coincidente in ogni punto Q di σ con la direzione QR della generatrice passante per Q).

In particolare, se poniamo

$$v = e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}$$

(con $p_1, \cdots, p_m$ parametri qualsiasi) la (4) diventa

$$(5)\qquad \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h\, p_h^2 + \lambda\right)^k \int_\omega u e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}\, d\omega = \int_\omega f e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}\, d\omega +$$

$$+ \sum_0^{k-1}{}_i \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h\, p_h^2 + \lambda\right)^i \int_\sigma \left\{ E_{k-i-1}(u)\, \frac{\partial e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}}{\partial \nu} - e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}\, \frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu} \right\} d\sigma,$$

dove si sono indicate, per maggior chiarezza del seguito, con $(x_1, \cdots, x_m)$ le coordinate dei punti di ω, con $(y_1, \cdots, y_m)$ le coordinate dei punti di σ.

Supponiamo ora le u ed f definite anche nei punti esterni a ω, ponendole ivi eguali a zero, e introduciamo le rispettive trasformate di Laplace:

$$L(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}\, u(x_1, \cdots, x_m)\, dx_1 \cdots dx_m = \int_\omega e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}\, u\, d\omega$$

$$L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}\, f(x_1, \cdots, x_m)\, dx_1 \cdots dx_m = \int_\omega e^{-\sum_1^m{}_h p_h x_h}\, f\, d\omega.$$

La (5) si scrive allora:

$$(6)\qquad \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h\, p_h^2 + \lambda\right)^k L(u) = L(f) +$$

$$+ \sum_0^{k-1}{}_i \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h\, p_h^2 + \lambda\right)^i \int_\sigma \left\{ E_{k-i-1}(u)\, \frac{\partial e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}}{\partial \nu} - e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}\, \frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu} \right\} d\sigma.$$

Se fossero noti su σ i valori delle funzioni $E_{k-i-1}(u)$ (e quindi delle derivate $\frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu}$) la (6) determinerebbe immediatamente la trasformata $L(u)$, e, attraverso l'inversione di questa, l'incognita $u(x_1, \cdots, x_m)$. Possiamo però egualmente valerci della (6) per ottenere la u, estendendo un procedimento utilizzato in un precedente lavoro [1].

Supponiamo dapprima

$$(7)\qquad k > \frac{m-2}{2}.$$

In tal caso, posto

$$(8)\qquad G(x_1, \cdots, x_m) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi})^{m-2}\, 2^{2k}\, (k-1)!} \left(\dfrac{2r}{\sqrt{\lambda}}\right)^{k-\frac{m}{2}} J_{k-\frac{m}{2}}(r\sqrt{\lambda}) \\ \qquad \text{nei punti del dominio } \tau, \\ 0 \qquad \text{nei punti esterni a } \tau \end{cases}$$

(1) L. AMERIO, *Sull'applicazione della trasformata di Laplace all'integrazione di equazioni a derivate parziali senza alcun vincolo sul comportamento all'infinito della soluzione*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », vol. LXIII, 1942.

(dove $J_n(x)$ è la funzione di Bessel di ordine n), risulta, per quanto dimostreremo nel § 3,

$$L(G) = \frac{1}{\left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^k}. \tag{9}$$

Inoltre la G è trasformabile assolutamente per

$$\Re(p_1) > \sqrt{\sum_2^m{}_h R^2(p_h) + |\lambda|}. \tag{10}$$

Se $(p_1, \cdots, p_m)$ soddisfano alla (10) risulta allora:

$$\frac{L(f)}{\left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^k} = L(f * G(x_1, \cdots, x_m)) \tag{11}$$

ed è, per la (8),

$$f * G(x_1, \cdots, x_m) = \tag{12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \cdots, y_m)\, G(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)\, dy_1 \cdots dy_m =$$

$$= \int_{\omega_P} f(y_1, \cdots, y_m)\, G(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)\, dy_1 \cdots dy_m,$$

dove ω_P è la parte di ω contenuta nel semicono retrogado col vertice nel punto $P(x_1, \cdots, x_m)$.

Posto

$$w(x_1, \cdots, x_m) = u(x_1, \cdots, x_m) - f * G(x_1, \cdots, x_m), \tag{13}$$

dalle (6) e (11) segue allora:

$$L(w) = \frac{1}{\left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^k} \sum_0^{k-1}{}_i \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^i \int_\sigma \left\{ E_{k-i-1}(u)\, \frac{\partial e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}}{\partial \nu} - \right. \tag{14}$$

$$\left. - e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h} \frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu} \right\} d\sigma.$$

Il secondo membro *non* è noto esplicitamente. *Possiamo però dedurre dalla* (14) *che nei punti interni a* ω *la funzione* w *è nulla.*

Sia infatti $\psi(x_1, \cdots, x_m)$ una qualsiasi funzione continua in tutto lo spazio S_m con le sue derivate parziali fino all'ordine $2k - 1$ incluso, nulla nei punti esterni a τ e trasformabile assolutamente insieme a tali derivate per $(p_1, \cdots, p_m)$ soddisfacenti alla (10). Supponiamo inoltre che il com-

portamento all'infinito di ψ e delle sue derivate sia tale che possano applicarsi le formule fondamentali della trasformazione di Laplace:

$$L\left(\frac{\partial^h \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}\right) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} L(\psi) \qquad (h = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \leq 2k - 1).$$

Posto allora

$$\psi_i(x_1, \cdots, x_m) = E_i(\psi(x_1, \cdots, x_m)),$$

risulta

$$\left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^i L(\psi) = L(\psi_i)$$

e inoltre, per note proprietà della trasformata di Laplace,

$$(15)\quad \begin{cases} \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^i L(\psi)\, e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h} = L(\psi_i(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)), \\ \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^i L(\psi) \frac{\partial e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}}{\partial \nu} = L\left(\frac{\partial}{\partial \nu} \psi_i(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)\right). \end{cases}$$

Si ha perciò

$$(16)\quad L(\psi) \sum_0^{k-1}{}_i \left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^i \int_\sigma \left\{ E_{k-i-1}(u) \frac{\partial e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h}}{\partial \nu} - e^{-\sum_1^m{}_h p_h y_h} \frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu} \right\} d\sigma =$$

$$= L\left(\sum_0^{k-1}{}_i \int_\sigma \left\{ E_{k-i-1}(u) \frac{\partial \psi_i(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)}{\partial \nu} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \psi_i(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m) \frac{\partial E_{k-i-1}(u)}{\partial \nu} \right\} d\sigma \right) = L(F(x_1, \cdots, x_m))$$

e quindi dalla (13) segue

$$L(\psi) L(w) = \frac{L(F)}{\left(p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right)^k},$$

cioè, per la (9),

$$(17) \qquad L(\psi * w) = L(F * G).$$

Ora, per la definizione di $\psi(x_1, \cdots, x_m)$, le funzioni

$$\psi_i(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m) \quad , \quad \frac{\partial \psi_i(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)}{\partial \nu}$$

sono nulle in tutti i punti $P(x_1, \cdots, x_m)$ esterni al semicono diretto col vertice nel punto $Q(y_1, \cdots, y_m)$. In particolare, comunque si prenda Q su σ, tali funzioni risultano nulle nei punti P interni al semicono retrogrado col vertice in R. Perciò nei punti interni a T_R segue dalla (16)

$$F(x_1, \cdots, x_m) = 0.$$

Per la (8) si ha allora, nei medesimi punti,

$$(18)\qquad F * G(x_1, \cdots, x_m) = \int_{T_P} F(y_1, \cdots, y_m)\, G(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)\, dT_P = 0,$$

perchè T_P è contenuto in T_R.

Si ricava perciò dalle (17) e (18) nei punti interni a T_R (e in particolare nei punti interni a ω),

$$(19)\qquad \psi * w(x_1, \cdots, x_m) = 0,$$

qualunque sia la funzione ψ soddisfacente alle condizioni dianzi indicate. *Ora ciò implica che sia, entro* ω,

$$(20)\qquad w(x_1, \cdots, x_m) = 0.$$

Infatti dalle (13) segue che w è funzione continua internamente a ω. Supponiamo ora che in un punto $\overline{P}(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m)$ interno a ω risulti, ad esempio, $w > 0$. Per la continuità, sarà $w(P) > 0$ in tutto un intorno ipersferico $\left(\sum_1^m (x_i - \bar{x}_h)^2 \leq \delta^2\right)$ contenuto in ω. Se allora prendiamo $\psi(x_1, \cdots, x_m) = 0$ nei punti di τ esterni all'ipersfera col centro nell'origine e raggio δ, $\psi(x_1, \cdots, x_m) > 0$ nei punti interni al dominio τ_δ formato coi rimanenti punti di τ (ad esempio, può porsi in τ_δ

$$\psi(x_1, \cdots, x_m) = \left(x_1^2 - \sum_2^m{}_h\, x_h^2\right)^{2k} \left(\delta^2 - \sum_1^m{}_h\, x_h^2\right)^{2k}),$$

risulta

$$\psi * w(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m) = \int_{\tau_\delta} \psi(y_1, \cdots, y_m)\, w(\bar{x}_1 - y_1, \cdots, \bar{x}_m - y_m)\, dy_1 \cdots dy_m > 0,$$

contro la (19).

La (20) è perciò dimostrata.

Dalle (8), (12) e (13) si ricava perciò, nei punti interni a ω, la formula risolutiva del problema di Cauchy:

$$(21)\qquad u(P) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{m-2}\, 2^{2k}\, (k-1)!} \int_{\omega_P} f(Q) \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}\, r(P-Q)}\right)^{k-\frac{m}{2}} J_{-k+\frac{m}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r(P-Q))\, d\omega.$$

Sia infine

$$k \leq \frac{m-2}{2}.$$

In tale ipotesi ci si riconduce al caso precedentemente trattato applicando a entrambi i membri della (1) l'operatore E_j e scegliendo j in modo che risulti

$$k + j > \frac{m-2}{2}.$$

Si deve allora risolvere il problema di Cauchy per l'equazione

$$E_{k+j}(u) = E_j(f)$$

e i valori, non esplicitamente assegnati, delle derivate

$$\left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial x_1^{2k}}\right)_S, \cdots, \left(\frac{\partial^{2(k+j)-1} u}{\partial x_1^{2(k+j)-1}}\right)_S,$$

si calcolano, come è ben noto, mediante derivazioni, a partire dai dati e dalla (1).

Matematica. — *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico* (*). Nota (**) di GAETANO FICHERA, presentata dal Socio M. PICONE.

Il problema dell'esistenza in un dominio limitato D di una funzione bi-iperarmonica u, della quale siano stati assegnati i valori suoi e della sua derivata normale sulla frontiera $\mathfrak{F}D$ di D, non mi pare abbia avuto una generale soluzione quando si supponga D appartenente ad uno spazio a quante si vogliano dimensioni, di connessione qualsiasi ed inoltre con una frontiera che presenti delle singolarità. Le ricerche sull'argomento, infatti, sono relative a dominii ad unico contorno del piano o dello spazio ordinario, per i quali si renda possibile una rappresentazione conforme sul cerchio, oppure si escluda che la frontiera presenti vertici o spigoli o discontinuità nelle curvature.

La dimostrazione del teorema d'esistenza che mi permetto di esporre in questa Nota, oltre ad essere libera dalle sopradette restrizioni, mi sembra presenti anche qualche interesse per la sua semplicità concettuale.

Maggiori dettagli verranno dati in una Memoria dedicata alle equazioni e ai sistemi di equazioni alle derivate parziali della fisica-matematica, attualmente in corso di preparazione.

Sia D un dominio limitato di uno spazio euclideo ad r dimensioni. Suppongo che $\mathfrak{F}D$ possa decomporsi in un numero finito di ipersuperficie di classe 2.

Premetto il seguente lemma ed avverto che con n_M indico la normale nel punto M di $\mathfrak{F}D$ orientata positivamente verso l'interno di D.

« Se $\varphi(Q)$ è una funzione hölderiana in ogni dominio interno a D e di quadrato sommabile in D, per quasi tutti i punti M di $\mathfrak{F}D$ riescono sommabili in D le due funzioni di Q

$$(1) \qquad \varphi(Q)\frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} \qquad \varphi(Q)\frac{d}{dn_M}\frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1948.

avendosi

$$(2) \qquad \lim_{P \to M \left(\text{su } \eta_M^{\pm}\right)} \int_D \varphi(Q) \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T = \int_D \varphi(Q) \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T,$$

$$(3) \qquad \lim_{P \to M \left(\text{su } \eta_M^{\pm}\right)} \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T = \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T \text{ »}.$$

Per $r = 2$ a $\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}$ va sostituito log $\overline{PQ}$.

Dimostrerò soltanto la (3), dato che alla (2) si perviene in modo analogo ed anzi con maggiore facilità. Per brevità suppongo $r > 2$.

Poichè si ha

$$\left| \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} \right| \leq |\varphi(Q)| \frac{r-2}{\overline{MQ}^{r-1}}$$

e dato che $\int_{\mathfrak{S}D} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-1}} d_M \sigma$ è hilbertiana su D è ovvia la sommabilità in D della seconda delle due funzioni (1). Sia Σ una porzione di ipersuperficie regolare di classe 2 facente parte della frontiera di D e tale che detta Σ_ρ^+ la ipersuperficie ad essa parallela, posta ad una distanza ρ da Σ dalla parte della normale positiva, si possa determinare $\rho_0 > 0$ in modo che per $0 \leq \rho \leq \rho_0$, l'insieme descritto da Σ_ρ^+ appartenga a D. Sia inoltre L una costante positiva per la quale si abbia al variare di ρ nell'intervallo chiuso $(0, \rho_0)$.

$$\int_D \left[\int_{\Sigma^+} \frac{r-2}{\overline{PQ}^{r-1}} d_P \sigma \right]^2 d_Q T < L \text{ (1)}.$$

Voglio dimostrare che, comunque si assuma su Σ l'insieme misurabile E, dettone E_ρ^+ il corrispondente su Σ_ρ, si ha uniformemente rispetto ad E

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{E_\rho^+} d_P \sigma \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_P} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T = \int_E d_P \sigma \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T.$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia T_ε un dominio interno a D tale che sia

$$\int_{D - T_\varepsilon} |\varphi(Q)|^2 d_Q T < \frac{\varepsilon^2}{9 L}.$$

(1) Si ha:

$$\int_D \left[\int_{\Sigma_\rho^+} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-1}} d_P \sigma \right]^2 d_Q T = \int_{\Sigma_\rho^+} \int_{\Sigma_\rho^+} d_P \sigma \, d_M \sigma \int_D \frac{1}{\overline{PQ}^{r-1}} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-1}} d_Q T < B \int_{\Sigma_\rho^+} \int_{\Sigma_\rho^+} \frac{1}{\overline{MP}^{r-2}} d_P \sigma \, d_M \sigma$$

con B costante positiva, ed è facile constatare che quest'ultimo integrale è funzione continua di ρ.

Esiste un conveniente ρ_ε, che suppongo minore di ρ_0, tale che per $\rho < \rho_\varepsilon$ si ha, qualunque sia E

$$\left| \int_{E_Q^+} d_P \sigma \int_{T_\varepsilon} \varphi(Q) \frac{d}{dn_P} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T - \int_E d_M \sigma \int_{T_\varepsilon} \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Abbiamo allora per $\rho < \rho_\varepsilon$ e qualunque sia E

$$\left| \int_{E_Q^+} d_P \sigma \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_P} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T - \int_E d_M \sigma \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{E_Q^+} d_P \sigma \int_{T_\varepsilon} \varphi(Q) \frac{d}{dn_P} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T - \int_E d_M \sigma \int_{T_\varepsilon} \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T \right| +$$

$$+ \left| \int_{\Sigma_Q^+} d_P \sigma \int_{D-T_\varepsilon} |\varphi(Q)| \frac{r-2}{\overline{PQ}^{r-1}} d_Q T \right| + \left| \int_\Sigma d_M \sigma \int_{D-T_\varepsilon} |\varphi(Q) \frac{r-2}{\overline{MQ}^{r-1}} d_Q T \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\int_{D-T_\varepsilon} |\varphi(Q)|^2 dT \cdot \int_D \left[\int_{\Sigma_Q^+} \frac{r-2}{\overline{PQ}^{r-1}} d_P \sigma \right]^2 d_Q T} +$$

$$+ \sqrt{\int_{D-T_\varepsilon} |\varphi(Q)|^2 dT \cdot \int_D \left[\int_\Sigma \frac{r-2}{\overline{MQ}^{r-1}} d_M \sigma \right]^2 d_M T} < \varepsilon.$$

Ciò prova il nostro asserto. Ne segue che la funzione del punto P di Σ_Q^+ $\int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T$ converge in misura, quando $\rho \to 0$, alla funzione del punto M di Σ: $\int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_M T$ [2], e quindi per un noto teorema sulla convergenza in misura, fissato quasi ovunque M in Σ esiste una successione di punti $\{P_k\}$ su n_M^+, tale che $\lim_{k \to \infty} P_k = M$ e riuscendo

$$(4) \qquad \lim_{k \to \infty} \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{P_k Q}^{r-2}} d_Q T = \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T.$$

Siano: $x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots, u_{r-1})$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ le equazioni parametriche di Σ e $A_{u_1 \cdots u_{r-1}}$ il suo dominio base. Consideriamo per $0 \leq \rho \leq \rho_0$ il sistema di coordinate curvilinee $(u_1, \cdots, u_{r-1}, \rho)$ a ipersuperficie parallele dato dalla trasformazione

$$(5) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots, u_{r-1}) + \rho \alpha_i(u_1, u_2, \cdots, u_{r-1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

(2) Cfr. G. FICHERA, *Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale.* [« Portugaliæ Mathematica », vol 4, 1943, p. 17 teor. XVI].

essendo $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ i coseni direttori della normale a Σ nel punto variabile M. Supponiamo che ρ_0 sia abbastanza piccolo da riuscire

$$J(u_1, \cdots, u_r, \rho) \geq m > 0, \tag{6}$$

avendo indicato con J lo jacobiano della trasformazione (5).

Diciamo S lo strato descritto da Σ_ρ al variare di ρ nell'intervallo chiuso $(0, \rho_0)$, e pòsto

$$F(x_1, \cdots, x_r) = \int_D \varphi(Q) \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T$$

consideriamo in $S - \mathfrak{F}S$ la funzione

$$g(P) = g(M, \rho) = \sum_{ik}^{1\ r} \alpha_i \alpha_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Poichè le derivate seconde di F sono sommabili in S [3], tale risulta $g(P)$ e si ha

$$\int_S g(P)\, dT = \int_0^{\rho_0} d\rho \int_{A_{u\tau}} g[\varphi_1 + \rho\alpha_1, \cdots, \psi_r + \rho\alpha_r] J\, du_1 \cdots du_r$$

Per la (6) ne segue che nel cilindro dello spazio $(u_1, \cdots, u_r, \rho)$ di base $A_{u_1, \ldots, u_r}$ ed altezza ρ_0, nel quale si rappresenta S, è sommabile la funzione $g[\varphi_1 + \rho\alpha_1, \cdots, \varphi_r + \rho\alpha_r]$. Ne segue che per quasi tutti i punti $(u_1, \cdots, u_r)$ di $A_{u_1, \ldots, u_r}$, cioè per quasi tutti i punti M di Σ ha senso l'integrale

$$\int_0^{\rho_0} g(M, \rho)\, d\rho.$$

Ne viene allora che la funzione di ρ

$$-\int_\varrho^{\rho_0} g(M, \tau)\, d\tau$$

è convergente per $\rho \to 0$, ma tale funzione altro non è – a meno di una costante additiva – che

$$\frac{d}{dn_M} F(P) = \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_T(Q)$$

considerata per P su n_M^+.

(3) Cfr. L. LICHTENSTEIN, *Ueber das Poissonsche Integral.* [« Journal für die reine und angewandte Mathematik ». Band 141, 1912, pp. 12-42] e FRIEDRICHS, *A theorem of Lichtenstein.* [« Duke Mathematical Journal », *14*, 1947, pp. 67–82].

In virtù della (4) segue

$$\lim_{P \to M\left(su\ n_M^+\right)} \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}} d_Q T = \int_D \varphi(Q) \frac{d}{dn_M} \frac{1}{\overline{MQ}^{r-2}} d_Q T .$$

Con eguale ragionamento si dimostra l'analoga relazione su n_M^-, con che è provata la (1).

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di esistenza per il problema bi-iperarmonico. Siano $f(M)$ e $g(M)$ due funzioni continue su $\mathfrak{F}D$ per le quali supporremo che esista una funzione $H(P)$ continua in D assieme alle derivate prime, avente le derivate seconde di quadrato sommabile in D, e verificante le condizioni

$$H = f \quad , \quad \frac{dH}{dn} = g \qquad \text{su } \mathfrak{F}D. \tag{7}$$

Indichiamo con Γ la classe delle funzioni u, analitiche in $D - \mathfrak{F}D$, per le quali esistono i limiti $\lim_{P \to M\left(su\ n_M^+\right)} u(P)$ e $\lim_{P \to M\left(su\ n_M^+\right)} \frac{du(P)}{dn}$, per quasi tutti i punti M di $\mathfrak{F}D$, e tali che sia $\Delta_2 u$ di quadrato sommabile in D.

Dimostreremo che esiste nella classe Γ una funzione u verificante in $D - \mathfrak{F}D$ l'equazione $\Delta_4 u = 0$ e per la quale si ha quasi ovunque su $\mathfrak{F}D$

$$\lim_{P \to M\left(su\ n_M^+\right)} u(P) = f(M) \quad , \quad \lim_{P \to M\left(su\ n_M^+\right)} \frac{du(P)}{dn} = g(M).$$

Considero il sistema completo di particolari funzioni armoniche $\{v_i(P)\}$, di cui mi sono valso in altri miei lavori [4], che, se D è ad unico contorno, si riduce a quello dei polimomî armonici omogenei. Suppongo di avere ortonormalizzato su D il sistema $\{v_i\}$.

Poniamo

$$c_i = \int_{\mathfrak{F}D} \left(f \frac{dv_i}{dn} - g v_i \right) d\sigma. \tag{8}$$

Si trae per le (7)

$$c_i = \int_D v_i \Delta_2 H \, dT.$$

Ne segue che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} c_i v_i$ è convergente in media in D e quindi, essendo di funzioni armoniche converge uniformemente nell'interno di D verso una funzione $\varphi(Q)$ armonica in $D - \mathfrak{F}D$ e hilbertiana in D. Poichè si ha per ogni i

$$c_i = \int_D \varphi v_i \, dT$$

(4) Cfr. G. FICHERA, *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche in tre variabili mediante successioni di particolari funzioni armoniche.* [Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, fasc. 5-6, pp. 508-511].

risulta per P esterno a D, ricordando la (8):

$$(9)\qquad \int_{\mathfrak{F}D}\left[f(Q)\frac{d}{dn_Q}\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}-g(Q)\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}\right]d_Q\sigma-\int_D\varphi(Q)\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}d_Q T=0.$$

Considerata per P interno a D la funzione

$$u(P)=\frac{1}{k_r}\int_{\mathfrak{F}D}\left[f(Q)\frac{d}{dn_Q}\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}-g(Q)\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}\right]d_Q\sigma-\frac{1}{k_r}\int_D\varphi(Q)\frac{1}{\overline{PQ}^{r-2}}d_Q T,$$

essendo k_r la nota costante che interviene nella formola di Green, si vede che essa è bi-iperarmonica in D — $\mathfrak{F}$D. È poi ovvio verificare, tenendo presenti i notissimi teoremi sul potenziale di semplice e doppio strato ed il lemma premesso, che, in virtù della (9), sono verificate le (7).

Calcolo numerico. — *Approssimazione per eccesso della più bassa frequenza di una piastra ellittica omogenea incastrata* (*). Nota di Nicoletta Cotugno e Clelia Mengotti-Marzolla, presentata (**) dal Socio M. Picone.

Se E è una piastra incastrata lungo il suo bordo FE e che supporremo di forma ellittica, la determinazione della più bassa frequenza relativa ad una oscillazione propria di E, si riconduce, com'è noto, al calcolo del più piccolo autovalore λ_0^2 del seguente problema omogeneo al contorno:

$$(1)\qquad \Delta_4 u-\lambda^2 u=0,\quad \text{in } E,$$

$$(2)\qquad u=0,\quad \frac{du}{dn}=0,\quad \text{su } FE.$$

Considerato il funzionale

$$I[u]=\int_E[\Delta_2 u]^2\,dT$$

e la classe Γ delle funzioni continue in E con le derivate prime e seconde e verificanti la condizione (2) e la seguente:

$$\int_E u^2\,dT=1,$$

un ben noto teorema afferma che $I[u]$ ha minimo in Γ, che tale minimo è il più piccolo autovalore λ_0^2 del problema (1), (2), e che se u_0 è una minimante, essa è autosoluzione competente a λ_0^2. Da questo teorema segue che se Γ' è una classe di funzioni contenuta in Γ e se $I[u]$ ha minimo in Γ', tale minimo fornisce un valore approssimato per eccesso di λ_0^2.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.
(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

TABELLA I.

q	λ_0
1	10,216
0,9	11,443
0,8	13,229
0,7	15,928
0,6	20,195
0,5	27,378
0,4	40,649
0,3	69,163
0,2	149,89
0,1	583,10

Assumiamo come unità delle lunghezze il semiasse maggiore di E ed indichiamo con $q \leq 1$ la misura del semiasse minore. Sia (x, y) un sistema cartesiano ortogonale, avente l'asse x coincidente con l'asse maggiore dell'ellisse. Posto

$$x = \rho \cos\theta \quad , \quad \lambda = q\rho \operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

si avranno tutti i punti di E per

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

L'autosoluzione del problema (1), (2), per $\lambda^2 = \lambda_0^2$, essendo funzione analitica di x e di y in E, avrà, nell'intorno dell'origine, uno sviluppo del tipo

$$\sum_{h,k}^{\infty} a_{h,k}\, x^h y^k,$$

assolutamente convergente. Tale sviluppo, operate le sostituzioni (3), può scriversi, dopo facili considerazioni, al modo seguente

$$\alpha_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k(\rho)\cos k\theta + \beta_k(\rho)\operatorname{sen} k\theta],$$

con $\alpha_k(\rho)$ e $\beta_k(\rho)$ funzioni di questo tipo:

$$\alpha_k(\rho) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{kh}\rho^{k+2h} \quad , \quad \beta_k(\rho) = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{kh}\rho^{k+2h}.$$

Noi abbiamo assunto come classe Γ', quella percorsa dalla funzione (verificante le (2), analitica nell'origine)

$$(4)\quad v(\rho,\theta)=(1-\rho^2)^2\left[\alpha_{00}+\alpha_{01}\rho^2+\alpha_{02}\rho^4+(\alpha_{20}\rho^2+\alpha_{21}\rho^4)\cos 4\theta+\alpha_{40}\rho^4\cos 4\theta\right]$$

al variare dei parametri α_{00}, α_{01}, α_{02}, α_{20}, α_{21}, α_{40} in modo che riesca sempre

$$\int_{\Gamma} v^2\, d\Gamma = 1.$$

Nella Tabella I sono riportati i valori per eccesso di λ_0, che così si sono venuti a trovare, in relazione ai diversi valori di q.

È da tener presente che, calcolato il minimo di $I[u]$ in classi contenute in Γ' e che si ottengono assumendo, nella (4), uguale a zero qualcuno dei parametri α_{kh}, sono stati trovati valori di λ_0 che di assai poco sono superiori a quelli riportati nella Tabella I [1].

Geometria. — *Estensioni di gruppi discontinui e trasformazioni periodiche delle superficie.* Nota di W. Fenchel, presentata [*] dal Socio E. Bompiani.

Riassumiamo qui in seguito alcune ricerche eseguite a Copenaghen da un piccolo gruppo di matematici, al quale mi sono unito negli ultimi anni [1]. Iniziatore di queste ricerche è stato il professore Jakob Nielsen, che ha sviluppato una teoria profondissima delle trasformazioni topologiche, od omeomorfismi, di una superficie a connessione finita in se stessa. Il problema centrale consiste nello studio della struttura e nella caratterizzazione mediante invarianti algebrici delle classi di tali trasformazioni.

Si dice notoriamente che due trasformazioni di una superficie appartengono alla stessa classe, od anche che sono omotope, quando è possibile deformare con continuità l'una nell'altra. La classe che contiene una trasformazione topologica τ vien designata con $\{\tau\}$. Il prodotto $\{\tau_1\}\{\tau_2\}$ di due classi è per definizione la classe $\{\tau_1\tau_2\}$ contenente il prodotto $\tau_1\tau_2$. (Siccome conviene trattare i simboli di trasformazioni come simboli di funzioni, le trasformazioni di un prodotto si intendono eseguite nell'ordine da destra a sinistra). In particolare, avremo da considerare le potenze $\{\tau\}^n = \{\tau^n\}$ di una classe.

Il più importante invariante topologico di una superficie è il suo gruppo fondamentale F di Poincaré, cioè il gruppo delle curve chiuse orientate,

(1) Cf. E. Astolfo, *Valutazione per eccesso della più bassa frequenza nelle oscillazioni proprie di una piastra ellittica omogenea incastrata.* «Ricerca Scientifica e Ricostruzione», anno 17°, n. 12, dicembre 1947. C. N. R. Roma.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Su quest'argomento ho riferito al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pisa, 23–26 settembre 1948).

uscenti da un punto fisso arbitrario, dove il prodotto di due curve è la curva composta da queste, percorse l'una dopo l'altra, e dove non si fa distinzione tra curve omotope fra loro. Questo gruppo può essere rappresentato nel piano non-euclideo iperbolico come un gruppo discontinuo di movimenti. Considerando per esempio l'interno D del cerchio unità E del piano dei numeri complessi come modello di Poincaré del piano non-euclideo, i movimenti non euclidei sono rappresentati da quelle trasformazioni lineari della variabile complessa che trasformano D in se stesso, ed il gruppo F compare come un gruppo discontinuo, del tipo ben noto dalla teoria delle funzioni automorfe. La rappresentazione di F può essere scelta in modo che tutti gli elementi distinti dall'identità siano trasformazioni iperboliche, cioè con due punti uniti distinti sul cerchio unità. Nel linguaggio non-euclideo una tale trasformazione chiamasi una traslazione. La retta non-euclidea i cui punti all'infinito sono i suddetti punti uniti è mutata in sè dalla traslazione, e si chiama l'asse di questa. Diremo positivo quello dei punti uniti verso il quale muove la traslazione.

Siano $f_0, f_1, \cdots$ gli elementi di F e z un punto arbitrario di D. L'insieme delle immagini $f_0 z, f_1 z, \cdots$ di z non ha punti d'accumulazione in D, e si chiama la classe di equivalenza Fz di z. Le classi Fz possono considerarsi come punti di una varietà astratta a due dimensioni, D modulo F, che è topologicamente identica alla superficie originaria, ma risulta in più provvista di una metrica non-euclidea, ed è dunque una superficie pseudosferica. Un modo noto più intuitivo di costruire questa superficie è il seguente: Si consideri un poligono fondamentale del gruppo F, cioè un dominio poligonale non-euclideo che contenga un punto ed uno solo di ogni classe Fz; i suoi lati sono fra loro equivalenti due a due, ed identificando lati equivalenti si ottiene la superficie D modulo F. Il piano non-euclideo può essere considerato come la superficie di ricoprimento universale della superficie D modulo F. Alle rette non-euclidee di D corrispondono le geodetiche su D modulo F, e in particolare le geodetiche chiuse corrispondono agli assi degli elementi di F.

Consideriamo ora una trasformazione topologica τ di D modulo F in sè, e ritorniamo per un momento alla definizione originaria di F come gruppo delle curve chiuse uscenti da un punto fisso P. Sia f un elemento di F. L'immagine τf è una curva chiusa uscente da τP, immagine di P. Designamo con c un arco arbitrario, ma fisso, legante P e τP ed orientato da P verso τP. La curva $c^{-1}(\tau f)c = f'$ (il prodotto letto da destra a sinistra e l'esponente -1 indicando che la curva va percorsa nel senso opposto) è un'elemento di F. Si vede facilmente che la corrispondenza $f \to f'$, ove f percorra il gruppo F, è un automorfismo di F dipendente solamente della classe $\{\tau\}$ di τ. Quando si sostituisce c con un altro arco fisso d, si ottiene $f_0 f' f_0^{-1}$ invece di f', ove f_0 designa la curva chiusa $d^{-1}c$, elemento di F. Dunque alla classe $\{\tau\}$ corrisponde una «famiglia» di automorfismi $f \to f_0 f' f_0^{-1}$, i quali si ottengono da una $f \to f'$ per «trasformazione» con un elemento arbitrario f_0 di F. In particolare la famiglia dei cosiddetti automorfismi interni $f \to f_0 f f_0^{-1}$ cor-

risponde alla classe dell'identità. A classi diverse di omeomorfismi corrispondono famiglie diverse di automorfismi.

Interpretiamo di nuovo F come gruppo di movimenti non-euclidei. Un automorfismo $f \to f'$ di F fa corrispondere l'asse di f' all'asse di f, il punto unito positivo di f' al punto unito positivo di f. In questo modo dà luogo ad una trasformazione biunivoca dell'insieme dei punti uniti degli elementi di F in se stesso. Un automorfismo indotto da un omeomorfismo della superficie D modulo F gode della proprietà caratteristica di conservare l'ordine ciclico su E dei punti uniti, e si dice un automorfismo geometrico. Lo studio di una classe di omeomorfismi di una superficie viene così liberato dalle difficoltà topologiche e ridotto allo studio delle famiglie di automorfismi geometrici di un gruppo discontinuo di movimenti non-euclidei. Questo è il fondamento della teoria del Nielsen.

Vengo infine a parlare di un problema importante della teoria, al quale ho potuto contribuire personalmente. Prima di formularlo, osservo che i gruppi discontinui di movimenti non-euclidei si distribuiscono in tipi, ognuno determinato (nei casi qui considerati) dal genere e dal numero dei contorni della superficie corrispondente. I gruppi dello stesso tipo dipendono con continuità da certi parametri, che sono analoghi (ed anzi identici, nei casi delle superficie chiuse) ai moduli delle curve algebriche o delle superficie di Riemann di genere dato.

Un automorfismo geometrico esterno α e gli automorfismi interni del gruppo F di movimenti non-euclidei generano insieme un gruppo A di automorfismi geometrici, il quale contiene il gruppo I degli automorfismi interni – evidentemente isomorfo ad F – come sottogruppo invariante. Per conseguenza A può considerarsi come un'estensione astratta di F. Il gruppo quoziente A/I è un gruppo ciclico generalmente infinito, ma finito d'ordine n, quando α^n sia un automorfismo interno ed n denoti il minimo esponente positivo avente questa proprietà. In tal caso α dicesi un automorfismo geometrico d'ordine n.

Siamo ora in grado di formulare il teorema in questione:

Dato un gruppo discontinuo F *di movimenti non-euclidei ed un suo automorfismo geometrico* α *d'ordine* n, *è possibile di variare i moduli di* F *in modo da dedurne un altro gruppo* F' *dello stesso tipo, dove l'automorfismo* α *si lascia realizzare con un movimento a. Aggregando a al gruppo* F' *si ottiene un gruppo discontinuo di movimenti isomorfo al gruppo* A *generato da* α *e dagli automorfismi interni di* F.

L'esistenza di un automorfismo d'ordine finito indica una certa simmetria astratta del gruppo F, ed il teorema dice che F può « deformarsi » in guisa tale che la simmetria diventi tale in senso metrico. Per dimostrare il teorema si considera la varietà dei poligoni canonici dei gruppi del tipo di F. Questa varietà di ricoprimento della varietà dei moduli è omeomorfa ad uno spazio euclideo secondo un teorema di R. Fricke. L'automorfismo dato di ordine n vi induce un omeomorfismo periodico d'ordine n (la cui n^{esima} potenza è l'identità). Si tratta di dimostrare che questo ha un punto unito. Ciò si

fa applicando ripetutamente un teorema di P. A. Smith, secondo cui ogni omeomorfismo periodico di uno spazio euclideo il cui ordine sia un numero primo ha sempre almeno un punto unito.

Una conseguenza immediata dell'anzidetto teorema è l'importante teorema seguente dovuto al Nielsen:

Ogni classe di omeomorfismi di una superficie in sè, la cui n^{esima} potenza è la classe dell'identità, contiene un omeomorfismo periodico d'ordine n.

Nel caso di una superficie chiusa si ottiene un risultato forse un poco più intuitivo:

Data una superficie di Riemann chiusa ed una sua classe di omeomorfismi, la cui n^{esima} potenza sia la classe dell'identità, si possono variare i moduli in guisa tale che la nuova superficie ammetta una trasformazione birazionale in sè, periodica d'ordine n e appartenente alla classe data.

Analisi matematica. — *I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata(*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. In una comunicazione fatta al III Congresso dell'Un. Mat. It. ho dato senza dimostrazione le espressioni esplicite dei funzionali derivati di alcuni funzionali particolarmente importanti (1).

In questa Nota mi propongo di mostrare come si ricavino tali espressioni dei *funzionali derivati*, e quindi anche le espressioni delle *variazioni*, per *il nucleo risolvente* e per i cosiddetti *funzionale determinante* e *nucleo associato* di un nucleo dato, dimostrando così le formule (A), (B), (C), enunciate nella detta comunicazione.

2. Ricordiamo perciò che una volta ridotta una qualunque equazione funzionale lineare nel campo analitico alla forma « canonica »

$$(1) \qquad y(\xi) = f(\xi) + \lambda k(\xi, \mathring{t})\, y(\mathring{t})$$

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Per tutte le definizioni e proprietà dei funzionali analitici, e in particolare per quelle che si riconnettono alla presente Nota, cfr. i miei seguenti lavori, che saranno indicati con le lettere premesse ai rispettivi titoli:

Com. – *I funzionali derivati del nucleo risolvente, degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo dato.* Comunicazione al III Congr. U. M. I. (1948).

E. F. – *Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso*, «Rend. Lincei», ser. 6ª, vol. 9 (1929).

F. A. – *I funzionali analitici.* «Mem. Lincei», ser. 6ª, vol. 3°, fasc. 11 (1930).

D. V. – *I funzionali delle funzioni di due variabili.* «Mem. Acc. Italia», vol. II (1931).

T. F. – *Teoria de los funcionales analiticos.* «Seminario Matematico di Barcellona» (1943).

(f = termine noto, k = nucleo dell'equazione, y = funzione incognita), o anche, ricordando l'espressione esplicita del « prodotto funzionale simmetrico » che figura all'ultimo membro (cfr. F. A., n. 35),

$$(2) \qquad y(\zeta) = f(\zeta) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C k\left(\zeta, \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t}\, y(t)\, dt$$

la formula risolutiva è ancora data, sotto ipotesi molto generali (cfr. la (9) di E. F.), da

$$(3) \qquad y(\zeta) = f(\zeta) + \lambda R(\lambda; \zeta, \overset{\circ}{t}) f(\overset{\circ}{t})$$

ove abbiamo indicato con R il cosiddetto *nucleo risolvente*, e cioè la somma della serie

$$(4) \qquad R(\lambda; \zeta, t) = \sum_1^\infty{}_n \lambda^{n-1} \overset{\circ}{k}{}^n(\zeta, t)$$

certo convergente, per $|\lambda|$ abbastanza piccolo, e con $\overset{\circ}{k}{}^n(\zeta, t)$ la potenza n^{esima} di composizione simmetrica (cfr. F. A., n. 67) del nucleo k, e cioè

$$(5) \qquad \overset{\circ}{k}{}^0(\zeta, t) = \frac{1}{1 - \zeta t}\,, \quad \overset{\circ}{k}{}^1(\zeta, t) = k(\zeta, t)\,,$$

$$\overset{\circ}{k}{}^n(\zeta, t) = \overset{\circ}{k}{}^{n-1}(\zeta, \overset{\circ}{\tau})\, k(\overset{\circ}{\tau}, t) \quad \text{per } n \geqq 2\,.$$

Estendendo facilmente i metodi di Fredholm allo studio dell'equazione (2), che ha appunto l'aspetto di un'equazione integrale di 2ª specie, abbiamo anzi mostrato in E. F. che il nucleo risolvente è anche in questo caso una funzione meromorfa di λ, e cioè il quoziente di due trascendenti intere in λ

$$(6) \qquad R(\lambda; \zeta, t) = \frac{D(\lambda; \zeta, t)}{D(\lambda)}$$

con

$$(7) \qquad D(\lambda) = 1 - \lambda I_1 + \frac{\lambda^2}{2!} I_2 - \cdots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} I_n + \cdots$$

$$(8) \qquad D(\lambda; \zeta, t) = k(\zeta, t) - \lambda c_1(\zeta, t) + \frac{\lambda^2}{2!} c_2(\zeta, t) \cdots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} c_n(\zeta, t) + \cdots$$

ove i coefficienti I_n e c_n si ottengono dai determinanti di elementi $k(\zeta_r, t_s)$, di ordine n e $n+1$ rispettivamente, applicando ad essi n funzionali tracce T_r rispetto alle coppie ζ_r, t_r e ricordando (cfr. D. V., n. 45) che tali tracce sono date da

$$(9) \qquad T_r[b(\zeta_r, t_r)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\tau}\, b\left(\tau, \frac{1}{\tau}\right) d\tau = b(\overset{\circ}{\tau}, \overset{\circ}{\tau})$$

Le due trascendenti intere (7), (8) sono dunque funzionali, evidentemente *analitici* del nucleo $k(\zeta, t)$ e anzi questi sviluppi ne dànno le espressioni in serie di *funzionali omogenei*, nell'intorno di $k = 0$, essendo I_n e c_n funzionali *omogenei* di k di ordine n e $n+1$ rispettivamente; $D(\lambda)$ è il cosiddetto *funzio-*

nale determinante di k, che indichiamo più completamente con $D[k(\xi, t); \lambda]$ (cfr. E. F.).

Poichè si ha evidentemente

$$T[c_n(\xi, t)] = I_{n+1} \tag{10}$$

e dato che la serie (8) è totalmente convergente, applicando la traccia termine a termine, come è permesso, si ha

$$T[D(\lambda; \xi, t)] = D(\lambda; \mathring{t}, \mathring{t}) = I_1 + \sum_1^\infty{}_n \frac{(-\lambda)^n}{n!} I_{n+1} = -D'(\lambda) \tag{11}$$

e quindi dalla (6).

$$T[R(\lambda; \xi, t)] = \frac{1}{D(\lambda)} T[D(\lambda; \xi, t)] = -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}. \tag{12}$$

Ma per $|\lambda|$ abbastanza piccolo, la serie (4) è pure totalmente convergente e quindi, applicando la traccia termine a termine, si ha

$$T[R(\lambda; \xi, t)] = \sum_1^\infty{}_n \lambda^{n-1} T[\mathring{k}^n(\xi, t)] = \sum_1^\infty{}_n \lambda^{n-1} \mathring{k}^n(\mathring{t}, \mathring{t}) \tag{13}$$

ove abbiamo indicato con $\mathring{k}^n(\mathring{t}, \mathring{t})$ la cosiddetta *traccia* n^{esima} *di k*, e cioè la traccia della potenza n^{esima} di composizione del nucleo k (cfr. D. V., n. 52). Eguagliando allora gli ultimi membri delle (12) e (13), e integrando rispetto a λ fra 0 e λ, si ha allora

$$\log D(\lambda) = -\sum_1^\infty{}_n \frac{\lambda^n}{n} \mathring{k}^n(\mathring{t}, \mathring{t}) \tag{14}$$

e cioè, per il funzionale determinante di k, l'espressione esplicita, per mezzo delle sole tracce n^{esime} *di k*:

$$D[k(\xi, t); \lambda] = e^{-\sum_1^\infty{}_n \frac{\lambda^n}{n} \mathring{k}^n(\mathring{t}, \mathring{t})}. \tag{15}$$

3. Vogliamo ora calcolare il funzionale *derivato simmetrico* (cfr. D. V., n. 48) di questo funzionale determinante, in un punto α, β, rispetto al nucleo k, che ora si pensa come variabile del funzionale. Basterà perciò calcolare il funzionale derivato del suo logaritmo e cioè

$$\mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \log D[k(\xi, t); \lambda] = \frac{1}{D} \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} D[k(\xi, t); \lambda] \tag{16}$$

(a causa delle regole di derivazione funzionale date in D. V. al n. 50 e in F. A. n. 86), per avere subito di qui il derivato di D.

Ma per $|\lambda|$ abbastanza piccolo (e poi per ogni λ diverso dai punti singolari, data la continuità analitica delle espressioni), si può nella serie (14) derivare funzionalmente termine a termine

$$\mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \log D[k(\xi, t); \lambda] = -\sum_1^\infty{}_n \frac{\lambda^n}{n} \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \mathring{k}^n(\mathring{t}, \mathring{t}) \tag{17}$$

e per calcolare i funzionali derivati delle tracce n^{esime}, possiamo applicare la formula già stabilita in D. V., n. 52, e cioè

$$(18) \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \mathring{k}^n(\mathring{t},\mathring{t}) = \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \mathrm{T}[\mathring{k}^n(\zeta,t)] = n\mathring{k}^{n-1}(\beta,\alpha)$$

e quindi la (17) diviene semplicemente

$$(19) \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \log \mathrm{D}[k(\zeta,t);\lambda] = -\lambda \sum_0^\infty{}_n \lambda^n \mathring{k}^n(\beta,\alpha).$$

Ma la serie che figura al 2° membro non è altro che il funzionale che in E. F. abbiamo chiamato il *nucleo associato* Γ del nucleo dato k

$$(20) \qquad \Gamma(\lambda;\zeta,t) = \sum_0^\infty{}_n \lambda^n \mathring{k}^n(\zeta,t) = \frac{1}{1-\zeta t} + \lambda \mathrm{R}(\lambda;\zeta,t)$$

che differisce dal *nucleo risolvente* R solo per il fattore λ e per il primo termine. Si ha dunque che *il funzionale derivato logaritmico del funzionale determinante coincide, a meno del fattore* $-\lambda$, *col nucleo associato, e si esprime quindi semplicemente anche per mezzo del nucleo risolvente con la formula*

$$(A) \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \log \mathrm{D}[k(\zeta,t);\lambda] = -\lambda\Gamma(\lambda;\beta,\alpha) = -\frac{\lambda}{1-\beta\alpha} - \lambda^2 \mathrm{R}(\lambda;\beta,\alpha).$$

4. Passiamo ora a calcolare il funzionale derivato di questo nucleo associato, che è pure, evidentemente, un *funzionale analitico* del nucleo dato k; da esso potremo poi ottenere facilmente anche il funzionale derivato del nucleo risolvente. Data la convergenza totale della serie a secondo membro della (20), per $|\lambda|$ abbastanza piccolo, potremo ancora derivare funzionalmente termine a termine, ottenendo così

$$(21) \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \Gamma(\lambda;\zeta,t) = \sum_0^\infty{}_n \lambda^n \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \mathring{k}^n(\zeta,t)$$

e poichè il funzionale derivato della potenza n^{esima} di composizione di k non è altro, per definizione, che il coefficiente di ε nello sviluppo della potenza n^{esima} di composizione del nucleo « variato » (per $n \geq 1$, mentre, per $n = 0$, $\mathring{k}^0$ è indipendente da k e quindi con derivato nullo)

$$(22) \qquad k(\zeta,t) + \frac{\varepsilon}{(1-\zeta\alpha)(1-t\beta)}$$

si ha

$$(23) \qquad \mathring{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \mathring{k}^n(\zeta,t) = \sum_1^n{}_r \mathring{k}^{r-1}(\zeta,\alpha)\mathring{k}^{n-r}(\beta,t) - \sum_0^{n-1}{}_r \mathring{k}^r(\zeta,\alpha)\mathring{k}^{n-r-1}(\beta,t).$$

D'altra parte è anche

$$(24) \qquad \Gamma(\lambda;\zeta,\alpha)\Gamma(\lambda;\beta,t) = \left\{\sum_0^\infty{}_r \lambda^r \mathring{k}^r(\zeta,\alpha)\right\}\left\{\sum_0^\infty{}_s \lambda^s \mathring{k}^s(\beta,t)\right\} =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \lambda^n \left\{\sum_0^n{}_r \mathring{k}^r(\zeta,\alpha)\mathring{k}^{n-r}(\beta,t)\right\}$$

e quindi risulta immediatamente *la formula fondamentale, che esprime il funzionale derivato del nucleo associato* Γ *mediante il prodotto di due degli stessi* Γ, *calcolati per altri valori dei parametri, cioè*

$$(B) \qquad \overset{\circ}{\mathfrak{D}}_{k(\alpha,\beta)} \Gamma(\lambda;\zeta,t) = \lambda \Gamma(\lambda;\zeta,\alpha)\,\Gamma(\lambda;\beta,t).$$

Sostituendo al posto di Γ la sua espressione per mezzo del nucleo risolvente data dall'ultimo membro della (20), e dividendo ambo i membri per λ, si ha poi *l'espressione del funzionale derivato simmetrico del nucleo risolvente*:

$$(C) \qquad \mathfrak{D}_{k(\alpha,\beta)} R(\lambda;\zeta,t) = \frac{1}{(1-\zeta\alpha)(1-\beta t)} + \frac{\lambda}{1-\beta t} R(\lambda;\zeta;\alpha) +$$

$$+ \frac{\lambda}{1-\zeta\alpha} R(\lambda;\beta,t) + \lambda^2 R(\lambda;\zeta,\alpha)\,R(\lambda;\beta,t).$$

5. Una volta ottenuti i funzionali derivati simmetrici dei funzionali considerati, è poi facile ottenere da tali espressioni quelle delle corrispondenti *variazioni*, cioè delle parti principali degli incrementi di questi funzionali, corrispondenti a una variazione infinitesima $\delta k(\zeta,t)$ del nucleo dato. Basterà infatti, per la stessa definizione dei funzionali derivati primi (cfr. D. V., n. 48, formula [22]), fare il prodotto funzionale simmetrico di questi per la variazione $\delta k(\alpha,\beta)$ del nucleo (variabile indipendente dei detti funzionali) *per ottenere così le espressioni delle variazioni.*

$$(A') \qquad \delta \log D[k(\zeta,t);\lambda] = -\lambda\Gamma(\lambda;\overset{\circ}{\beta},\overset{\circ}{\alpha})\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta}) =$$

$$= -\lambda\delta k(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\alpha}) - \lambda^2 R(\lambda;\overset{\circ}{\beta},\overset{\circ}{\alpha})\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta})$$

$$(B') \qquad \delta\Gamma(\lambda;\zeta,t) = \lambda\Gamma(\lambda;\zeta,\overset{\circ}{\alpha})\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta})\,\Gamma(\lambda;\overset{\circ}{\beta},t)$$

e infine

$$(C') \qquad \delta R(\lambda;\zeta,t) = \delta k(\zeta,t) + \lambda R(\lambda;\zeta,\overset{\circ}{\alpha})\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha},t) +$$

$$+ \lambda\delta k(\zeta,\overset{\circ}{\beta})\,R(\lambda;\overset{\circ}{\beta},t) + \lambda^2 R(\lambda;\zeta,\overset{\circ}{\alpha})\,\delta k(\overset{\circ}{\alpha},\overset{\circ}{\beta})\,R(\lambda;\overset{\circ}{\beta},t).$$

Analisi matematica. — *Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari.* Nota di FRANCO PELLEGRINO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

a) Osserva il Fréchet (1) che mentre la teoria classica delle funzioni s'è in sostanza sviluppata prima della teoria degli insiemi, non è possibile sperare in un progresso serio dello studio di enti più complessi delle funzioni (quali i funzionali), senza che prima non si siano studiati a fondo i campi dove questi enti sono definiti.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) M. FRÉCHET, *Les espaces abstraites*. Paris, 1928, p. 12.

Quest'osservazione è pienamente confermata dalla teoria dei funzionali analitici costruita dal Fantappiè [2]. In essa infatti la formula fondamentale integrale per mezzo della quale si esprime un qualsiasi funzionale lineare (e che poi è, come si capisce, d'importanza fondamentale per tutto il resto) è ottenuta ed ottenibile appunto in grazia di un teorema basilare sulle regioni funzionali lineari.

b) Qui vogliamo stabilire con dimostrazione *a priori*, e cioè usufruendo delle sole definizioni e prescindendo quindi dai risultati della teoria, alcune circostanze notevoli relative agli insiemi A con cui sono formati gli intorni (A, σ) di una stessa funzione, o di più funzioni, appartenenti ad una stessa regione funzionale R dove è definito un funzionale analitico F. Tali circostanze, tranne l'osservazione che costituisce il numero 1, riguardano tutte le regioni funzionali non lineari.

Viene più precisamente in definitiva dimostrato che, se una funzione $y(t)$ appartiene ad una regione funzionale R non lineare, dove sia definito un funzionale analitico non localmente costante, i vari insiemi chiusi A con cui si formano gli intorni (A, σ) di essa appartenenti ad R *hanno punti in comune fra loro e con tutti gl'insiemi chiusi, con cui si formano gli analoghi intorni di una qualunque altra funzione di* R.

Viene poi dimostrato che, se si ammette che tutti tali insiemi abbiano una parte comune $\underline{A}$ non vuota, $\underline{A}$ deve essere chiuso.

In un prossimo lavoro verrà stabilita l'esistenza di $\underline{A}$, con il che verrà provato che ogni regione funzionale non lineare è sempre contenuta in una regione lineare (quella $(\underline{A})$ individuata da $\underline{A}$).

Un caso particolare di questo risultato generale viene stabilito qui stesso (n. 5).

1. Cominciamo coll'osservare che

Se $y_0(t)$ *appartiene alla regione lineare* (A) *gli unici suoi intorni* $(\bar{A}, \sigma)$ *che appartengono ad* (A) *sono quelli per cui è* $\bar{A} \supseteq A$.

È intanto senz'altro evidente che se è $\bar{A} \supseteq A$ ogni intorno $(\bar{A}, \sigma)$ di y_0 è in (A). In tal caso infatti è $\{(\bar{A}, \sigma) \text{ di } y_0\} \subseteq \{(A, \sigma) \text{ di } y_0\} \subset (A)$.

Se poi è $\{(\bar{A}, \sigma) \text{ di } y_0\} \subset (A)$ è anche per un teorema già stabilito [3] $(\bar{A}) \subseteq (A)$ e quindi $\bar{A} \supseteq A$.

Del resto l'ipotesi $\{(\bar{A}, \sigma) \text{ di } y_0\} \subset (A)$ senza l'ulteriore condizione $\bar{A} \supset A$ porta subito all'assurdo poichè esisterebbero allora delle funzioni di $(\bar{A}, \sigma)$ di y_0 non regolari in A.

(2) Per una bibliografia completa sui funzionali analitici aggiornata però solo fino al 1939 vedi l'articolo: L. FANTAPPIÈ, *La teoria dei funzionali analitici, le sue applicazioni ed i suoi possibili indirizzi*. «Atti Convegno Volta», 1939, Acc. d'Italia. Per un sunto dei concetti e definizioni usati in questo lavoro vedi l'introduzione di H. G. HAEFELI und F. PELLEGRINO, *Ueber die Stetigkeit der analytischen Funktionale*, «C. M. H.», vol. 21, fasc. 3 (1948).

(3) L. FANTAPPIÈ, *Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones*. Barcelona, p. 24, n. 10 (1943).

2. Ciò posto dimostriamo ora il seguente

TEOREMA I. – *Se le funzioni* y_1 *ed* y_2 *appartengono ad una regione funzionale* R *ov'è definito un funzionale analitico* $F[y(t)]$ *e le loro regioni di definizioni* M_1 *e* M_2 *non hanno punti in comune è*

$$F[y_1(t)] = F[y_2(t)].$$

Siano infatti (A_1, σ_1) e (A_2, σ_2) due intorni rispettivamente di $y_1(t)$ e $y_2(t)$ appartenenti ad R, intorni che certamente esistono per essere R per ipotesi una regione.

Considerata allora la funzione $y(t)$ definita in $M_1 + M_2$ e coincidente con $y_1(t)$ in M_1 e con $y_2(t)$ in M_2, è evidente che essa appartiene a qualunque intorno (A_1, σ_1) di $y_1(t)$ e a qualunque intorno (A_2, σ_2) di y_2 e quindi intanto in essa F è definito. Inoltre $y(t)$ è prolungamento e di $y_1(t)$ e di $y_2(t)$ e allora per una delle proprietà di definizione d'un funzionale analitico è

$$F[y(t)] = F[y_1(t)] \quad \text{e} \quad F[y(t)] = F[y_2(t)]$$

da cui, come volevasi provare

$$F[y_1(t)] = F[y_2(t)].$$

Si ha inoltre il seguente

TEOREMA II. – *Date due funzioni* $y_1(t)$ *ed* $y_2(t)$ *appartenenti ad* R *e le cui regioni di definizione* M_1 *ed* M_2 *abbiano punti in comune, se esistono in* R *un intorno* (A_1, σ_1) *di* $y_1(t)$ *ed un intorno* (A_2, σ_2) *di* $y_2(t)$ *con* A_1 *ed* A_2 *privi di punti comuni è*

$$F[y_1(t)] = F[y_2(t)]$$

e anzi F *è costante per tutte le funzioni dei due intorni predetti.*

È infatti nelle ipotesi dell'enunciato è possibile trovare una regione $M_1 \subset M_1$ e una regione $\bar{M}_2 \subset M_2$ con $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ senza punti comuni e contenenti rispettivamente A_1 ed A_2. Se adesso in $\bar{M}_1$ si definisce la funzione $\bar{y}_1(t)$ che ivi prenda gli stessi valori che vi prende $y_1(t)$ e analogamente in $\bar{M}_2$ si definisce la funzione $\bar{y}_2(t)$ che in $\bar{M}_2$ prenda gli stessi valori che vi assume $y_2(t)$, per il teorema I è $F[\bar{y}_1(t)] = F[\bar{y}_2(t)]$. Ma per essere $y_1(t)$ prolungamento di $\bar{y}_1(t)$ e $y_2(t)$ prolungamento di $\bar{y}_2(t)$ è anche

$$F[y_1(t)] = F[\bar{y}_1(t)] = F[\bar{y}_2(t)] = F[y_2(t)].$$

Ne segue inoltre che F è costante addirittura per tutte le funzioni di tali due intorni. Presa infatti una qualsiasi funzione $y_3(t)$ di (A_2, σ_2) di y_2 o la sua regione di definizione M_3 ha punti in comune con M_1 o no. In quest'ultima ipotesi è per il teorema I: $F[y_1(t)] = F[y_3(t)]$, se invece avesse punti in comune non c'è che da considerare come prima le analoghe funzioni $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_3$ di cui y_1 e y_3 sono prolungamenti, definite in due regioni $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_3$ senza punti comuni, per concludere ancora $F[y_1(t)] = F[y_3(t)]$. Analogamente si prova che se $y_4(t)$ è una qualsiasi funzione dell'intorno (A_1, σ_1) di y_1 è $F[y_4(t)] = F[y_2(t)]$ e per essere $F[y_1(t)] = F[y_2(t)]$ ne segue l'asserto.

In particolare se ne deduce il

TEOREMA III. – *Se in una regione funzionale* R *non lineare si può definire un funzionale analitico* F *non localmente costante, l'insieme* A *con cui viene formato un qualsiasi intorno* (A, σ) *appartenente ad* R *di una sua funzione* y_0, *ha punti in comune con tutti gli altri insiemi chiusi con cui vengono formati tutti gli altri intorni di* y_0 *appartenenti ad* R.

E infatti, se in R sono contenuti due intorni (A_1, σ_1) e (A_2, σ_2) della stessa funzione $y_0\ t$ senza che A_1 e A_2 abbiano punti comuni, ci si riporta subito al caso precedente, considerando ancora due funzioni $y_1\ t$ di (A_1, σ_1) di $y_0\ t$ e $y_2\ t$ di (A_2, σ_2) di $y_0\ t$, di cui y_1 sia prolungamento e definite quindi rispettivamente in due regioni $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ contenute in M_0, ma che supporremo senza punti comuni come è evidentemente possibile. E infatti, osservato che F è definito in (A_1, σ_1) di y_1 e (A_2, σ_2) di y_2, coincidendo questi intorni rispettivamente con (A_1, σ_1) di y_0 e (A_2, σ_2) di y_0, ne segue appunto, per il teorema precedente, che F è costante in (A_1, σ_1) di $y_1\ t$ e (A_2, σ_2) di $y_2\ t$ e quindi anche negli intorni (A_1, σ_1) e (A_2, σ_2) di y_0 che coincidono con i precedenti.

Ogni insieme A con cui viene formato un intorno di $y_0\ t$ contenuto in R ha dunque punti in comune con tutti gli altri analoghi insiemi A.

Completeremo questo teorema al n. 5.

Possiamo intanto stabilire il seguente *Teorema fondamentale*.

TEOREMA IV. – *Se* $F[y\ t]$ *è un funzionale analitico non localmente costante, presa una funzione qualsiasi* $y\ (t$ *della sua regione* R *di definizione, l'insieme* A *con cui viene formato un suo qualsiasi intorno* (A, σ) *appartenente ad* R, *ha punti in comune con tutti gli altri insiemi chiusi con cui vengono formati tutti gli intorni appartenenti ad* R *di* y_0 *stessa e di tutte le altre funzioni di* R.

E infatti se così non fosse, anche per una sola funzione $y_1\ t$ coincidente, o no con $y_0\ t$, se cioè esistesse un intorno (A_1, σ_1) di $y_1\ t$ appartenente ad R ed A_1 non avesse punti in comune con A, per i teoremi II e III precedenti sarebbe, se $\bar{y}_0$ e $\bar{y}_1$ denotano rispettivamente le generiche funzioni di (A, σ) di y_0 e (A_1, σ_1) di y_1

$$F[\bar{y}_0(t)] = F[\bar{y}_1(t)] = F[y_0(t)] = F[y_1(t)]$$

e cioè F sarebbe costante nell'intorno (A, σ) di y_0, cioè localmente costante.

3. Questo teorema non dice però che tutti gli A hanno una parte comune. Se questa esiste essa è evidentemente una parte comune anche alle regioni di definizione di tutte le funzioni di R. *Viceversa* è interessante osservare che:

TEOREMA V. – *L'insieme dei punti comuni a tutte queste regioni di definizione coincide con l'insieme* $\underline{A}$ *dei punti comuni a tutti gli* $\underline{A}$ *sia che esso sia vuoto o no*).

È chiaro infatti che i punti comuni a tutti gli A sono comuni a tutte le regioni e che quindi il loro insieme $\underline{A}$ è contenuto nell'insieme A' dei punti

comuni a tutte le regioni. Viceversa possiamo dimostrare che anche $\underline{A}'$ è contenuto in $\underline{A}$ e quindi coincide con esso. Se infatti esistesse un punto P di $\underline{A}'$ fuori di $\underline{A}$ esisterebbe un A non contenente P e quindi un intorno (A, σ) di una conveniente funzione y_0 contenuto nella regione R, e la regione M_0 in cui y_0 è definita dovrebbe contenere P come tutte le altre regioni di definizione essendo P in $\underline{A}'$. Ora è evidente che esiste una funzione $\bar{y}_0$ definita come y_0 in una regione $\bar{M}_0$ parte della regione M_0 di definizione di y_0 che contenga ancora A, ma lasci fuori P e questa funzione $\bar{y}_0$ di cui y_0 è prolungamento appartiene ancora evidentemente ad R, ma il suo campo di definizione $\bar{M}_0$ non conterrebbe P contro l'ipotesi.

4. Su tale insieme $\underline{A}$ possiamo ancora dimostrare:

TEOREMA VI. – *La parte comune* $\underline{A}$, *agli insiemi* A *di cui si parla e quindi a tutte le regioni di definizione di tutte le funzioni di* R, *se esiste è un insieme chiuso.*

Basterà per questo dimostrare che l'insieme complementare $\underline{B}$ di $\underline{A}$ è una regione, e cioè che, se $P \subset \underline{B}$, a $\underline{B}$ appartiene anche tutto un intorno di P. Supponiamo dunque che P non sia in $\underline{A}$. In R esiste allora almeno una funzione, e sia $y_0(t)$, tale che almeno uno degli insiemi chiusi A (e sia A_1) con cui si formano gli intorni (A, σ) di y_0 appartenenti alla regione R non contiene P. Ciò è evidente, chè altrimenti P apparterrebbe ad $\underline{A}$. Detto allora δ il numero positivo che dà la distanza fra P e A_1 è chiaro che l'intorno δ' di P con $0 < \delta' < \delta$ non ha punti in comune con A_1 e quindi nemmeno con $\underline{A}$, dato che $A_1 \supset \underline{A}$. Ma ciò vuol dire che tutto l'intorno δ' di P è in $\underline{B}$, e cioè che $\underline{B}$ è una regione e quindi $\underline{A}$ un insieme chiuso.

5. Vogliamo ora completare, sia pure con dimostrazione non *a priori*, il teorema III stabilendo che

TEOREMA VII. – *Nelle ipotesi dell'enunciato del teorema III tutti gli intorni di una stessa funzione* $y_0(t)$ *contenuti in* R *sono tali che gli insiemi chiusi* A, *con cui essi sono formati, hanno una parte comune non vuota e chiusa* $\underline{A}_0$. *Inoltre* $\underline{A}_0$ *contiene le singolarità delle funzioni di una sola variabile:*

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

ottenute fissando $n-1$ *delle* α_i *fuori di* $\underline{A}_0$.

Tenuto presente quanto già stabilito col teorema III, ricordiamo la serie

$$F[y_0(t)+\varphi(t)] = F[y_0(t)] + \sum_n^{\infty} F^{(n)}[y_0(t); \overset{*}{\alpha}_1, \overset{*}{\alpha}_2, \cdots, \overset{*}{\alpha}_n]\varphi(\overset{*}{\alpha}_1)\varphi(\overset{*}{\alpha}_2)\cdots\varphi(\overset{*}{\alpha}_n)$$

con cui il Fantappiè[4] ha espresso ogni funzionale analitico F in un qualunque intorno d'una funzione y_0 dove F sia definito, e ricordiamo che i funzionali derivati $F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$, che in essa serie compaiono, sono

(4) Cfr. lavoro citato in (3), p. 85.

funzioni simmetriche degli indici di derivazione α_i, il che vuol dire che, fissati comunque $n-1$ di tali α_i fuori di A, se (A, σ) è un intorno di y_0 in R, in cui è valido lo sviluppo precedente, $F^{(n)}$ diventa una funzione di un solo α, e sia α_r, che è la stessa al variare di r. Tale funzione è una funzione analitica localmente ed è definita per α_r fuori di A. Ma allora, se i vari insiemi chiusi A con cui sono formati tutti gli intorni (A, σ) di y_0 appartenenti ad R non avessero una parte comune $\underline{A}_0$ non vuota, ogni punto α della sfera complessa risulterebbe sempre esterno ad almeno uno di tali A, e quindi per quanto abbiamo ora visto sarebbe regolare per le funzioni $F^{(n)}$. Dunque tali funzioni, per il teorema di Liouville, sarebbero costanti e anzi *addirittura nulle* poichè, com'è noto dalla teoria, esse sono nulle all'infinito. In questo caso dunque la serie di Fantappiè sopra riportata si ridurrebbe al solo primo termine:

$$F[y_0(t) + \varphi(t)] = F[y_0(t)]$$

essendo nulli tutti gli altri e quindi F assumerebbe lo stesso valore per tutte le funzioni di tutti gli intorni di y appartenenti ad R, sarebbe cioè localmente costante contro l'ipotesi. Escluso dunque il caso che F sia localmente costante, l'esistenza dell'insieme $\underline{A}_0$ in discorso è assicurata ed è chiaro che esso contiene le singolarità dei funzionali derivati perchè le funzioni $F^{(n)}[y_0(t); \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$, precisate come nell'enunciato, sono sicuramente definite fuori di $\underline{A}_0$.

Ci resta ora da far vedere che tale insieme $\underline{A}_0$ è un insieme chiuso.

E infatti consideriamo tutte le funzioni $y_1(t), y_2(t), \cdots$ di cui $y_0(t)$ è prolungamento ed *appartenenti ancora ad* R.

Queste $y_r(t)$ si possono porre sotto la forma

$$y_r(t) = y_0(t) + u_r(t)$$

dove $u_r(t)$ è una funzione definita solo in quella regione M_r contenuta in M_0, in cui è definita y_r ed è ivi evidentemente nulla. Distribuiamo allora i punti della sfera complessa in due insiemi: $\underline{A}_0$ costituito dai punti di M_0 in cui tutte le y_r sono definite e B_0 tutti i rimanenti. ($\underline{B}_0$ contiene dunque sicuramente tutti i punti non appartenenti ad M_0).

Prendiamo un punto P di $\underline{B}_0$; ma se P è in $\underline{B}_0$ vuol dire che ivi non è definita una y_r di R e quindi P è fuori della regione M_r di definizione. Ma y_r è in R, dunque sarà in R anche un suo intorno (A_r, σ_r) con A_r *chiuso* e interno ad M_r. Sia ora δ la distanza di A_r da I_r (complementare di M_r); essendo A_r e I_r chiusi senza punti comuni è $\delta > 0$. *Possiamo allora dimostrare che tutto l'intorno* δ_1 *di* P *con* $\delta_1 < \delta$ *è pure in* B_0. E infatti, escludendo da M_r, se vi sono, i punti che distano da P di una quantità $\leq \delta_1$ resta sempre una regione contenuta in M_r e contenente A_r.

6. Con quest'ultimo teorema viene dunque provato che ogni funzione y_0 di una regione R dove è definito un funzionale analitico F non localmente costante individua un insieme chiuso A_0 contenuto nella regione M_0 dove

essa funzione è definita, ed è anzi da osservare che *questo insieme* A_0 *dipende dalla regione funzionale* R *ma non dal particolare funzionale* F *in essa definito*, poichè gli insiemi A di cui esso è intersezione debbono soddisfare alla sola condizione che gli intorni (A, σ) con essa costruiti siano contenuti in R senza nessuna influenza del funzionale F.

Infine il teorema precedente combinato col teorema fondamentale del Fantappiè sulle regioni funzionali lineari dà il seguente:

TEOREMA VIII. – *Tutte le funzioni di tutti gli intorni* (A, σ) *di* y_0 *appartenenti ad* R *appartengono ad una stessa regione funzionale lineare* (A_0).

Calcolo numerico. — *Sul calcolo della deformazione della piastra poggiata su suolo elastico* (*). Nota di LIDIA STANKIEWICZ, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Il prof. Enrico Volterra (1) fa dipendere il calcolo della deformazione di una piastra infinita, di spessore costante, poggiata su suolo elastico, nella ipotesi di elasticità di Winkler, dal calcolo della seguente funzione:

$$(1) \qquad F(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin xu \sin yv}{u \cdot v} \frac{du\, dv}{(u^2 + v^2)^2 + 1}.$$

Mi propongo di comunicare come io sia pervenuta, con la collaborazione di provetti calcolatori dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, a costruire una tavola della funzione $F(x, y)$ definita dalla (1).

1. PRIMO METODO. – Osserviamo che occorre calcolare la (1) soltanto quando sia $x \cdot y \neq 0$. Noi faremo sempre tale ipotesi.

Posto:

$$f(x, y, u, v) = \frac{\sin xu \sin yv}{u \cdot v} \frac{1}{(u^2 + v^2)^2 + 1},$$

detto r_{mn} il dominio rettangolare del piano (u, v), definito dalle limitazioni:

$$m \frac{\pi}{x} \leq u \leq (m + 1) \frac{\pi}{x},$$

$$n \frac{\pi}{y} \leq v \leq (n + 1) \frac{\pi}{y},$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo; presentato al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pisa 23-26 settembre 1948).

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Cfr. E. VOLTERRA, *Sul problema generale della piastra poggiata su suolo elastico*, « Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », vol. II, ser. VIII, 1947.

posto

$$F_{mn}(x,y) = \iint_{\tau_{mn}} f(x,y,u,v)\,du\,dv,$$

la nostra funzione $F(x,y)$ è la somma della seguente serie doppia:

$$F(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn}(x,y)$$

e si dimostra assai facilmente che tale serie riesce assolutamente convergente. Si ha:

$$F_{mn}(x,y) = (-1)^{m+n}\,\Phi_{mn}(x,y),$$

dove:

$$\Phi_{mn}(x,y) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\xi\sin\eta\,\frac{d\xi}{x}\,\frac{d\eta}{y}}{\left(\frac{\xi}{x}+m\frac{\pi}{x}\right)\left(\frac{\eta}{y}+n\frac{\pi}{y}\right)\left\{1+\left|\left(\frac{\xi}{x}+\frac{m\pi}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta}{y}+\frac{n\pi}{y}\right)^2\right|^2\right\}} > 0.$$

Posto

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{uv\left[(u^2+v^2)^2+1\right]},$$

è subito verificato che

$$\varphi_u < 0 \quad , \quad \varphi_v < 0 \quad , \quad \varphi_{uv} > 0,$$

onde seguono le relazioni:

$$\Phi_{m+1,n} - \Phi_{mn} < 0 \quad , \quad \Phi_{m,n+1} - \Phi_{mn} < 0,$$

$$\Phi_{m+1,n+1} - \Phi_{m+1,n} - \Phi_{m,n+1} + \Phi_{mn} > 0.$$

Si ha:

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} F_{ij}(x,y) + R_{mn},$$

con

$$R_{mn} = \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} F_{ij}(x,y) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=n+1}^{\infty} F_{ij}(x,y),$$

e posto:

$$\Phi^*_{ij}(x,y) \begin{cases} = \Phi_{ij}(x,y) & \text{per} \quad i \leq m+1, \\ = 0 & \text{per} \quad i > m+1, \end{cases}$$

possiamo scrivere:

$$R_{mn} = \sum_{i=m+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}\,\Phi_{ij}(xy) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^{i+j}\,\Phi^*_{ij}(x,y).$$

Le due serie doppie che si trovano al secondo membro di quest'ultima relazione sono nella condizione contemplata dal teorema 1 del numero 22,

del capitolo VI degli Appunti di Analisi Superiore del prof. Picone [2] e si può pertanto asserire che:

$$\left| \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \Phi_{ij}(x, y) \right| \leqq \Phi_{m+1,0}(x, y),$$

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} (-1)^{i+j} \Phi_{ij}^{*}(x, y) \right| \leqq \Phi_{0,n+1}(x, y).$$

Si ha dunque:

$$|R_{mn}| \leqq |F_{m+1,0}| + |F_{0,n+1}|.$$

ed a fortiori:

$$|R_{nm}| \leqq |F_{m0}| + |F_{0n}|.$$

Con analogo ragionamento si dimostra più generalmente che, se:

$$(2) \qquad \begin{cases} m\dfrac{\pi}{x} \leqq a < (m+1)\dfrac{\pi}{x} \\ m\dfrac{\pi}{y} \leqq b < (n+1)\dfrac{\pi}{y}, \end{cases}$$

posto

$$F(x, y) = \int_0^a \int_0^b f(x, y, u, v)\, du\, dv + R_{ab},$$

risulta:

$$|R_{ab}| < |F_{m0}| + |F_{0n}|.$$

D'altra parte, ricordando che (cfr. le tavole numeriche dell'integralseno)

$$0 \leqq \int_0^a \frac{\sin t}{t}\, dt < 2,$$

si trova subito:

$$|F_{m0}| \leqq \frac{4}{\pi^5} \frac{x^4}{m^5},$$

e si ha dunque come conseguenza delle (2)

$$|R_{ab}| \leqq \frac{4}{\pi^5}\left(\frac{x^4}{m^5} + \frac{y^4}{n^5}\right) < \frac{2}{\pi^4}\left(\frac{x^4}{m^4} + \frac{y^4}{n^4}\right);$$

Da tali limitazioni si deduce che volendo calcolare la nostra funzione $F(x, y)$ con esatte le prime tre cifre decimali, basterà calcolare

$$\int_0^{10} \int_0^{10} f(x, y, u, v)\, du\, dv,$$

[2] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, seconda edizione [Rondinella, Napoli 1946].

con esatte le prime quattro. Ciò si può conseguire applicando il metodo di integrazione doppia di Cavalieri–Simpson (3).

2. Secondo metodo. – Tale metodo è fondato sull'osservazione che, posto

$$q = \frac{u^2 v^2 (u^2 v^2 - 2)}{(u^4 + 1)(v^4 + 1)}$$

risulta

$$-\frac{1}{3} \leq q < 1$$

e

$$\frac{1}{(u^2 + v^2)^2 + 1} = \frac{1}{(u^4 + 1)(v^4 + 1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu,$$

donde, come subito si può dimostrare:

$$F(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{q^\nu \operatorname{sen} xu \operatorname{sen} yv}{uv (u^4 + 1)(v^4 + 1)} du\, dv. \tag{3}$$

Posto:

$$S_k^j(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^j \operatorname{sen} zt}{(t^4 + 1)^k} dt \quad , \quad C_k^j(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^j \cos zt}{(t^4 + 1)^k} dt ,$$

tali integrali sono suscettibili di calcolo ricorrente e mediante essi si esprime facilmente l'integrale che è termine generale della serie (3). Il resto di tale serie relativo al termine n–mo è dato da:

$$r_n = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{q^n \operatorname{sen} xu \operatorname{sen} yv}{uv [1 + (u^2 + v^2)^2]} du\, dv$$

e si possono determinare valori di n in modo che esso riesca minore di una quantità prefissata. Si perviene così al calcolo numerico della funzione $F(x, y)$ abbastanza rapidamente.

Segue la tabella dei valori ottenuti, ove sono riportati soltanto quelli corrispondenti a $y \leq x$ (data la simmetria della $F(x, y)$) e nell'ultima colonna intitolata ∞ compaiono i valori di

$$\lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - e^{-\frac{y}{\sqrt{2}}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

(3) Cfr. per esempio, M. Picone, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Catania, 1923, p. 672.

Tabella per la funzione F x , y .

y \ x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	9	10	11	12	∞
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5		0,277	0,499	0,656	0,756	0,817	0,846	0,858	0,861	0,858	0,854	0,850	0,846	0,844	0,842	0,842	0,842	0,842	0,842	0,842	0,843	0,842
1			0,906	1,100	1,383	1,498	1,549	1,576	1,580	1,574	1,566	1,557	1,551	1,546	1,543	1,542	1,541	1,541	1,542	1,542	1,543	1,542
1,5				1,501	1,842	1,998	2,074	2,103	2,107	2,097	2,084	2,072	2,062	2,056	2,051	2,049	2,049	2,049	2,050	2,050	2,051	2,050
2					2,138	2,320	2,409	2,442	2,444	2,431	2,414	2,401	2,387	2,378	2,373	2,370	2,369	2,370	2,371	2,371	2,372	2,372
2,5						2,517	2,610	2,642	2,640	2,623	2,602	2,582	2,567	2,557	2,551	2,548	2,547	2,547	2,549	2,550	2,550	2,550
3							2,704	2,734	2,728	2,706	2,681	2,658	2,641	2,630	2,623	2,620	2,619	2,619	2,621	2,622	2,623	2,622
3,5								2,750	2,740	2,722	2,694	2,670	2,651	2,638	2,631	2,628	2,626	2,628	2,629	2,630	2,630	2,631
4									2,734	2,705	2,674	2,647	2,627	2,614	2,606	2,602	2,601	2,603	2,605	2,606	2,606	2,606
4,5										2,672	2,639	2,611	2,590	2,577	2,569	2,565	2,564	2,566	2,568	2,569	2,570	2,570
5											2,605	2,575	2,554	2,540	2,532	2,530	2,528	2,530	2,532	2,533	2,534	2,534
5,5												2,546	2,524	2,510	2,502	2,499	2,498	2,500	2,502	2,504	2,505	2,504
6													2,502	2,488	2,481	2,477	2,477	2,479	2,482	2,483	2,484	2,483
6,5														2,475	2,467	2,463	2,464	2,466	2,468	2,470	2,471	2,470
7															2,460	2,457	2,456	2,459	2,461	2,463	2,464	2,463
7,5																2,454	2,453	2,456	2,459	2,460	2,461	2,461
8																	2,453	2,456	2,459	2,460	2,461	2,460
9																		2,459	2,462	2,463	2,463	2,463
10																			2,464	2,466	2,466	2,466
11																				2,467	2,468	2,467
12																					2,468	2,468
∞																						2,467

La formula data da E. Volterra per il calcolo della freccia d'inflessione $w(x, y)$ della piastra è

$$w(x, y) = \frac{T}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(a - x)\, u \cos(b - y)\, v}{D(u^2 + v^2)^2 + \lambda} \frac{\sin l_1 u}{l_1 u} \frac{\sin l_2 v}{l_2 v}\, du\, dv .$$

Per applicarla al calcolo numerico, coll'ausilio della precedente tabella, basta osservare che, posto $k = \left(\frac{\lambda}{D}\right)^{1/4}$, essa può scriversi

$$\begin{aligned} w(x, y) = \frac{T}{4\pi^2 l_1 l_2 \lambda} \{ & F[k(a - x + l_1), k(b - y + l_2)] - \\ & - F[k(a - x + l_1), k(b - y - l_2)] - \\ & - F[k(a - x - l_1), k(b - y + l_2)] + \\ & + F[k(a - x - l_1), k(b - y - l_2)] \}. \end{aligned}$$

Analisi matematica. — *Su un particolare problema misto per un'equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti*(*). Nota di Aldo Ghizzetti, presentata(**) dal Socio M. Picone.

L'ing. J. Litwiniszyn di Cracovia ha proposto all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo il seguente problema: integrare l'equazione

(1) $$Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_x + Dz_y + Ez = 0, \qquad (A, B, C, D, E \text{ costanti, } AB > 0),$$

nella semistriscia $0 \leq x \leq l$, $y \geq 0$, con le seguenti condizioni di frontiera

(2) $$z(x, 0) = f(x) \quad , \quad z_x(0, y) = z_x(l, y) = 0 ,$$

essendo $f(x)$ una funzione assegnata, continua in $(0, l)$.

In questa Nota riporto lo studio che ho eseguito relativamente al problema stesso.

1. Introducendo come incognita la funzione $u = z e^{Cx/2A + Dy/2B}$ e cambiando le variabili x, y rispettivamente in $\frac{l}{\pi} x$, $\frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{B}{A}}\, y$, il problema (1), (2) si trasforma nel seguente: integrare l'equazione

(1′) $$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$$

nella semistriscia $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$, con le seguenti condizioni di frontiera:

(2′) $$u(x, 0) = g(x) \quad , \quad u_x(0, y) - \alpha u(0, y) = u_x(\pi, y) - \alpha u(\pi, y) = 0.$$

(*) Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

Nelle (1′), (2′) si è posto:

$$(3)\quad \lambda=\frac{l^2}{\pi^2}\frac{1}{A}\left(E-\frac{C^2}{4A}-\frac{D^2}{4B}\right)\quad,\quad \alpha=\frac{l}{2\pi}\frac{C}{A}\quad,\quad g(x)=e^{lC_x/2\pi A}f\left(\frac{l}{\pi}x\right).$$

Studieremo pertanto il problema (1′), (2′); va tenuto presente che ad ogni soluzione $u(x,y)$ di esso corrisponde la seguente soluzione

$$(4)\qquad z(x,y)=e^{-C_x/2A-D_y/2B}\,u\left(\frac{\pi}{l}x,\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{A}{B}}\,y\right)$$

del primitivo problema (1), (2).

2. Per studiare il problema (1′), (2′) considereremo le seguenti *trasformate* della $u(x,y)$:

$$(5)\qquad u_k(y)=\int_0^\pi u(x,y)\,\varphi_k(x)\,dx,\qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

ove le $\varphi_k(x)$ sono le autosoluzioni del seguente problema ai limiti ordinario

$$(6)\quad \varphi''(x)+\mu\varphi(x)=0\quad,\quad \varphi'(0)-\alpha\varphi(0)=\varphi'(\pi)-\alpha\varphi(\pi)=0.$$

È immediato riconoscere che gli autovalori del parametro μ sono

$$(7)\qquad \mu_0=-\alpha^2\quad;\quad \mu_k=k^2,\qquad (k=1,2,\cdots)$$

con le corrispondenti autosoluzioni

$$(8)\qquad \varphi_0(x)=e^{\alpha x}\quad;\quad \varphi_k(x)=\alpha\operatorname{sen}kx+k\cos kx,\qquad (k=1,2,\cdots).$$

Le (8) formano un sistema completo di funzioni ortogonali in $(0,\pi)$ (che, per $\alpha=0$, si riduce al solito sistema $1,\cos x,\cos 2x,\cdots$) e si ha:

$$(9)\quad \int_0^\pi \varphi_0^2(x)\,dx=(e^{2\pi\alpha}-1)/2\alpha\quad;\quad \int_0^\pi \varphi_k^2(x)\,dx=\frac{\pi}{2}(\alpha^2+k^2),\quad (k=1,2,\cdots),$$

coll'avvertenza che $(e^{2\pi\alpha}-1)/2\alpha$ va sostituito col suo valore limite π nel caso $\alpha=0$.

3. Riprendiamo ora l'equazione (1′) dalla quale segue $\int_0^\pi (u_{xx}+u_{yy}+\lambda u)\,\varphi_k(x)\,dx=0$, $(k=0,1,2,\cdots)$, ossia

$$[u_x\varphi_k-u\varphi_k']_0^\pi+\int_0^\pi u\varphi_k''\,dx+\frac{d^2}{dy^2}\int_0^\pi u\varphi_k\,dx+\lambda\int_0^\pi u\varphi_k\,dx=0.$$

Tenuto conto di (2′), (5), (6), è subito visto che questa relazione si riduce alla

$$(10)\qquad -\frac{d^2u_k}{dy^2}+(\lambda-\mu_k)u_k=0,\qquad (k=0,1,2,\cdots);$$

di più, per la prima delle (2'), deve essere

$$u_k(0) = \gamma_k , \qquad (k = 0 , 1 , 2 , \cdots), \tag{11}$$

avendo posto

$$\gamma_k = \int_0^\pi g(x)\, \varphi_k(x)\, dx. \tag{12}$$

Consideriamo la (10) ed osserviamo che, per le (7), al crescere di k i numeri $\lambda - \mu_k$ sono definitivamente negativi. Detto allora ν il primo indice per cui riesce $\lambda - \mu_\nu \leq 0$ (può essere $\nu = 0 , 1 , 2 , \cdots$), dalle (10), (11) segue

$$\begin{cases} u_k(y) = \gamma_k \cos\sqrt{\lambda - \mu_k}\, y + c_k \operatorname{sen}\sqrt{\lambda - \mu_k}\, y , & (k = 0 , 1 , \cdots , \nu - 1), \\ u_\nu(y) \begin{cases} = \gamma_\nu e^{-\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\, y} + c_\nu \operatorname{senh}\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\, y , & (\text{se } \lambda - \mu_\nu < 0), \\ = \gamma_\nu + c_\nu y , & (\text{se } \lambda - \mu_\nu = 0), \end{cases} \\ u_k(y) = \gamma_k e^{-\sqrt{\mu_k - \lambda}\, y} + c_k \operatorname{senh}\sqrt{\mu_k - \lambda}\, y , & (k = \nu + 1 , \nu + 2 , \cdots), \end{cases} \tag{13}$$

ove le c_k, $(k = 0 , 1 , 2 , \cdots)$, designano costanti arbitrarie.

Le (13) mostrano che le condizioni del problema (1'), (2') non sono sufficienti a determinare la soluzione $u(x , y)$ perchè le coordinate di Fourier $u_k(y)$ della $u(x , y)$ rispetto al sistema completo $\{\varphi_k(x)\}$ non risultano individuate. Anzi le (13) mostrano che il problema stesso ammette le infinite autosoluzioni

$$U_k(x , y) \begin{cases} = \varphi_k(x) \operatorname{sen}\sqrt{\lambda - \mu_k}\, y , & (k = 0 , 1 , \cdots , \nu - 1), \\ = \varphi_\nu(x) \operatorname{senh}\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\, y , & (k = \nu , \lambda - \mu_\nu < 0), \\ = \varphi_\nu(x)\, y , & (k = \nu , \lambda - \mu_\nu = 0), \\ = \varphi_k(x) \operatorname{senh}\sqrt{\mu_k - \lambda}\, y , & (k = \nu + 1 , \nu + 2 , \cdots). \end{cases} \tag{14}$$

Per rendere determinato il problema, occorre imporre alla $u(x , y)$ altre condizioni, per esempio una condizione di comportamento per $y \to +\infty$. Imponiamo che sia:

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to +\infty} e^{-\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\, y}\, u(x , y) = 0 , & (\text{se } \lambda - \mu_\nu < 0), \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{u(x , y)}{y} = 0 , & (\text{se } \lambda - \mu_\nu = 0), \end{cases} \tag{15}$$

(uniformemente per $0 \leq x \leq \pi$).

Allora dalle (5), (15) segue subito che deve essere, per $k = 0 , 1 , 2 , \cdots$:

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-\sqrt{\mu_\nu - \lambda}\, y}\, u_k(y) = 0 \quad (\text{se } \lambda - \mu_\nu < 0) ,$$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{u_k(y)}{y} = 0 \quad (\text{se } \lambda - \mu_\nu = 0),$$

e si riconosce immediatamente, per mezzo delle (13), che queste ultime condizioni sono verificate soltanto se si assume $c_\nu = c_{\nu+1} = c_{\nu+2} = \cdots = 0$, rimanendo ancora completamente arbitrarie le $c_0, c_1, \cdots, c_{\nu-1}$ (se ci sono, ossia se $\nu > 0$).

Perciò, *imponendo, oltre alle* (1'), (2'), *la condizione* (15), *si ottiene il teorema di unicità soltanto se* $\nu = 0$, *ossia se* $\lambda - \mu_0 = \lambda + \alpha^2 \leq 0$. *Invece, se* $\nu > 0$ *ossia* $\lambda + \alpha^2 > 0$, *neppure con la condizione* (15) *si ottiene il teorema di unicità; la soluzione, se esiste, resta determinata soltanto a meno di una combinazione lineare delle* ν *autosoluzioni* $U_0(x, y), \cdots, U_{\nu-1}(x, y)$ *definite dalle* (14).

4. L'esistenza della soluzione *verificante la* (15) va poi, in ogni caso, richiesta alla formula risolutiva

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y)\, \varphi_k(x) \Big/ \int_0^\pi \varphi_k^2(x)\, dx,$$

che, tenuto conto delle (7), (8), (9), (12), (13), si scrive *nel caso* $\nu = 0$ *ossia* $\lambda + \alpha^2 \leq 0$:

$$(16) \qquad u(x, y) = p_0\, e^{\alpha x - \sqrt{-\lambda - \alpha^2}\, y} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}\, y}\, (\alpha \operatorname{sen} kx + k \cos kx),$$

avendo posto

$$(16') \qquad p_0 = \frac{2\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \int_0^\pi g(x)\, e^{\alpha x}\, dx \quad ,$$

$$p_k = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + k^2} \int_0^\pi g(x)\, (\alpha \operatorname{sen} kx + k \cos kx)\, dx, \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Invece *se* $\nu > 0$ *ossia* $\lambda + \alpha^2 > 0$ si ha

$$(17) \quad u(x, y) = p_0\, e^{\alpha x} \cos \sqrt{\lambda + \alpha^2}\, y + \sum_{k=1}^{\nu-1} p_k \cos \sqrt{\lambda - k^2}\, y \cdot (\alpha \operatorname{sen} kx + k \cos kx) +$$

$$+ \sum_{k=\nu}^{\infty} p_k\, e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}\, y}\, (\alpha \operatorname{sen} kx + k \cos kx) +$$

$$+ q_0\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda + \alpha^2}\, y + \sum_{k=1}^{\nu-1} q_k \operatorname{sen} \sqrt{\lambda - k^2}\, y \cdot (\alpha \operatorname{sen} kx + k \cos kx),$$

ove le p_k sono ancora date dalle (16'), mentre $q_0, q_1, \cdots, q_{\nu-1}$ sono costanti arbitrarie.

Rimane da verificare se effettivamente le funzioni $u(x, y)$ definite dalla (16) o dalla (17) soddisfano tutte le condizioni imposte, e cioè (1'), (2'), (15). È intanto quasi evidente che le serie che compaiono in (16), (17) e quelle che si ottengono derivandole termine a termine una o due volte rispetto a x o a y riescono uniformemente convergenti per $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq \sigma > 0$. In base a ciò è immediato controllare che sono verificate la (1'), la seconda delle (2') e la (15). Meno semplice è la verifica della prima delle (2'); conviene

invocare un teorema dovuto a T. Bromwich [1], secondo il quale si può asserire che sussiste la $\lim_{y \to 0+} u(x, y) = g(x)$, qualora si sia dimostrato: 1° che per il sistema di funzioni $\{\varphi_k(x)\}$ definito dalle (8) vale un teorema analogo a quello di Fejér per le ordinarie serie di Fourier; 2° che la successione dei moltiplicatori $\psi_k(y) = e^{-\sqrt{k^2-\lambda}\,y}$, $(y > 0)$, è tale da verificare, oltre alle due proprietà evidenti $\lim_{k \to \infty} k\psi_k(y) = 0$, $\lim_{y \to 0+} \psi_k(y) = 1$, anche la proprietà più riposta che $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|\,\Delta^2 \psi_k(y)\,|$ non supera una costante H (indipendente da y).

Il compito di dimostrare queste due proprietà, interessanti anche di per sè, è stato affidato, come tesi di laurea, alla dott.ssa A. Purificato [2].

5. Riassumendo, possiamo enunciare il seguente teorema: *Il problema* (1'), (2') *non è determinato; esso possiede le infinite autosoluzioni* (14). *Considerata la successione di numeri* $\rho_0 = \lambda + \alpha^2, \rho_1 = \lambda - 1^2, \cdots, \rho_k = \lambda - k^2, \cdots$ *e detto* ρ_ν *il primo termine non positivo, se si impone alla* $u(x, y)$ *l'ulteriore condizione*

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-\sqrt{-\rho_\nu}\,y}\, u(x, y) = 0 \quad (\text{se } \rho_\nu < 0) \quad ; \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{u(x, y)}{y} = 0 \quad (\text{se } \rho_\nu = 0)$$

(uniformemente per $0 \leq x \leq \pi$)

il problema riesce determinato se $\nu = 0$ *e la sua soluzione è data dalla* (16), *non riesce determinato se* $\nu > 0$ (*sussistendo ancora* ν *autosoluzioni linearmente indipendenti*) *e tutte le sue soluzioni sono date dalla* (17).

Omettiamo l'analogo enunciato relativo al primitivo problema (1), (2), che si deduce agevolmente dal precedente, tenendo conto delle (3), (4).

Analisi matematica. — *Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson* [*]. Nota di Angela Purificato, presentata [**] dal Socio M. Picone.

Nella Nota: *Su un particolare problema misto per un'equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti* di A. Ghizzetti viene considerato il seguente sistema di funzioni ortonormali in $(0, \pi)$:

$$(1) \quad \varphi_0(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}}\, e^{\alpha x} \quad ; \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\alpha \operatorname{sen} kx + k \cos kx}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

(1) Vedi T. Bromwich, *On the limits of certain infinite series and integrals*. «Math. Ann.», Bd. 65 (1908), pp. 350-369. Vedi anche: L. Tonelli, *Serie trigonometriche*, Bologna 1928 pp. 391-396.

(2) Vedi A. Purificato, *Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson*, in questi stessi «Rendiconti».

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

ove α designa una costante reale, sistema che per $\alpha = 0$ si riduce al solito $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx$. Detta $f(x)$ una funzione sommabile in $(0, \pi)$, della sua serie di Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, con $a_k = \int_0^{\pi} f(x) \varphi_k(x) dx$, consideriamo le somme parziali $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ e successivamente le medie aritmetiche $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x)$. Mi propongo di dimostrare che sussistono teoremi analoghi a quelli di Fejér e di Lebesgue per le ordinarie serie di Fourier[1], e cioè:

I. – *Per ogni punto x di $(0, \pi)$ che sia di discontinuità di 1ª specie per $f(x)$, si ha*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \quad (2). \tag{2}$$

Se la $f(x)$ è continua in $(0, \pi)$, sussiste la

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = f(x) \tag{2'}$$

uniformemente per $0 \leq x \leq \pi$.

Nella sola ipotesi di sommabilità della $f(x)$, la (2') vale per quasi tutti gli x di $(0, \pi)$.

Inoltre nella Nota sopracitata interviene anche un procedimento di sommazione di una serie analogo a quello di Poisson[3], coi moltiplicatori $\psi_k(y) = e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}\, y}$ (con $y > 0$; $k = k_0, k_0 + 1, \cdots$ ove k_0 è il primo intero non negativo per cui riesce $k_0^2 - \lambda \geq 0$). Per un noto teorema di T. Bromwich, per giustificare tale procedimento, per una serie che sia sommabile (C, 1), basta dimostrare che

$$\lim_{k \to \infty} k \psi_k(y) = 0 \quad , \quad \lim_{y \to 0+} \psi_k(y) = 1 \quad , \quad \sum_{k=k_0}^{n} k \, |\Delta^2 \psi_k(y)| < H.$$

Le prime due proprietà sono evidenti; mi propongo qui di dimostrare la terza, estendendo una nota dimostrazione di C. N. Moore, e cioè:

II. – *Esiste una costante* H *(indipendente da n e da y) tale che, qualunque sia $n > k_0$ e qualunque sia $y > 0$, riesce*

$$\sum_{k=k_0}^{n} k \, |\Delta^2 \psi_k(y)| < H. \tag{3}$$

(1) Vedi per esempio L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Bologna, pp. 166–179 (1928). Il teorema I rientra come caso particolare in un generale teorema sugli sviluppi in serie di funzioni di Sturm-Liouville (vedi A. HAAR, «Math. Ann.», Bd. 69, 1910; T. MERCER, «London Philos. Trans.», vol. 211, 1912; E. W. HOBSON, «Proc. London Math. Soc.», vol. 12, 1913); qui ne viene data una dimostrazione elementare diretta, senza far uso delle proprietà asintotiche (per $k \to \infty$) delle $\varphi_k(x)$.

(2) Per $x = 0$ il secondo membro va sostituito con $f(0+)$, per $x = \pi$ con $f(\pi-)$.

(3) Vedi per esempio L. TONELLI, op. cit., pp. 391–396.

1. Per quanto riguarda la dimostrazione del teorema I, premettiamo due osservazioni.

Osservazione 1ª). – Gli ordinari teoremi di Fejér e di Lebesgue applicati ad una funzione *pari* permettono di asserire che, se x è un punto di discontinuità di 1ª specie per la $f(x)$, sommabile in $(0, \pi)$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{\pi} f(\xi) \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x-\xi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x-\xi}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x+\xi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x+\xi}{2}} \right]^2 \right\} d\xi = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2},$$

valendo l'avvertenza della nota (2). Inoltre, se $f(x)$ è continua in $(0, \pi)$, si ha che lo stesso limite vale $f(x)$, uniformemente in $(0, \pi)$. In ogni caso il predetto limite vale $f(x)$ per quasi tutti gli x di $(0, \pi)$.

Osservazione 2ª). – Detto t un punto di $(0, 2\pi)$, c una costante, applicando nel punto $x = 0$ l'ordinario teorema di Fejér alla funzione $f(x) = e^{cx}$ (per $0 \leq x \leq t$), $= 0$ (per $t < x \leq 2\pi$), si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{t} e^{c\xi} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\xi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\xi}{2}} \right]^2 d\xi \begin{cases} = 0 & \text{se } t = 0 \\ = 1/2 & \text{se } 0 < t < 2\pi \\ = (1 + e^{2\pi c})/2 & \text{se } t = 2\pi \end{cases}$$

e si vede subito che il limite $\frac{1}{2}$ è uniforme al variare di t in un qualsiasi intervallo (a, b) tutto interno a $(0, 2\pi)$; basta scrivere $\int_0^t \cdots = \int_0^a \cdots + \int_a^t \cdots$ ed osservare che $\int_a^t \cdots \leq \int_a^b \cdots < K$, con K indipendente da t e da n.

Ciò premesso cominciamo a calcolare le somme parziali $s_n(x)$, escludendo il caso banale $\alpha = 0$. Si ha:

$$s_n(x) = \int_0^{\pi} f(\xi) \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)\, \varphi_k(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^{\pi} f(\xi) \left| \frac{2\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} e^{\alpha(x-\xi)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha \operatorname{sen} kx - k\cos kx)(\alpha \operatorname{sen} k\xi - k\cos k\xi)}{k^2 + \alpha^2} \right| d\xi =$$

$$= \int_0^{\pi} f(\xi) \left| \frac{2\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} e^{\alpha(x-\xi)} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-\xi) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos k(x+\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{k \operatorname{sen} k(x+\xi) - \alpha \cos k(x+\xi)}{k^2 + \alpha^2} \right| d\xi.$$

Si osservi ora che

$$\frac{k \operatorname{sen} k(x+\xi) - \alpha \cos k(x+\xi)}{k^2+\alpha^2} = \mp e^{\alpha(x+\xi)} \int_{\pm(x+\xi)}^{+\infty} e^{\mp \alpha\tau} \cos k\tau \, d\tau ,$$

coll'avvertenza (da tenersi presente anche nel seguito) che i segni superiori valgono per $\alpha > 0$, gli inferiori per $\alpha < 0$.

Tenuto conto di ciò e ricordando la nota formula $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x \Big/ \left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)$, si ottiene dopo qualche semplificazione

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{\operatorname{sen} \frac{x-\xi}{2}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}(x+\xi)}{\operatorname{sen} \frac{x+\xi}{2}} \right] d\xi +$$

$$+ 2\alpha \int_0^{\pi} f(\xi) e^{\alpha(x+\xi)} \left[\frac{1}{e^{2\pi\alpha} - 1} \mp \frac{1}{2\pi} \int_{\pm(x+\xi)}^{+\infty} e^{\mp \alpha\tau} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\tau}{\operatorname{sen} \frac{\tau}{2}} d\tau \right] d\xi .$$

Passiamo a calcolare le medie aritmetiche $\sigma_n(x)$. Dalla formula precedente, ricordando che $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}(2k+1)x = \operatorname{sen}^2(n+1)x / \operatorname{sen} x$, si deduce

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{\pi} f(\xi) \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x-\xi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x-\xi}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{x+\xi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x+\xi}{2}} \right]^2 \right\} d\xi + \sigma_n^*(x),$$

avendo posto

$$(4) \qquad \sigma_n^*(x) = 2\alpha \int_0^{\pi} f(\xi) e^{\alpha(x+\xi)} \left\{ \frac{1}{e^{2\pi\alpha} - 1} \mp \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{\pm(x+\xi)}^{+\infty} e^{\mp \alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau \right\} d\xi .$$

In virtù dell'osservazione 1ª, il teorema I sarà completamente dimostrato se proveremo che $\lim_{n \to \infty} \sigma_n^*(x) = 0$, uniformemente per $0 \leq x \leq \pi$. A tale scopo, trasformiamo l'espressione di $\sigma_n^*(x)$ data dalla (4), scrivendo

$$\int_{\pm(x+\xi)}^{+\infty} \cdots d\tau = \int_{\pm(x+\xi)}^{0} \cdots d\tau + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \cdots d\tau .$$

Lasciando inalterato il primo integrale se $\alpha > 0$, cambiando in esso τ in $-\tau$ se $\alpha < 0$ e modificando il secondo col mutare τ in $2k\pi + \tau$, si ottiene:

$$\int_{\mp(x+\xi)}^{+\infty} \cdots d\tau = \int_0^{x+\xi} e^{-\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau \mp \frac{1}{1-e^{\mp 2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{\mp\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau ,$$

cosicchè dalla (4) si deduce

$$e^{-\alpha x}\,\sigma_n^*(x) = A_n + B_n(x) \tag{5}$$

con

$$A_n = 2\alpha \left\{ \frac{1}{e^{2\pi\alpha}-1} \mp \frac{1}{1-e^{\mp 2\pi\alpha}} \right\} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} e^{\mp\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi}\, d\xi ,$$

$$B_n(x) = 2\alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi} \left\{ \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{x+\xi} e^{-\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau \right\} d\xi . \tag{6}$$

In virtù dell'osservazione 2ª si ha

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 2\alpha \left\{ \frac{1}{e^{2\pi\alpha}-1} \mp \frac{1}{1-e^{\mp 2\pi\alpha}} \cdot \frac{1+e^{\mp 2\pi\alpha}}{2} \right\} \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi}\, d\xi = -\alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi}\, d\xi ,$$

cosicchè, per la (5), tutto è ridotto a provare che

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = \alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi}\, d\xi \tag{7}$$

uniformemente per $0 \leq x \leq \pi$.

Per l'osservazione 2ª si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} e^{\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau = \frac{1+e^{-2\pi\alpha}}{2} ,$$

cosicchè esiste una costante M tale da aversi, per ogni n

$$\frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau < M . \tag{8}$$

Allora, considerata la (6), è subito visto che la funzione integranda di $\int_0^{\pi} \cdots d\xi$ riesce maggiorata, qualunque sia n, dalla funzione $Me^{\alpha\xi} f(\xi)$ che

è sommabile in $(0, \pi)$. Ne segue la possibilità di eseguire il passaggio al limite per $n \to \infty$ sotto il segno di integrale, cioè di scrivere

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = 2\alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{x+\xi} e^{-\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau \right\} d\xi,$$

ma, sempre in virtù dell'osservazione 2ª, fissato x (con $0 \leq x \leq \pi$), il limite indicato vale $\frac{1}{2}$ per tutti gli ξ di $(0, \pi)$ (eccettuato $\xi = 0$ se $x = 0$, $\xi = \pi$ se $x = \pi$) e si ha pertanto la (7).

Rimane da provare che questa sussiste uniformemente per $0 \leq x \leq \pi$. Dato $\varepsilon > 0$, si fissi $\delta \left(\text{con } 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$ in modo che risulti $\int_0^{\delta} |f(\xi)|\, e^{\alpha\xi}\, d\xi < \varepsilon$, $\int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(\xi)|\, e^{\alpha\xi}\, d\xi < \varepsilon$. Allora, ponendo per brevità

$$\frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{x+\xi} e^{-\alpha\tau} \left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}} \right]^2 d\tau = g_n(x+\xi),$$

ed osservando che, per la (8), si ha $g_n(x+\xi) < M$, si può scrivere

$$\left| B_n(x) - \alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi}\, d\xi \right| = \left| 2\alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi} \left[g_n(x+\xi) - \frac{1}{2} \right] d\xi \right| <$$

$$< 2|\alpha| \int_0^{\delta} |f(\xi)|\, e^{\alpha\xi} \left[g_n(x+\xi) + \frac{1}{2} \right] d\xi + 2|\alpha| \int_{\delta}^{\pi-\delta} |f(\xi)|\, e^{\alpha\xi} \left| g_n(x+\xi) - \frac{1}{2} \right| d\xi +$$

$$+ 2|\alpha| \int_{\pi-\delta}^{\pi} |f(\xi)|\, e^{\alpha\xi} \left[g_n(x+\xi) + \frac{1}{2} \right] d\xi < 4|\alpha| \left(M + \frac{1}{2} \right) \varepsilon +$$

$$+ 2|\alpha| \int_{\delta}^{\pi-\delta} |f(\xi)|\, e^{\alpha\xi} \left| g_n(x+\xi) - \frac{1}{2} \right| d\xi.$$

Ma per $0 \leq x \leq \pi$, $\delta \leq \xi \leq \pi - \delta$, si ha $\delta \leq x + \xi \leq 2\pi - \delta$ e quindi, per quanto si è detto all'osservazione 2ª, $g_n(x+\xi) - \frac{1}{2}$ tende a zero uniformemente rispetto a $x + \xi$, cosicchè per n maggiore di un certo N, indipendente da x e da ξ, risulta

$$\left| B_n(x) - \alpha \int_0^{\pi} f(\xi)\, e^{\alpha\xi}\, d\xi \right| < 2|\alpha| \left[2M + 1 + \int_0^{\pi} f(\xi)\, |e^{\alpha\xi}\, d\xi \right] \varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione del teorema I.

2. Per dimostrare il teorema II, cominciamo a discutere il segno di $\Delta^2 \psi_k(y)$. Introdotta, per ogni fissato $y > 0$ e per $x \geq k_0$, la funzione $f(x) = e^{-y\sqrt{x^2-\lambda}}$, si ha

$$(9) \quad \Delta^2 \psi_k(y) = \psi_{k+2}(y) - 2\psi_{k+1}(y) + \psi_k(y) = f''(k+\theta), \quad (\text{con } 0 < \theta < 2),$$

e quindi, essendo

$$f''(x) = y \frac{yx^2\sqrt{x^2-\lambda} + \lambda}{(x^2-\lambda)^{3/2}} e^{-y\sqrt{x^2-\lambda}},$$

si vede intanto che *se* $\lambda \geq 0$ *si ha sempre* $\Delta^2 \psi_k(y) > 0$.

Esaminiamo il caso $\lambda < 0$ (in cui $k_0 = 0$). Allora $f''(x)$ si annulla quando x è radice dell'equazione $yx^2\sqrt{x^2-\lambda} + \lambda = 0$ ossia $x^6 - \lambda x^4 - \mu^6 = 0$, avendo posto $\mu = (\lambda^2 y)^{1/3}$. Si vede subito che quest'equazione ammette una ed una sola radice positiva ξ nell'intervallo $(0, \mu)$ e che risulta $f''(x) < 0$ per $x < \xi$, $f''(x) > 0$ per $x > \xi$. Col metodo delle corde si trova poi per ξ la limitazione $\mu^3/(\mu^2 - \lambda) < \xi < \mu$, che rinserra ξ in un intervallo di ampiezza $-\mu\lambda/(\mu^2 - \lambda) \leq \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}$. Ricordando la (9) si deduce

$$\Delta^2 \psi_k(y) < 0 \quad \text{per} \quad k \leq \frac{\mu^3}{\mu^2 - \lambda} - 2 \quad ; \quad \Delta^2 \psi_k(y) > 0 \quad \text{per} \quad k \geq \mu.$$

Perciò, se $\lambda < 0$, rimane dubbio il segno di $\Delta^2 \psi_k(y)$ soltanto per k interno all'intervallo $\left(\frac{\mu^3}{\mu^2 - \lambda} - 2, \mu\right)$, ma si è visto che tale intervallo ha ampiezza non superiore a $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} + 2$, onde, detto ν il più piccolo intero non minore di $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} + 2$, si può dire che *se* $\lambda < 0$ *rimane dubbio il segno di* $\Delta^2 \psi_k(y)$ *al più per* ν *valori di* k, *essendo* ν *un numero fisso (indipendente da* y*)*.

Possiamo dunque dire che se $\lambda \geq 0$ si ha $k|\Delta^2 \psi_k(y)| = k\Delta^2 \psi_k(y)$; mentre, se $\lambda < 0$ (e quindi $k_0 = 0$), esistono due interi $p(y)$, $q \leq \nu$ tali che

$$k|\Delta^2 \psi_k(y)| = -k\Delta^2 \psi_k(y) \quad \text{per} \quad 0 \leq k \leq p(y);$$
$$k|\Delta^2 \psi_k(y)| = k\Delta^2 \psi_k(y) \quad \text{per} \quad k \geq p(y) + q + 1.$$

Ne deriva che, per dimostrare la (3), basterà far vedere che, comunque si scelgano due interi r, s $(\geq k_0)$ tali che per $k = r, r+1, \cdots, r+s$ la $\Delta^2 \psi_k(y)$ non cambi segno, la somma $\sum_{k=r}^{r+s} k\Delta^2 \psi_k(y)$ ha valore assoluto non superiore ad un numero fisso h, indipendente da y, r, s, perchè dopo ciò la (3) sarà evidentemente valida con $H = h$ se $\lambda \geq 0$, con $H = (\nu + 2)h$ se $\lambda < 0$.

Con facile calcolo si trova

$$(10) \quad \sum_{k=r}^{r+s} k\Delta^2 \psi_k(y) = r[\psi_r(y) - \psi_{r+1}(y)] - (r+s+1)[\psi_{r+s+1}(y) - \psi_{r+s+2}(y)] + \\ + \psi_{r+1}(y) - \psi_{r+s+2}(y),$$

e si ha

$$\psi_{r+1}(y) - \psi_{r+s+2}(y) < \psi_{r+1}(y) < 1, \tag{11}$$

ed inoltre per ogni $k \geq k_0$

$$k[\psi_k(y) - \psi_{k+1}(y)] = -kf'(k+\theta) =$$

$$= \frac{k(k+\theta)}{\sqrt{(k+\theta)^2 - \lambda}} y e^{-\sqrt{(k+\theta)^2-\lambda}\, y} \qquad (\text{con } 0 < \theta < 1)$$

donde

$$0 < k[\psi_k(y) - \psi_{k+1}(y)] < \frac{(k+\theta)^2}{\sqrt{(k+\theta)^2 - \lambda}} \cdot \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{(k+\theta)^2 - \lambda}} =$$

$$= \frac{1}{e}\left(1 + \frac{\lambda}{(k+\theta)^2 - \lambda}\right) \leq g, \tag{12}$$

ove si può assumere

$$g = \frac{1}{e} \quad \text{se } \lambda \leq 0 \quad ; \quad g = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{\lambda}{k_0^2 - \lambda}\right) \quad \text{se } \lambda > 0 \ , \ k_0^2 - \lambda > 0;$$

$$g = \max\left[k_0 \ , \ \frac{1}{e}\left(1 + \frac{k_0^2}{2k_0 + 1}\right)\right] \quad \text{se } \lambda > 0 \ , \ k_0^2 - \lambda = 0.$$

Da (10), (11) (12) deriva

$$\left| \sum_{k=r}^{r+s} k\Delta^2 \psi_k(y) \right| < h \quad \text{con} \quad h = 2g + 1$$

ed il teorema II è dimostrato.

Analisi. — *Una relazione trigonometrica e la velocità di gruppo* (*). Nota di EMILIO BAIADA, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

Premessa. – Scopo di questa Nota è di stabilire le condizioni di validità di alcune relazioni notevoli che hanno una certa utilità nella Fisica Matematica e in particolare nella teoria della propagazione dei gruppi d'onda, nonchè di permettere alcune generalizzazioni d'interesse prevalentemente analitico, meritevoli di essere osservate.

Le considerazioni che qui saranno fatte avranno il pregio della semplicità e quindi saranno più agevolmente adoperabili nelle scienze applicate.

1. Sia $A(k)$ una funzione reale di variabile reale, tale che $A(k) = A(-k)$, definita per tutti i k tra $-\infty$ e $+\infty$. Supponiamo inoltre $A(k)$ assolutamente continua e con $A'(k)$ indicheremo la sua derivata (che esiste, per

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

un noto teorema quasi-dappertutto ed è integrabile assolutamente [1] mentre con $A'_1(k)$ indichiamo la funzione definita da:

$$A'_1(k) = A'(k) \text{ dove } A' \text{ esiste,}$$
$$A'_1(k) = 1 \qquad \text{dove } A' \text{ non esiste.}$$

Supponiamo inoltre la condizione seguente:

α) $A'(k)$: *k assolutamente integrabile in* $(1, \infty)$ [2].

Nelle condizioni precedenti *è allora vera la relazione:*

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sen} hx\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos kx\, dk = -\frac{1}{2} [A'(h+0) + A'(h-0)],$$

per ogni valore di h in cui $A'(h)$ *sia al più discontinua di* 1^a *specie.*

Il secondo membro di (1) si riduce a $A'(h)$ nei suoi punti di continuità.

Gli integrali che compaiono in (1) sono intesi come determinazione principale secondo Cauchy, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx,$$

quando il secondo membro esiste.

Consideriamo l'espressione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sen} hx\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos kx\, dx,$$

e facciamo vedere che ha senso. Infatti, per una formula d'addizione:

$$\int_{-R}^{+R} x \operatorname{sen} hx\, dx \int_{-M}^{+M} A(k) \cos kx\, dk = \int_{-M}^{+M} A(k)\, dk \int_{-R}^{+R} x \cos kx \operatorname{sen} hx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-M}^{+M} A(k)\, dk \int_{-R}^{+R} \{ x \operatorname{sen} x(k+h) - x \operatorname{sen} x(k-h) \}\, dx,$$

da cui, svolgendo il secondo integrale viene ancora:

$$= \frac{1}{2} \int_{-M}^{+M} A(k)\, dk \left\{ \frac{1}{(k+h)^2} [\operatorname{sen} x(k+h) - x(k+h) \cos x(k+h)]_{-R}^{+R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(k+h)^2} [\operatorname{sen} x(k-h) - x(k-h) \cos x(k-h)]_{-R}^{+R} \right\} =$$

(1) L'integrabilità sarà sempre intesa qui nel senso del Lebesgue.

(2) La condizione α) può essere sostituita con una qualunque β), γ), δ), di quelle che trovansi in L. TONELLI, *Serie Trigonometriche* Zanichelli, pp. 409-410 (1928).

$$= \int_{-M}^{+M} A(\xi) \left[\frac{1}{(\xi+\eta)^2} \operatorname{sen} R(\xi+\eta) - \frac{R}{\xi+\eta} \cos R(\xi+\eta) \right]_{\eta}^{\eta} -$$

$$- \left[\frac{1}{(\xi-\eta)^2} \operatorname{sen} R(\xi-\eta) - \frac{R}{\xi-\eta} \cos R(\xi-\eta) \right]_{\eta}^{\eta} \Big] d\xi,$$

dove i fattori tra parentesi quadre si riducono, mediante considerazioni molto semplici, essere limitati, poichè per $\xi - \eta$, $\xi - \eta$, tendenti a zero tendono rispettivamente a zero.

L'espressione precedente si può ancora scrivere nel modo seguente:

$$\int_{-M}^{+M} A(\xi)\, d\xi \int_{-\eta}^{\eta} x \cos kx \operatorname{sen} kx\, dx = \int_{-M}^{+M} A(\xi) \left[\frac{\eta}{2\eta} - \operatorname{sen} \frac{R(\xi-\eta)}{\xi-\eta} - \frac{\operatorname{sen} R(\xi-\eta)}{\xi-\eta} \right] d\xi,$$

e, integrando per parti prendendo $A(\xi)$ per fattor finito, il che si può fare, vista la ipotesi della assoluta continuità ammessa, si ottiene:

$$= \int_{-M}^{+M} A(\xi) \left[- \frac{\operatorname{sen} R(\xi+\eta)}{\xi+\eta} + \frac{\operatorname{sen} R(\xi-\eta)}{\xi-\eta} \right]_{-M}^{+M} + \int_{-M}^{+M} A_1(\xi) \frac{\operatorname{sen} R(\xi+\eta)}{\xi+\eta} d\xi -$$

$$- \int_{-M}^{+M} A_1(\xi) \frac{\operatorname{sen} R(\xi-\eta)}{\xi-\eta} d\xi.$$

Passando ora al limite prima facendo tendere M a $+\infty$ indi R a $-\infty$, si ha, per una formula nota [3] e osservando che per la supposta integrabilità di $A(\xi)$ è $\lim_{M \to +\infty} A(M) = 0$, si ottiene la (1).

Osservazioni. I. – È ovvio che alterando la funzione $A(\xi)$ finiti di un intorno, in modo però che le ipotesi del teorema rimangano verificate, la (1) rimane sempre valida.

II. – Bisogna osservare che la (1) può essere valida anche se le ipotesi del teorema non sono tutte verificate.

2. Facciamo ora un'applicazione della (1) alla determinazione della *velocità di gruppo*. Premettiamo a questo scopo alcune definizioni onde mettere le considerazioni che seguono sotto forma precisa.

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in $-\infty, +\infty$, ammettente derivate del 1° e 2° ordine infinitesime all'infinito e non derivate del 3° ordine integrabile. Supponiamo inoltre che $f(x) + x$, $f'(x)$ sia integrabile con il quadrato [4] su $-\infty, +\infty$. Per la seconda forma dell'integrale di Fourier, è:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha (x - v)\, dx = f(v). \tag{2}$$

[3] Vedere per esempio loc. cit. in (2).

[4] Non facciamo in questa applicazione di questa ulteriore ipotesi sulla $f(x)$ che è soddisfatta per ragioni di invarianza di espressione.

e ponendo:

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos v\alpha \, d\alpha \quad , \quad G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \operatorname{sen} v\alpha \, d\alpha,$$

da cui:

$$A(v) = \sqrt{F^2(v) + G^2(v)} \quad , \quad F(v) = A(v) \cos \varphi(v) \quad , \quad G(v) = A(v) \operatorname{sen} \varphi(v),$$

avremo:

$$(2') \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(v) \cos v\,(x - \varphi(v))\, dv.$$

Se poniamo per definizione:

$$A(v) = A(-v),$$

avremo:

$$(2'') \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos k\,(x - \varphi(k))\, dk.$$

Consideriamo ora la funzione $f(x, t)$ dedotta dalla $f(x)$ mediante la posizione seguente:

$$(3) \qquad f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos k\,[x - \varphi(k) - V(k)\, t]\, dk,$$

dove $V(k)$ è una funzione positiva per k positiva e negativa per k negativa, definita e continua e derivabile per ogni k, tale inoltre che

$$|V(k)| \leq M \quad , \quad |V'(k)| \leq N.$$

La funzione $f(x, t)$ definisce ciò che intenderemo per *gruppo d'onde* e cioè un *effettivo fenomeno* [5] ondulatorio formato dalla sovrapposizione di fenomeni sinusoidali di frequenza e di ampiezza $A(k)$ che si propagano con velocità $V(k)$.

Per un noto teorema [6] avremo che $A(k)$ è derivabile con derivata continua e integrabile con il quadrato su $(-\infty, +\infty)$ ed esiste una costante positiva L, tale che:

$$(4) \qquad |A(k)| \leq \frac{L}{k^3}.$$

(5) È da osservarsi che non è detto che tutte le funzioni $f(x, t)$ rappresentino effettivamente fenomeni ondulatori, potendosi non presentare la circostanza indicata.

(6) Vedere E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the theory of Fourier integrals*. (Oxford, 1937) p. 174.

Definiamo[7] allora *centro del gruppo* il punto dell'asse delle x di ascissa:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f^2(x,t)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x,t)\,dx}.$$

Per le ipotesi ammesse sulla funzione f quest'espressione ha senso. D'altra parte per un teorema di Parseval è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(k)\,dk,$$

e quindi la velocità di spostamento del punto x che viene chiamata *velocità di gruppo* è data dall'espressione:

$$V_g = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x f^2(x,t)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(k)\,dx},$$

il numeratore della quale faremo vedere tra breve che ha senso e che andremo contemporaneamente a calcolare.

La quantità:

$$A(k)\,kV(k)\,\operatorname{sen} k[x - \varphi(k) - V(k)\,t],$$

per la A è limitata su $(-\infty, +\infty)$ continua e integrabile con il quadrato, e quindi[8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\,kV(k)\operatorname{sen} k[x - \varphi(k) - V(k)\,t]\,dk,$$

e questa derivata è per le ipotesi ammesse limitata qualunque siano x e t. Pertanto la quantità $x f^2(x,t) \frac{\partial f}{\partial t}$ risulta integrabile con il quadrato su $(-\infty, -\infty)$, e quindi, sempre per il teorema già sfruttato:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x f^2(x,t)\,dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,t)\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx =$$

[7] Vedere E. PERSICO, *Fondamenti della Meccanica Atomica*. Zanichelli, 1930, p. 110 e p. 120. Per la velocità di gruppo vedere, a p. 127.

[8] Vedere L. TONELLI, *Sulla continuità e la derivabilità di un integrale rispetto a un parametro* (Rendiconti Acc. Lincei », ser. V, vol. XIX (1910).

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos k[x - \varphi - V(k)\,t]\,dk \int_{-\infty}^{+\infty} A(h)\,hV(h) \operatorname{sen} h[x - \varphi - V(h)\,t]\,dh =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(h)\,hV\,h\,dh \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sen} h[x - \varphi - V(k)\,t]\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos k[x - \varphi - V(k)\,t]\,dt,$$

poichè dalla (1) è:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sen} h[x - \varphi - V(h)\,t]\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cos k[x - \varphi - V(k)\,t]\,dk = -A'(h)$$

che è limitata in tutto $(-\infty, +\infty)$ per le ipotesi ammesse, l'integrando al secondo membro è integrabile, e si son potuti scambiare i segni d'integrazione. Si avrà così:

$$V_G = \frac{-2 \int_{-\infty}^{+\infty} A(h)\,A'(h)\,hV(h)\,dh}{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(h)\,dh}.$$

Operiamo sull'integrale del numeratore un'integrazione per parti, avremo:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} A(h)\,A'(h)\,hV(h)\,dh = [hV(h)\,A^2(h)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(k) \frac{d[kV(k)]}{dk}\,dk,$$

e per le ipotesi ammesse su $A(k)$ e su $V(k)$ l'integrale al secondo membro esiste, si ha così finalmente:

$$(6) \qquad V_G = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(k) \frac{d[kV(k)]}{dk}\,dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(k)\,dk}.$$

Questa formola dà in generale l'espressione della « velocità di gruppo ».

Nel caso considerato ordinariamente in Fisica che $A(k)$ sia diverso da zero solo in un intervallo $(k_0 - \delta k, k_0 + \delta k)$ sufficientemente piccolo, si ha ovviamente da (6):

$$V_G = \left\{ \frac{d[kV(k)]}{dk} \right\}_{(k_0 + \theta\delta k)} \sim \left\{ \frac{d[kV(k)]}{dk} \right\}_{k_0} \qquad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Questa è la formola esclusivamente usata, ma essa oltre che essere valida solo in caso limite, e mentre risulta essere indeterminata nei casi concreti (a causa del θ), non ha d'altra parte una marcata maggior semplicità della (6) neanche dal punto di vista formale. La (6) ha in più il vantaggio di derivare da una definizione precisa della velocità di gruppo.

3. Vogliamo ora generalizzare la formola (1) del n. 1. Come dall'espressione dell'integrale di Fourier ordinario si passa alla formola di Fourier dove l'integrazione va intesa nel senso di sommazione generalizzata di Cesaro (C, 1), così dalla (1) si passa alla:

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{k-h} - \frac{\cos^2 x(k-h)}{k-h} - \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{x^2(k-h)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2 \operatorname{sen} x(k-h) \cos x(k-h)}{x(k-h)^2} \right\} dk = A'(h),$$

Gli integrali generalizzati essendo sempre intesi nel senso di Cauchy e l'integrazione nel senso di Lebesgue. La formola (7) è vera, ammessa l'ipotesi che $A(k)$ abbia quasi ovunque derivata $A'(k)$ integrabile su $(-\infty, +\infty)$ in ogni punto in cui esiste la derivata continua. Non si esclude che il primo membro della (7) possa avere senso anche là dove tanto la derivata $A'(h)$, quanto la derivata simmetrica non esistono.

Dimostriamo la (7) indicando brevemente i passaggi, questa dimostrazione non differendo essenzialmente da quella indicata nel n. 1.

Consideriamo:

$$\int_{-R}^{+R} \left\{ -\frac{\cos^2 x(k-h)}{k-h} + \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{k-h} - \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{(k-h)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{x} \frac{\operatorname{sen} x(k-h) \cos x(k-h)}{(k-h)^2} \right\} dx = \left[-\frac{\operatorname{sen} x(k-h) \cos x(k-h)}{(k-h)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{(k-h)^3} \right]_{-R}^{+R} = 2 \left\{ -\frac{\operatorname{sen} R(k-h) \cos R(k-h)}{(k-h)^2} + \frac{1}{R} \frac{\operatorname{sen}^2 R(k-h)}{(k-h)^3} \right\},$$

e visto che:

$$2 \int \left[\frac{\operatorname{sen} R(k-h) \cos R(k-h)}{(k-h)^2} - \frac{1}{R} \frac{\operatorname{sen}^2 R(k-h)}{(k-h)^3} \right] dk = \frac{1}{R} \left(\frac{\operatorname{sen} R(k-h)}{k-h} \right)^2,$$

abbiamo, mediante un'integrazione per parti:

$$\int_{-M}^{+M} A(k)\, 2 \left[-\frac{\operatorname{sen} R(k-h) \cos R(k-h)}{(k-h)^2} + \frac{1}{R} \frac{\operatorname{sen}^2 R(k-h)}{(k-h)^3} \right] dk =$$
$$= \left[-\frac{A(k)}{k} \frac{\operatorname{sen}^2 R(k-h)}{(k-h)^2} \right]_{-M}^{+M} + \frac{1}{R} \int_{-M}^{+M} A'(k) \frac{\operatorname{sen}^2 R(k-h)}{(k-h)} dk.$$

Perciò:

$$\int_{-R}^{+R} dx \int_{-M}^{+M} A(k) \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{k-h} - \frac{\cos^2 x(k-h)}{k-h} - \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{(k-h)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{x} \frac{\operatorname{sen} x(k-h) \cos x(k-h)}{(k-h)^2} \right\} dk = \int_{-M}^{+M} A(k)\, dk \int_{-R}^{+R} \left\{ \frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{k-h} - \right.$$

$$-\frac{\cos^2 x(k-h)}{k-h}-\frac{1}{x^2}\frac{\operatorname{sen}^2 x(k-h)}{(k-h)^3}+\frac{2}{x}\frac{\operatorname{sen} x(k-h)\cos x(k-h}{(k-h)^2}\Bigg\}dk=$$

$$=\left[-\frac{A(k)}{R}\left(\frac{\operatorname{sen} R(k-h)}{k-h}\right)^2\right]_{-M}^{+M}+\frac{1}{R}\int_{-M}^{+M}A'(k)\frac{\operatorname{sen}^2 R(k-h)}{(k-h)^2}\,dk,$$

e passando al limite prima rispetto a M e poi rispetto a R si ha [9] la (7).

Tenendo presente la grande generalità della (7), sarebbe utile definire mediante la (7), quando il primo membro esiste, la derivata d'una funzione $A(k)$. Più in generale introducendo la definizione di sommabilità (C,α), si ha:

se $f(t)$ è una funzione continua integrabile su tutto $(-\infty,+\infty)$ infinitesima all'infinito, posto $F(t)$ una sua primitiva:

$$F(t)=\int f(t)\,dt,$$

anch'essa infinitesima all'infinito, dalla formola nota [10]:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\},$$

integrando per parti l'ultimo integrale, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt=[F(t)\cos u(x-t)]_{-\infty}^{+\infty}-u\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\operatorname{sen} u(x-t)\,dt$$

e quindi:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}u\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\operatorname{sen} u(t-x)\,dt=\frac{1}{2}\{F'(x+0)+F'(x-0)\},$$

che sappiamo esistere. Abbiamo così:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}u\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\cos\left[u(x-t)+\frac{\pi}{2}\right]dt=\frac{1}{2}\{F'(x+0)+F'(x-0)\}.$$

Possiamo pertanto definire quale *derivata simmetrica* (C,α) *del* 1° *ordine d'una funzione* $F(t)$ *la quantità espressa dal primo membro della relazione precedente quando essa esiste* [11].

(9) Vedere E. C. TITCHMARSH, libro citato in (6), pp. 26–29–30.

(10) Vedere (9).

(11) Si propone qui di definire quale *derivata simmetrica* (C,α) *di ordine* β dove β è un numero *reale* qualunque positivo, d'una funzione $F(t)$ l'espressione:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}u^{\beta}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\cos\left[u(x-t)+\beta\frac{\pi}{2}\right]dt,$$

quando questa esiste.

Analisi. – *Sui coefficienti di Fourier di una funzione di funzione*[*]. Nota di MAURO PAGNI, presentata[**] dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Sia $x(t)$ una funzione continua in (a, b), i cui valori siano tutti compresi fra i numeri l ed L, per modo che mentre t percorre l'intervallo (a, b) i valori di $x(t)$ percorrono una o più volte l'intervallo (l, L); e sia al tempo stesso $y = f(x)$ una funzione univoca di x definita in (l, L). Potremo allora considerare la y come una funzione di t in (a, b); tale funzione scriveremo $y = f[x(t)]$ e diremo funzione di funzione. Sotto ipotesi molto generali avrà senso considerare i coefficienti di Fourier relativi alle funzioni $x(t)$, $f(x)$, $f[x(t)]$. Orbene qui ci proponiamo di vedere come i coefficienti di Fourier della funzione di funzione $f[x(t)]$ possono esprimersi mediante quelli della $f(x)$ e della $x(t)$. Come applicazione di ciò, otterremo poi, i coefficienti di Fourier di una funzione inversa $x = \varphi(y)$ mediante quelli della funzione diretta $y = f(x)$.

Uno studio relativo ai coefficienti di Fourier di una funzione di funzione è stato fatto dal Bödewadt [1], limitatamente alle funzioni di funzioni sen $x(t)$, cos $x(t)$, con metodi del tutto diversi da quelli qui seguìti, pervenendo sotto determinate ipotesi sulla funzione $x(t)$ ad esprimere i coefficienti di Fourier di dette funzioni come serie di prodotti di funzioni di Bessel (con parametri interi) dei coefficienti di $x(t)$. Nella stessa Nota è anche trattata, come applicazione l'inversione di una serie di Fourier in ipotesi (esistenza e limitatezza della derivata) più restrittive di quanto qui verrà fatto. Di questo ultimo problema (inversione) si occupa insieme ad altro il Carafa [2] ottenendo resultati quasi analoghi a quelli quì esposti, sotto ipotesi (esistenza della derivata) leggermente più restrittive.

2. Siano $x(t)$ ed $f(x)$ due funzioni definite e continue in $(0, 2\pi)$.

La funzione $f(x)$ che si suppone inoltre a variazione limitata e tale che $f(0) = f(2\pi)$, si definisca in tutto $(-\infty, +\infty)$ mediante la periodicità di periodo 2π.

Si consideri ora la funzione di funzione $f[x(t)]$ della t che resta definita in $(0, 2\pi)$ e cerchiamo di esprimere i suoi coefficienti di Fourier mediante quelli delle funzioni $f(x)$, ed $x(t)$.

Dimostriamo innanzi tutto che posto:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \quad ; \quad a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos r x\,dx \quad ; \quad b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, rx\,dx$$

$$(r = 1, 2, \cdots)$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) U. T. BÖDEWADT, *Die Fourierentwicklung des Sinus Cosinus und der Umkehrung einer Fourierreihe*. «Math. Zeit,», 47 Band, pp. 655-662 (1942).

(2) M. CARAFA, *Applicazioni delle Serie di Fourier all'inversione delle funzioni e al calcolo numerico delle radici reali di un'equazione*. « Rend. Sem. Mat. Roma », IV, ser. 3 (1939), pp. 73-83.

si ha:

$$(1) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x(t)]\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a_0\,dt + \sum_r \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (a_r \cos rx(t) + b_r \operatorname{sen} rx(t))\,dt .$$

Infatti essendo la $f(x)$ continua, a variazione limitata e periodica si ha per ogni x

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_r (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx)$$

e sostituendo al posto di x, $x(t)$

$$(3) \qquad f[x(t)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_r (a_r \cos rx(t) + b_r \operatorname{sen} rx(t)).$$

Basterà ora far vedere che è possibile l'integrazione termine a termine della relazione su scritta. All'uopo posto:

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{n} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx),$$

osserviamo che, per essere la $f(x)$ a variazione limitata, esiste un numero positivo M tale che $|s_n(x)| < M$ per ogni n e per ogni x di $(0, 2\pi)$ [3]; dal che segue $|s_n[x(t)]| < M$, per ogni n e per ogni t di $(0, 2\pi)$. Da ciò la possibilità d'integrare termine a termine la (3).

3. Con procedimento analogo a quello ora adottato si perviene alle seguenti relazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f[x(t)] \cos nt\,dt = \sum_r \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [a_r \cos rx(t) + b_r \operatorname{sen} rx(t)] \cos nt\,dt ; \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f[x(t)] \operatorname{sen} nt\,dt = \sum_r \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [a_r \cos rx(t) + b_r \operatorname{sen} rx(t)] \operatorname{sen} nt\,dt ; \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

ponendo ora

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x(t)]\,dt \quad ; \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x(t)] \cos nt\,dt \quad ; \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f[x(t)] \operatorname{sen} nt\,dt ;$$

$$\gamma_0^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(t)\,dt \quad ; \quad \gamma_n^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(t) \cos nt\,dt \quad ; \quad \delta_n^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(t) \operatorname{sen} nt\,dt ;$$

$$\bar{\gamma}_0^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} rx(t)\,dt \quad ; \quad \bar{\gamma}_n^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} rx(t) \cos nt\,dt \quad ; \quad \bar{\delta}_n^{(r)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} rx(t) \operatorname{sen} nt\,dt ;$$

$$(r = 1, 2, \cdots) \quad ; \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

(3) Si veda per esempio L. TONELLI, *Serie Trigonometriche*. Bologna, p. 320 (1928).

la (4) e la (1) si scrivono:

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = a_0 + \sum_r (a_r \gamma_0^{(r)} + b_r \bar{\gamma}_0^{(r)}) \\ \alpha_n = \sum_r (a_r \gamma_n^{(r)} + b_r \bar{\gamma}_n^{(r)}) \\ \beta_n = \sum_r (a_r \delta_n^{(r)} + b_r \bar{\delta}_n^{(r)}) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

Siamo così pervenuti ad esprimere i coefficienti di Fourier della funzione di funzione $f[x(t)]$ mediante quelli della $f(x)$ e quelli delle funzioni $\cos rx(t)$, $\operatorname{sen} rx(t)$. Per raggiungere lo scopo propostoci (calcolo dei coefficienti della $f[x(t)]$ mediante quelli della $f(x)$ e della $x(t)$ basterà esprimere i coefficienti di Fourier di $\cos rx(t)$, $\operatorname{sen} rx(t)$, che compaiono nelle (5) mediante i coefficienti di $x(t)$.

4. Sviluppiamo in serie di Taylor le funzioni $\cos rx$, $\operatorname{sen} rx$

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos rx = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \\ \operatorname{sen} rx = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{cases}$$

dove le serie dei secondi membri convergono per ogni x finito.

Sostituendo nelle (6) al posto di x la funzione $x(t)$ abbiamo:

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos rx(t) = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k} x(t)^{2k}}{(2k)!} \\ \operatorname{sen} rx(t) = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k+1} x(t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{cases}$$

relazioni valide per ogni t di $(0, 2\pi)$ perchè la $x(t)$ varia, essendo continua in un tratto finito.

Integrando per serie le (7) (operazione lecita in quanto gli estremi superiori dei moduli dei termini delle serie che sono a secondo membro, sono serie convergenti) otteniamo:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos rx(t)\, dt = \sum_{o=k} (-1)^k \dfrac{r^{2k}}{(2k)!} \cdot \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)^{2k}\, dt; \\ \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} rx(t)\, dt = \sum_{o=k} (-1)^k \dfrac{r^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)^{2k+1}\, dt; \end{cases}$$

che ponendo

$$c_0^{(2k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)^{2k}\, dt \quad ; \quad c_0^{(2k+1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)^{2k+1}\, dt; \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

e tenendo conto delle notazioni adottate si scrive:

$$(9)\qquad \begin{cases} \gamma_0^{(r)} = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k}}{(2k)!}\, c_0^{(2k)} \\ \bar{\gamma}_0^{(r)} = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}\, c_0^{(2k+1)} \end{cases}$$

Con analogo procedimento, dopo aver posto:

$$c_n^{(2k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)^{2k} \cos nt\, dt \quad ; \quad d_n^{(2k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)^{2k} \operatorname{sen} nt\, dt ; \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

otteniamo

$$(10)\qquad \begin{cases} \gamma_n^{(r)} = \sum_{k=1} (-1)^k \dfrac{r^{2k}}{(2k)!}\, c_n^{(2k)} \\ \bar{\gamma}_n^{(r)} = \sum_{k=0} (-1)^k \dfrac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}\, c_n^{(2k+1)} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \delta_n^{(r)} = \sum_{k=1} (-1)^k \dfrac{r^{2k}}{(2k)!}\, d_n^{(2k)} \\ \bar{\delta}_n^{(r)} = \sum_{k=0} (-1) \dfrac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}\, d_n^{(2k+1)} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Con questo abbiamo espresso i coefficienti di Fourier α_n, β_n della funzione di funzione $f[x(t)]$, mediante a_r, b_r (coefficienti di Fourier della $f(x)$) ed i coefficienti di Fourier delle potenze della funzione $x(t)$. Occorre avere, per completare la ricerca propostaci, i coefficienti delle potenze $x(t)$ mediante quelli di $x(t)$. A questo si perviene adoperando le note formule del prodotto di due serie di Fourier [4].

5. Osservazioni. – I. Se la funzione $x(t)$, al variare di t in $(0, 2\pi)$ varia in un intervallo (l, L) di ampiezza minore a 2π, nelle relazioni (5) pur restando univocamente determinati i valori α_0, α_n, β_n, (che sono i coefficienti di Fourier della $f[x(t)]$), al posto degli a_r, b_r possono sostituirsi valori diversi, in accordo col fatto che la $f[x(t)]$ dipende dalla x, per un intervallo di ampiezza minore 2π.

II. Circa la convergenza della serie di Fourier della funzione $f[x(t)]$ di cui noi abbiamo calcolato i coefficienti α_0, α_n, β_n, va notato che se $x(t)$ è crescente, si à che detta serie converge alla $f[x(t)]$ uniformemente nel tratto $0 \leq t \leq 2\pi$. Ciò segue da noti teoremi di convergenza sulle serie di Fourier [5], dopo avere osservato che una funzione a variazione limitata di funzione crescente è a variazione limitata.

[4] Si veda, per esempio, L. Tonelli, *Serie Trigonometriche*. Bologna, p. 335 (1928).

[5] Si veda, per esempio, L. Tonelli, *Serie Trigonometriche*. Bologna, p. 282 e sgg. (1928).

6. Sia $y = f(x)$ una funzione assolutamente continua, crescente in $(0, 2\pi)$ e tale che $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi$.

Vogliamo dare, come applicazione di quanto sopra ottenuto, l'espressione dei coefficienti di Fourier della funzione inversa $x = \varphi(y)$ (che per le ipotesi fatte esiste) mediante i coefficienti di Fourier della funzione diretta $y = f(x)$

Siano

$$(12)\qquad \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(y)\, dy \\ c_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(y) \cos my\, dy \qquad (m = 1, 2, \cdots) \\ d_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(y) \operatorname{sen} my\, dy \end{cases}$$

i coefficienti di Fourier della $\varphi(y)$. Tenendo conto che $x = \varphi(y)$ le (12) divengono (integrazione per sostituzione).

$$(13)\qquad \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x f'(x)\, dx \\ c_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x f'(x) \cos mf(x)\, dx \qquad (m = 1, 2, \cdots) \\ d_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x f'(x) \operatorname{sen} mf(x)\, dx . \end{cases}$$

Formule che ci daranno modo di calcolare i coefficienti c_0 , c_m , d_m, della $\varphi(y)$ conoscendo la $f(x)$.

Le (13) possono anche scriversi

$$(14)\qquad \begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\, df(x) \\ c_m = \dfrac{1}{m\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\, d \operatorname{sen} mf(x) \qquad (m = 1, 2, \cdots) \\ d_m = -\dfrac{1}{m\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x\, d \cos mf(x) . \end{cases}$$

Integrando per parti i secondi membri delle (14) (le funzioni sen $mf(x)$, cos $mf(x)$ sono assolutamente continue poichè una funzione assolutamente continua di funzione assolutamente continua crescente è assolutamente continua) si ha:

$$(15)\qquad \begin{cases} c_0 = 4\pi - a_0 \\ c_m = -\dfrac{1}{m\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mf(x)\,dx \\ d_m = -\dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{\pi m}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mf(x)\,dx \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

d'altra parte per le formule (8) è:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mf(x)\,dx = \sum_{o=k} (-1)^k \frac{m^{2k}}{(2k)!}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^{2k}\,dx \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mf(x)\,dx = \sum_{o=k} (-1)^k \frac{m^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^{2k+1}\,dx \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

Posto

$$a_0^{(2k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^{2k}\,dx \quad ; \quad a_0^{(2k+1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^{2k+1}\,dx$$

e tenendo presenti le relazioni (15) e (16) abbiamo:

$$(17)\qquad \begin{cases} c_0 = +\pi - a_0 \\ c_m = -\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0} (-1)^k \frac{m^{2k+1}}{(2k+1)!}\,a_0^{(2k+1)} \\ d_m = -\dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{o=k} (-1)^k \frac{m^{2k}}{(2k)!}\,a_0^{(2k)} \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

formule che esprimono i coefficienti di Fourier della funzione $\varphi(y)$, (inversa della $f(x)$ mediante il primo coefficiente di Fourier delle potenze della $f(x)$. Servendoci, come abbiamo già detto, delle formule del prodotto di due serie di Fourier si esprimono gli $a_0^{(2k)}$ in funzione di a_0, a_n, b_n, che sono i coefficienti di Fourier della $f(x)$.

Otteniamo così i coefficienti di Fourier della $\varphi(y)$ mediante quelli della $f(x)$.

Matematica. — *Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie.* Nota di FABIO CONFORTO, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

1. Nella presente Nota chiamo *matrice quasi abeliana* ogni matrice a π righe ed a $\pi' < 2\pi$ colonne, la quale si possa assumere quale matrice dei periodi (primitivi) di un corpo di funzioni quasi abeliane (1) di π variabili.

Sia K un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili, che indico con $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$ e, complessivamente, con una matrice a π righe e ad una colonna, che ha $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$ come elementi. Sia inoltre ω una matrice quasi abeliana relativa a K e V_π la varietà di Picard associata a K; la V_π è una varietà algebrica, determinata a meno di trasformazioni birazionali, i cui punti sono in corrispondenza (generalmente) biunivoca col prisma dei periodi. Le variabili $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$ divengono sulla V_π π integrali semplici linearmente indipendenti che son da considerare come *virtualmente di prima specie*. Ad ogni gruppo generico di valori $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$ corrisponde sulla V_π un punto P, in cui gli integrali anzidetti assumono tali valori: indicherò sinteticamente tale punto con $P(u)$. Inversamente, ad ogni punto generico della V_π corrisponde un gruppo di valori $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$ e tutti i gruppi di valori congrui a questo modulo ω, due gruppi u, u' dicendosi congrui modulo ω, e scrivendosi:

$$u' \equiv u \qquad (\text{mod. } \omega),$$

quando la matrice $u' - u$ sia una combinazione lineare a coefficienti interi delle colonne di ω.

2. Ciò premesso, la presente Nota stabilisce alcune proposizioni preliminari, destinate a venir utilizzate in future ricerche di più vasta portata, sulle corrispondenze univoche tra i punti della V_π di Picard, rappresentate da congruenze del tipo

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{2.1}$$

dove la Λ è una matrice quadrata d'ordine π e λ una matrice a π righe e ad una colonna.

Perchè la congruenza (2.1) abbia un senso, occorre che, sostituendo ad u un qualunque gruppo ad esso congruo mod. ω, il secondo membro della (2.1) aumenti di una combinazione lineare a coefficienti interi delle colonne di ω. Imitando un classico ragionamento di Hurwitz, si vede subito che affinchè

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) La teoria delle funzioni quasi abeliane è stata costruita recentemente da F. SEVERI nella Memoria: *Funzioni quasi abeliane*, «Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia», n. 4 (1947). Nel seguito, tale lavoro sarà citato con F. Q. A.

ciò accada occorre e basta che la matrice ω soddisfi ad una *relazione di Hurwitz generalizzata* [2] del tipo:

$$\omega I = \Lambda \omega \tag{2. 2}$$

essendo I una matrice quadrata d'ordine π' *ad elementi interi*.

Se vale la (2. 2), ad ogni u generico corrisponde, mercè la (2. 1), un u', determinato mod. ω; e quindi al punto $P(u)$ un punto $P'(u')$. Sorge così sulla V_π una *corrispondenza univoca*, che si può ritenere *rappresentata* dalla (2. 1).

Stabilito ciò, nel seguito della Nota, dopo aver osservato rapidamente che *la corrispondenza* (2. 1) *è non degenere allora ed allora soltanto che il determinante* $|\Lambda|$ *della matrice* Λ *sia non nullo*, concludo con la proposizione seguente:

Una corrispondenza univoca del tipo (2. 1) *non degenere è sempre dotata di un primo indice finito, il cui valore è dato dal valore assoluto del determinante della matrice* I *nella* (2. 2).

In altre parole: *se nella* (2. 1) *è* $|\Lambda| \neq 0$, *la* (2. 1) *rappresenta sulla* V_π *una corrispondenza non degenere* $(\alpha, 1)$, *dove* α *è il valore assoluto di* $|I|$.

Come si vede si tratta di osservazioni e di proposizioni che già si presentano nella teoria delle funzioni abeliane. Ma il passaggio dal caso abeliano a quello quasi abeliano esige una tecnica dimostrativa appropriata e non manca di dar luogo a qualche considerazione nuova.

Giova inoltre osservare sin d'ora che la proposizione testè enunciata ha un senso più profondo nel caso quasi abeliano di quanto non sia nel caso abeliano. Invero, supposta soddisfatta la (2. 2), la (2. 1) è bensì una corrispondenza ovviamente analitica sulla V_π, ma non è affatto detto che essa debba risultare *algebrica*. Ciò segue già dalla mia Memoria citata in [2], nella quale ho trovato sopra una particolare V_π di Picard quasi abeliana trasformazioni biunivoche (anche) *trascendenti* (oltre che algebriche); e dipende sostanzialmente dal fatto che la corrispondenza opera in realtà non su tutta la V_π ma sulla V_π, dalla quale si tolga la varietà dei punti singolari (e d'indeterminazione) degli integrali $u_1, u_2, \cdots, u_\pi$: su tale varietà, che manca sempre nel caso abeliano, perchè allora gli integrali anzidetti sono non solo virtualmente ma *effettivamente* di prima specie, le funzioni, con le quali si realizza la corrispondenza, possono presentare singolarità tali da far perdere il carattere algebrico alla corrispondenza stessa. Così stando le cose non ha *a priori* alcun senso il dire che le corrispondenze considerate hanno un primo indice, nel senso che tale frase ha nella teoria delle corrispondenze algebriche. Nè si potrebbe *a priori* escludere che un generico P' provenga da una infinità *discreta* di punti P, ciò che non succede mai nelle corrispondenze algebriche.

(2) Ho introdotto la considerazione di tali relazioni nella Memoria: *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo*, in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica ».

3. Poichè il punto $P(u)$ può essere un punto generico della V_π l'affermare che la (2. 1) è non degenere si riduce a far vedere che anche il corrispondente $P'(u')$ di $P(u)$ invade tutta la V_π.

Se ora è $|\Lambda| = 0$, si può determinare una matrice quadrata d'ordine π *ad elementi non tutti nulli*, Λ' tale che:

$$\Lambda' \Lambda = 0;$$

ma allora, scritta la (2. 1) nella forma:

$$u' = \Lambda u + \lambda + \omega m \tag{3. 1}$$

dove m indica una matrice a π' righe e ad una colonna con elementi interi, moltiplicando la (3. 1) a sinistra per Λ' viene:

$$\Lambda' u' = \Lambda' \lambda + \Lambda' \omega m$$

sicchè u' non è più liberamente variabile e la corrispondenza è degenere. Se dunque $|\Lambda| = 0$, la corrispondenza è degenere. Perchè la corrispondenza non sia degenere è perciò *necessario* che sia $|\Lambda| \neq 0$.

Inversamente, se $|\Lambda| \neq 0$, esiste l'inversa Λ^{-1} della Λ e dalla (3. 1) si deduce:

$$u = \Lambda^{-1} u' - \Lambda^{-1} \lambda - \Lambda^{-1} \omega m \tag{3. 2}$$

la quale dimostra che, dato *genericamente* u' si può calcolare u, sicchè la corrispondenza non è degenere.

Rimane così stabilito che:

La corrispondenza univoca (2. 1) *è non degenere allora ed allora soltanto che sia* $|\Lambda| \neq 0$.

4. Conviene ora presentare la seguente osservazione:

Se ω *è una matrice quasi abeliana, ed è*:

$$\omega C = 0 \tag{4. 1}$$

essendo C *una matrice con elementi interi, formata da una sola colonna, tutti gli elementi di* C *sono nulli.*

La giustificazione di simile osservazione è quanto mai ovvia. Dire infatti che la ω, quale matrice quasi abeliana, è la matrice dei periodi *primitivi* di un corpo di funzioni quasi abeliane K significa semplicemente che tutti e soli e *ciascuno una volta sola* i (vettori) periodi delle funzioni di K si ottengono considerando tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi delle colonne di ω. Essendo quindi C costituita da interi, ωC è un periodo ed anzi, per la (4. 1), è il periodo nullo, cioè costituito da tutti gli elementi nulli. Ma tale periodo si ottiene già dalla combinazione lineare delle colonne di ω con coefficienti tutti nulli. E poichè non possono due combinazioni lineari *distinte* a coefficienti interi delle colonne della ω dare luogo allo stesso periodo, la ωC deve essere la combinazione lineare a coefficienti tutti nulli delle colonne di ω, ciò che appunto implica che tutti gli elementi di C sono nulli.

Come immediata conseguenza dell'osservazione fatta, conviene enunciare esplicitamente il seguente corollario:

Se ω *è una matrice quasi abeliana e* C *una qualunque matrice ad elementi interi per cui* $\omega C = 0$, *la* C *è la matrice nulla.*

Invero dall'osservazione fatta segue che debbono essere nulli gli elementi di ciascuna colonna della C.

5. Ritornando dopo ciò alla (2. 2) si ricordi che se ω è una matrice di Riemann (caso *abeliano*) le due matrici Λ ed I si individuano reciprocamente; inoltre si ha:

$$|I| = |\Lambda| \cdot |\bar{\Lambda}| \tag{5.1}$$

essendo $\bar{\Lambda}$ la matrice complessa coniugata della Λ (sicchè le due equazioni $|I| = 0$ e $|\Lambda| = 0$ conseguono l'una dall'altra); ed è sempre $|I| \geqq 0$.

Di tali proprietà, talune permangono ed altre no, passando al caso quasi abeliano.

Anzitutto, *la* I *non individua la* Λ. Se infatti, essendo $\pi = \delta_1 + \delta_2$, la matrice quasi abeliana ω ha la forma:

$$\omega = \left\| \begin{matrix} B \\ 0 \end{matrix} \right\| \tag{5.2}$$

dove B è la matrice diagonale d'ordine δ_1, che ha sulla diagonale principale tutti gli elementi uguali a $2\pi i$ [3], la (2. 2) è soddisfatta prendendo per I una *qualunque* matrice a coefficienti interi e ponendo:

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} I & C_1 \\ 0 & C_2 \end{matrix} \right\| \tag{5.3}$$

dove C_1 e C_2 sono matrici *qualsiasi* a δ_2 colonne e rispettivamente a δ_1 ed a δ_2 righe. Per una I determinata vi possono perciò essere addirittura *infinite* possibili Λ. Dall'esempio considerato si deduce anche subito che *non* può valere la (5. 1). Prendendo infatti opportunamente le matrici C_1 e C_2 nella (5. 3), il determinante $|\Lambda|$ può assumere qualunque valore (se $|I| = 0$). Nè è vero che sia sempre $|I| \geqq 0$, perchè, in rapporto alla tabella di periodi (5. 2), la I può essere data *arbitrariamente* e quindi $|I|$ avere un qualunque valore intero.

Per contro, *la* Λ *individua la* I. Se infatti per una data Λ fosse:

$$\omega I = \Lambda \omega \quad , \quad \omega I' = \Lambda \omega \tag{5.4}$$

si dedurrebbe:

$$\omega (I - I') = 0;$$

ma la $I - I'$ è a coefficienti interi, onde per il corollario alla fine del n. 4, sarebbe $I - I' = 0$, ossia $I = I'$.

(3) Le matrici quasi abeliane della forma (5. 2) rientrano come caso particolare nelle matrici quasi abeliane di forma normale, quali si trovano indicate in F.Q.A., n. 28.

Se dunque valgono le (5. 4) è certo $I = I'$, sicchè la Λ *individua* la I. Ciò indica già che la I della (2. 2) è intrinsecamente legata alla corrispondenza univoca (2. 1) come appunto afferma la proposizione enunciata alla fine del n. 2, che si tende a dimostrare.

Infine, nel caso quasi abeliano, *mentre da* $|\Lambda_1| = 0$ *non consegue* $|I| = 0$, *si ha invece che da* $|I| = 0$ *consegue* $|\Lambda| = 0$.

La prima parte di questo enunciato si prova subito con un esempio. Se, in rapporto alla (5. 2), si prendono I e C_2 in modo che sia $|I| \neq 0$ e $|C_2| = 0$, dalla (5. 3) si ha $|\Lambda| = 0$, mentre appunto è $|I| \neq 0$.

Sia invece $|I| = 0$. Provo che allora è $|\Lambda| = 0$. Ciò risulterà senza altro provando che *da* $|\Lambda| \neq 0$ *segue* $|I| \neq 0$, che è propriamente ciò che interessa per il seguito.

Se infatti è $|\Lambda| \neq 0$, non solo la ω ma anche la $\Lambda\,\omega$ è una matrice quasi abeliana [4]. Dalla (2. 2) segue allora che anche la ωI è una matrice quasi abeliana. Se ora fosse $|I| = 0$, si potrebbe determinare una matrice quadrata ad elementi interi *non tutti nulli*, I', per cui:

$$I\,I' = 0\,.$$

Allora sarebbe:

$$\omega \cdot I\,I' = \omega\,I \cdot I' = 0\,.$$

Ma, essendo la ωI una matrice quasi abeliana, per il corollario alla fine del n. 4, sarebbe $I' = 0$, mentre, per costruzione, non tutti gli elementi dello I' sono nulli. È dunque assurdo supporre $|I| \neq 0$ e rimane perciò provato che se $|\Lambda| \neq 0$ è anche $|I| \neq 0$.

6. Si possiedono ora tutti gli elementi per dimostrare la proposizione enunciata alla fine del n. 2, seguendo lo stesso ragionamento, che si usa nel caso abeliano [5].

Si consideri la corrispondenza univoca T, rappresentata dalla (2. 1) e per la quale vale la (2. 2). Supposta la T non degenere, sarà (n. 3): $|\Lambda| \neq 0$, per guisa che vale la (3. 2) e questa è perfettamente equivalente alla (2. 1).

La dimostrazione dell'esistenza di un primo indice *finito* per la T sarà ora fatta, in guisa da pervenire addirittura al *valore* di tale primo indice.

All'uopo, tutto si riduce a provare che, scelto un punto generico $P'(u')$ sulla V_π, esiste un numero finito di gruppi di valori u incongrui modulo ω, tali che i punti $P(u)$ abbiano come corrispondente nella T l'assegnato punto P'. In altre parole, si tratta di determinare il numero dei gruppi di valori incongrui modulo ω che può assumere il gruppo u nella (3. 1) facendo percorrere ad u' la classe di tutti i gruppi di valori ad esso congrui. L'esistenza di un primo indice finito della T è automaticamente acquisita se riesce il calcolo diretto di tale numero.

(4) È precisamente la matrice quasi abeliana relativa al corpo di funzioni quasi abeliane che si ottiene dal corpo K eseguendo la sostituzione lineare non degenere di variabili $u' = \Lambda\,u$.

(5) G. SCORZA, *Alcune questioni di geometria sopra una varietà abeliana qualunque*, «Atti dell'Acc. Gioenia di Catania», vol. 11 (1918).

Detta x una matrice ad elementi interi di π' righe e di una colonna, si ponga al posto di u' nella (3.2): $u' + \omega x$. Verrà:

$$u = \Lambda^{-1} u' + \Lambda^{-1} \omega x - \Lambda^{-1} \lambda - \Lambda^{-1} \omega m,$$

ovvero anche, ponendo $x - m = X$, sicchè X sarà anch'essa una matrice a π' righe e ad una colonna con elementi interi:

$$u = \Lambda^{-1} u' - \Lambda^{-1} \lambda + \Lambda^{-1} \omega X. \tag{6.1}$$

Poichè ora, per ipotesi, è $|\Lambda| \neq 0$, sarà altresì (n. 5): $|I| \neq 0$. La matrice I sarà perciò anch'essa dotata di inversa I^{-1}; e dalla (2.2) si può dedurre (moltiplicando a sinistra per Λ^{-1} ed a destra per I^{-1}):

$$\Lambda^{-1} \omega = \omega I^{-1}.$$

la (6.1) assume perciò la forma:

$$u = \Lambda^{-1} u' - \Lambda^{-1} \lambda + \omega I^{-1} X. \tag{6.2}$$

Fissate le matrici u', λ e Λ, tutto si riduce ora a sapere quanti gruppi di valori incongrui si ottengono per u lasciando variare comunque gli elementi della X nel campo dei numeri interi. All'uopo si osservi che due distinte matrici X ed X' (ad elementi interi) dànno luogo a due u congrui allora ed allora soltanto che, insieme alla (6.2), valga la:

$$u + \omega n = \Lambda^{-1} u' - \Lambda^{-1} \lambda + \omega I^{-1} X' \tag{6.3}$$

essendo n una matrice a π' righe e ad una colonna con elementi interi. Dalle (6.2) e (6.3) sottraendo si deduce subito:

$$\omega I^{-1} (X' - X) = \omega n. \tag{6.4}$$

Inversamente, se X , X' soddisfano alla (6.4) e vale la (6.2), si deduce subito la (6.3).

Sia ora J la matrice trasposta della matrice ad elementi interi ogni cui elemento sia il complemento algebrico dell'elemento di ugual posto in I. Sarà allora:

$$I^{-1} = \frac{I}{|I|} J,$$

sicchè la (6.4) si scriverà:

$$\omega J (X' - X) - |I| \omega n = 0. \tag{6.5}$$

Posto $C = J (X' - X) - |I| n$, in base alla (6.5) sarà $\omega C = 0$, sicchè, per il corollario alla fine del n. 4, sarà $C = 0$ e quindi:

$$J (X' - X) = |I| n,$$

ossia, con evidente significato dei simboli:

$$J (X' - X) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \alpha) \tag{6.6}$$

essendo α il valore assoluto di $|I|$.

Inversamente dalla (6. 6) si può ripassare ovviamente alla (6. 4). In base alla (6. 6) risulta evidente che due matrici X , X′ tali che

$$X \equiv X' \qquad (\text{mod. } \alpha)$$

dànno luogo a valori congrui di u. Basta dunque ricercare quante *classi* X modulo α dànno luogo a valori incongrui di u.

Ciascuno dei π' elementi di X può ora assumere (modulo α) α valori diversi, onde (modulo α) esistono $\alpha^{\pi'}$ (classi di) matrici X distinte. Fissata una di esse, X, esistono [6] $\alpha^{\pi'-1}$ matrici X′ soddisfacenti alle congruenze (6. 6). Le matrici che dànno luogo ad u incongrui modulo ω nella (6. 2) sono perciò in numero di:

$$\frac{\alpha^{\pi'}}{\alpha^{\pi'-1}} = \alpha .$$

Risulta pertanto provato che α *è il primo indice della corrispondenza* T e quindi il teorema enunciato alla fine del n. 2.

7. Come corollario immediato di quanto precede, giova rilevare esplicitamente la proposizione seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la:

$$u' = \Lambda u + \lambda$$

si possa interpretare come una trasformazione (analitica e generalmente) biunivoca sulla varietà di Picard associata ad un corpo K *di funzioni quasi abeliane è che, detta* ω *una matrice di periodi (primitivi) relativa a* K, *sia non nullo il determinante di* Λ *e che si possa trovare una matrice unimodulare (ossia ad elementi interi e con determinante* ± 1) I *tale che sia:*

$$\omega I = \Lambda \omega .$$

Geometria. — *Sulle corrispondenze fra due curve birazionalmente distinte a moduli generali e sui modelli minimi dei loro prodotti.* Nota di ALDO ANDREOTTI, presentata [*] dal Socio F. SEVERI.

Ci proponiamo come scopo ultimo di determinare i *modelli minimi* della superficie $F = C \times \Gamma$ prodotto di due curve algebriche birazionalmente distinte C , Γ [1], *a moduli generali.*

(6) A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen.* (Lipsia, 1903), cap. II, teorema VI.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) Cioè le superficie d'ordine minimo in corrispondenza birazionale senza eccezioni con F. Per la nozione di *modello minimo* d'una varietà, introdotto da SEVERI, ved. ad esempio SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, a cura di F. CONFORTO ed E. MARTINELLI, ed. Cremonese, Roma, p. 20 e sgg. (1942).

Sarà per questo necessario determinare anzitutto la base sopra F (n. 1)[2]; dopodichè la costruzione dei modelli minimi di F discenderà agevolmente (n. 2). In altra Nota sarà considerato il caso di due curve birazionalmente equivalenti.

1. Vogliamo anzitutto dimostrare la seguente proposizione, che non ci pare sia stata finora osservata:

tra due curve birazionalmente distinte C , Γ , *a moduli generali non intercedono che corrispondenze a valenza (nulla)* [3].

Osserviamo anzitutto che se l'una, C o Γ delle due curve è razionale, qualunque siano i moduli dell'altra, la cosa è senz'altro verificata dato che ogni serie razionale di gruppi di punti sopra una curva è sempre contenuta totalmente in una serie lineare [4].

Supponiamo dunque che i generi p , π di C , Γ rispettivamente, siano diversi da zero. È noto allora [5] che l'esistenza d'una corrispondenza singolare (cioè non a valenza) fra C e Γ porta la risolubilità in numeri interi λ_{rs} non tutti nulli del sistema:

$$(1) \qquad \left\{ \sum_{r}^{2p} \sum_{s}^{2\pi} \lambda_{rs}\, \tau_{hr}\, \vartheta_{ks} = 0 \right. \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, p \\ k = 1, \cdots, \pi \end{pmatrix}$$

ove $\| \tau_{hr} \|, \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, p \\ r = 1, \cdots, 2p \end{pmatrix}$; $\| \vartheta_{ks} \|, \begin{pmatrix} k = 1, \cdots, \pi \\ s = 1, \cdots, 2\pi \end{pmatrix}$ sono, per C , Γ le matrici dei periodi rispettivamente di p o π integrali abeliani linearmente indipendenti appartenenti alla curva (e viceversa).

Se le τ , ϑ fossero esclusivamente legate dalle relazioni di uguaglianza e disuguaglianza stabilite da Riemann ne verrebbe subito che le (1) per τ , ϑ «generiche» [6] non sarebbero soddisfatte che colle λ tutte nulle.

(2) Cfr. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, «Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino», ser. II, t. 54, p. 1 e sgg. (1903).

(3) Ved. per la nozione di corrispondenza a valenza fra curve distinte, ad esempio SEVERI, loc. cit. in (2) p. 8, od anche il suo *Trattato di Geometria Algebrica*, ed. Zanichelli Bologna, vol. I, parte 1ª, p. 218 (1926). La proprietà analoga per le corrispondenze (a valenza anche non nulla) fra curve coincidenti è nota.

(4) Ved. ENRIQUES, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche*, «Rendiconti di Palermo», t. 10, p. 30 e sgg. (1896). Cfr. SEVERI loc. cit. in (1) p. 85.

(5) Ved. HURWITZ, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*, «Mathematische Annalen», Bd. 28, p. 263, nota (**) 1886). Le relazioni in questione sono state esplicitamente scritte ed adoperate per la prima volta da ROSATI, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche*, «Annali di Matematica», ser. III, t. 28, p. 37 (1919). Cfr. anche LEFSCHETZ, *Correspondences between algebraic curves*, «Annals of Mathematics», t. 28, p. 349 e sgg. (1927).

(6) Basta fare ad esempio:

per $r \leq p$ $\tau_{hr} = 0$ se $h \neq r$; $\tau_{rr} = 1$, e per $r > p$ $\tau_{hr} = i e^{h+r-p}$

e così:

per $s \leq \pi$ $\vartheta_{ks} = 0$ se $k \neq s$; $\vartheta_{ss} = 1$, e per $s > \pi$ $\vartheta_{ks} = e^{2\pi(k+s-p)}$.

Ma appena sia $p > 3$ ($\pi > 3$) le τ (ϑ) risultano oltre che dalle relazioni di Riemann, legate da un certo numero di relazioni note fin'ora solo nel caso delle curve di genere 4 [7] e sorge allora il dubbio [8] che proprio in conseguenza di tali relazioni per opportuni λ non tutti nulli le (1) siano verificate.

Per rimuovere questo dubbio cominciamo a dimostrare che fissata Γ e nelle (1) gli interi λ non tutti nulli, entro la varietà (algebrica) V delle curve di genere p, quei punti cui corrispondono curve C per cui risultano soddisfatte le (1), scegliendo su C gli integrali abeliani come sarà indicato appresso, vi formano una varietà (analitica) subordinata.

Per questo, supposto com'è lecito, che C sia una curva piana d'ordine n, facciamola tendere ad una curva razionale irriducibile C* del suo piano con p nuovi punti doppi. In questa variazione vi sono sulla riemanniana R di C, supposta ridotta al tipo di Luroth–Clebreh [9], p coppie di punti di diramazione, necessariamente unenti gli ultimi due fogli (chè altrimenti C* sarebbe spezzata), che tendono a coincidere. Seguiamo sopra R le retrosezioni mediante p cicli $a_1, \cdots, a_p$ avvolgenti sull'ultimo foglio le coppie suddette e altri p cicli $b_1, \cdots, b_p$ unenti le linee di passaggio che congiungono quelle coppie colla rimanente linea di passaggio fra gli ultimi due fogli [10].

Su C*, come curva virtualmente di genere p rispetto alle p coppie neutre dei *nuovi* punti doppi, consideriamo il sistema dei p integrali neutri di 1ª specie $J_1^*, J_2^*, \cdots, J_p^*$ normalizzati rispetto al sistema (a_r^*, b_r^*) $(r = 1, \cdots, p)$ delle retrosezioni limiti delle precedenti. Si può fare in modo [11] che le p aggiunte d'ordine $n-3$ a C che dànno i p integrali di prima specie di cui $|\tau_{hr}|$ è la matrice dei periodi, tendano alle p aggiunte neutre a C* che dànno gli integrali testè indicati.

Allora la matrice $|\tau_{hr}|$ tende [12] alla matrice (ove le τ^* sono quantità finite).

	a_1^*	a_2^*	·	a_p^*	b_1^*	b_2^*	·	b_p^*
J_1^*	1	0	·	0	∞	$\tau^*_{1\,p+2}$	·	$\tau^*_{1\,2p}$
J_2^*	0	1	·	0	$\tau^*_{2\,p+1}$	∞	·	$\tau^*_{2\,2p}$
·	·	·	·	·	·	·	·	·
J_p^*	0	0	·	1	$\tau^*_{p\,p+1}$	$\tau^*_{p\,p+2}$	·	∞

(7) SCHOTTKY, *Zur Theorie der Abelschen Functionen von vier Variablen*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 102, p. 321 (1888).

(8) Per la questione analoga per le corrispondenze fra curve sovrapposte, questa critica fu sollevata e allo stesso tempo rimossa da SEVERI nella sua Memoria: *Le corrispondenze singolari fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie regolare*, « Mathematische Annalen », Bd. 74, p. 515 e sgg. (1913).

(9) Ved. ad esempio SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, ed. Teubner Leipzig, p. 212 (1921).

(10) Si veda in proposito SEVERI, *Funzioni quasi abeliane*, « Pontificia Academia Scientiarum », Scripta varia, p. 79 e sgg. (1947).

(11) Ved. SEVERI, loc. cit. in (2), p. 67.

(12) Ved. SEVERI, loc. cit. in (2), p. 80.

D'altra parte in ciascuna delle equazioni (1) v'è un sol termine $\tau_{h,p+h}$ $(h = 1, \cdots, p)$ che va all'∞. Se quindi le (1) valessero per ogni C, deve risultare nullo il coefficiente di $\tau_{h,p+h}$, ossia:

$$\left\{ \sum_{1}^{2\pi_s} \lambda_{p+h,s}\, \vartheta_{ks} = 0 \right. \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, p \\ k = 1, \cdots, \pi \end{pmatrix}.$$

Ciò porta che le $\lambda_{p+h,s}$ siano tutte nulle $(h = 1, \cdots, p\ ;\ s = 1, \cdots, 2p)$. Ma allora le (1) divengono al limite:

$$\left\{ \sum_{1}^{2\pi_s} \lambda_{hs}\, \vartheta_{ks} = 0 \right. \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, p \\ k = 1, \cdots, \pi \end{pmatrix}$$

e quindi anche sono nulle tutte le λ_{hs} $(h = 1, \cdots, p\ ;\ s = 1, \cdots, 2\pi)$. Ciò contraddice l'ipotesi che le λ non siano tutte nulle e il nostro asserto è provato.

Variando le λ in tutti i modi possibili (senza che si annullino contemporaneamente) si hanno in corrispondenza su V al più una infinità numerabile di varietà analitiche subordinate e queste, com'è noto [13], non possono esaurire la V. Il teorema è quindi completamente dimostrato [14].

2. Da quanto precede risulta che ogni curva D tracciata su F, equivale linearmente ad una curva spezzata in curve $A = x \times \Gamma$, $B = y \times C$ (essendo x un punto di C ed y uno di Γ) dei due fasci unisecantisi di F [15]. Si avrà dunque un'equivalenza algebrica del tipo:

$$D \equiv nA + \nu B,$$

epperò

$$(1) \qquad [D, D] = 2n\nu.$$

Ora la ricerca dei modelli minimi di F, si riduce alla ricerca dei sistemi lineari $|D|$ di F di grado minimo, almeno ∞^3, privi di punti base e di coppie neutre dai quali si ottiene il modello minimo di F, facendone la immagine proiettiva.

Dalla (1) consegue intanto che il minimo di $[D, D]$, si ha prendendo i minimi valori (positivi) possibili per n e ν. D'altra parte n (ν) è l'ordine della serie lineare segata da $|D|$ sopra una qualunque delle B (A).

Tale serie, per le condizioni cui deve soddisfare $|D|$ dev'essere almeno ∞^2, priva di punti fissi e di coppie neutre, a meno che la curva sostegno sia razionale nel qual caso potrà ridursi alla g^1_1 della curva.

(13) Cfr. ad esempio la Nota di LEFSCHETZ, *A theorem on correspondences on Algebraic curves*, «American Journal of Mathematics», t. 50, p. 161 (1928), nella quale si stabilisce il teorema di HURWITZ-SEVERI sulle corrispondenze fra i punti di una curva a moduli generali con un ragionamento che si avvicina in parte al precedente.

(14) Anzi, resta provato di più; e cioè che, fissata comunque una curva Γ di genere π, se ne può sempre trovare fra quelle di dato genere p qualcuna C, tale che fra C e Γ non esistano corrispondenze singolari.

(15) Ved. SEVERI, loc. cit. in (3), p. 305.

Se pertanto $p > 0$ ($\pi > 0$) e C, (Γ), è a moduli generali, le serie d'ordine minimo soddisfacenti a questi requisiti sono le g^2 minime se il genere è 1 o 3; le g^3 minime negli altri casi; si ha cioè

$$n = 3 \quad , \quad n = 4, \qquad \text{se rispettivamente} \quad p = 1 \quad , \quad p = 3;$$

$$n = p - \left[\frac{p}{4}\right] + 3 \qquad \text{negli altri casi} \ (16)$$

(ed analogamente per ν).

Ed invero, solo se $p = 1, 3$ le g^2 minime di C risultano prive di coppie neutre, come subito si verifica e, d'altra parte le g^3 minime generiche di C sono prive di coppie neutre (17).

Ma un sistema lineare $|D|$ che stacchi sulle B ed A le serie minime suddette, contiene le curve spezzate in un gruppo di curve A che seghino le B in un gruppo della serie minima indicata ed in un analogo gruppo di curve B.

Un tale sistema risulta pertanto almeno ∞^3 dato che contiene almeno ∞^2 surve spezzate in gruppi di A e di B e che (per un noto teorema di Bertini) la curva generica del sistema dev'essere irriducibile. Inoltre, sempre per la presenza di quel sistema di curve spezzate, risulta privo di punti base e di coppie neutre.

Concludendo possiamo dire che:

L'ordine μ *dei modelli minimi di* $F = C \times \Gamma$.

a) *nel caso che il genere di nessuna delle due curve* C, Γ *sia* 0, 1, 3, *è dato da:*

$$\mu = 2\left(p - \left[\frac{p}{4}\right] + 3\right)\left(\pi - \left[\frac{\pi}{4}\right] + 3\right)$$

b) *se invece l'una* C *delle due curve è razionale,* $p = 0$, *e*

$$\text{se} \quad \pi = 0 \qquad \text{è} \quad \mu = 2$$

$$\text{se} \quad \pi = 1, 3 \qquad \text{è} \quad \mu = 2\left(\pi - \left[\frac{\pi}{3}\right] + 2\right)$$

$$\text{se} \quad \pi \neq 0, 1, 3 \qquad \text{è} \quad \mu = 2\left(\pi - \left[\frac{\pi}{4}\right] + 3\right)$$

c) *se poi è* $p = 1, 3$, *e*

$$\text{se} \quad \pi = 1, 3 \qquad \text{è} \quad \mu = 2\left(p - \left[\frac{p}{3}\right] + 2\right)\left(\pi - \left[\frac{\pi}{3}\right] + 2\right)$$

$$\text{se} \quad \pi \neq 0, 1, 3 \qquad \text{è} \quad \mu = 2\left(p - \left[\frac{p}{3}\right] + 2\right)\left(\pi - \left[\frac{\pi}{4}\right] + 3\right).$$

(16) Ved. SEVERI, loc cit. in (3), Anhang C, p. 390; indichiamo con $[\alpha]$ il massimo numero intero contenuto in α.

(17) Ved. SEVERI, loc. cit. in (9), Anhang G, p. 398.

Questi modelli risultano a posteriori privi di punti multipli; inoltre contengono due fasci unisecanti, immagini dei fasci $|A|$ e $|B|$, *di curve omografiche* [18] i cui ordini uguagliano gli ordini delle serie minime scelte su Γ, C rispettivamente, per la costruzione del modello in esame.

In particolare *se una delle due curve* C, Γ *è razionale, i modelli minimi* di F *sono rigate proiettive* [19].

Notiamo infine, che *di modelli minimi* (normali) *di* F *ve ne sono* $\infty^{\tau+\tau'}$ *proiettivamente distinti*, ove si ponga: $\tau=0$ se $p = 0, 1, 3, 4$; e τ uguale al minimo resto positivo di p (mod. 4) negli altri casi; ed analogamente per τ'.

Ed invero, si verifica subito che condizione necessaria e sufficiente affinchè due modelli minimi di F siano proiettivamente equivalenti è che tali siano le immagini proiettive di C, Γ eseguite colle serie minime ivi scelte per la costituzione del modello, ossia esista una trasformazione birazionale della curva C, Γ in sè che muti la prima serie nella seconda [20].

D'altra parte essendo C (Γ) a moduli generali non esistono trasformazioni birazionali siffatte che per $p = 2$ ($\pi = 2$) date in questo caso dall'unica trasformazione involutoria definita dalle g_2^1 canonica [21].

Di qui l'asserto, dato che per $p=0, 3, 4$ la serie minima scelta è unica e che per $p = 1$ le g_3^2 di l sono trasformabili birazionalmente l'una nell'altra [22].

Osservazione I. — Tolti i casi in cui il genere di C, Γ è 0, 1, 2, 3 se invece di partire dalle g^3 minime delle curve si parte dalle g^2 minime, si ottengono dei modelli proiettivi Φ di F, i quali non sono più in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con F, per la presenza di un certo numero (>0) di curve doppie in ciascuno dei fasci omologhi di $|A|$, $|B|$ e di punti quadrupli nei punti d'incontro di due tali curve doppie. Tuttavia si tratta di eccezioni *non essenziali* dato che la corrispondenza fra le *falde* di F e quelle di Φ risulta tuttora biunivoca senza eccezioni.

L'ordine μ di Φ risulta dato dalla prima delle formule *c*)

Osservazione II. – Se C, Γ non sono a moduli generali può accadere che il modelli minimi di F risultino d'ordine sia maggiore che minore di quello indicato. Gli esempi in proposito sono facili.

(18) Ci riferiamo naturalmente ai modelli minimi *normali* di F, cioè ottenuti come immagine proiettiva del sistema lineare *completo* $|D|$.

(19) Il fatto singolare non è tanto che fra i modelli proiettivi in corrispondenza birazionale senza eccezioni con F, vi siano delle rigate proiettive, ciò che è sempre vero come ha dimostrato Maroni (*Sulle rigate astratte*, « Rendiconti di Matematica », ser. V, t. 7, p. 236 (1948)), ma che tali siano necessariamente i modelli minimi di F.

(20) Per la sufficienza della condizione si tenga conto del teorema dimostrato in Severi, loc. cit. in (1), p. 22.

(21) Cfr. Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, ed. Zanichelli, Bologna, vol. III, p. 498 (1924).

(22) Pel valore di τ e τ' quando $p \neq 0, 1, 3, 4$ ($\pi \neq 0, 1, 3, 4$) cfr. Severi, loc. cit. in (9), Anhang G. p. 387. Anzi si osservi che solo se p, $\pi = 0, 1, 3, 4$, esiste *un solo* modello minimo di F, dato che negli altri casi il numero delle serie minime ∞^3 di C o Γ è, se finito, > 1 (Cfr. Castelnuovo, *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », ser. IV, t. 5, p. 71 e sgg., 1889).

Geometria. — *Sull'isometria di calotte superficiali.* Nota di VITTORIO DALLA VOLTA, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Espongo in questa Nota (1) alcuni risultati relativi all'isometria (nel senso metrico, classico) fra calotte superficiali di superficie immerse in uno S_3 euclideo. Le relative dimostrazioni, con i calcoli che esse comportano, compariranno in lavoro più ampio che sarà pubblicato nei « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni » dell'Università di Roma.

Come è notissimo (2) la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'applicabilità di due superficie dello spazio ordinario è ricondotta a calcoli di eliminazione, in cui entrano in giuoco le curvature totali delle superficie in esame e i relativi parametri differenziali. In particolare, per il *Theorema egregium* di Gauss, data una corrispondenza Ω fra due superficie, condizione *necessaria ma non sufficiente* (in generale) affinchè Ω sia un'isometria è che in punti omologhi le due superficie abbiano la stessa curvatura.

Ora i risultati classici si modificano quando non si considerino più pezzi finiti di superficie, ma *calotte superficiali*; nel presente lavoro io studio appunto l'isometria fra calotte superficiali aventi i centri in due punti O, $\overline{O}$ (regolari) di due superficie dello spazio ordinario.

2. Un primo risultato in quest'ordine di idee si trova già in E. Cartan (3), il quale dimostra che la proiezione ortogonale di una superficie sul piano ad essa tangente in un punto determina fra superficie e piano tangente una corrispondenza che è un'isometria *non solo nel punto di contatto, ma in tutto l'intorno del 1° ordine di questo*; in altri termini, la corrispondenza in questione è tale che lo sviluppo dei coefficienti dell'elemento lineare della superficie, nell'intorno del punto che si considera, differisce per *termini del 2° ordine* (almeno) dall'elemento lineare del piano euclideo. Come si vede, il risultato or ora riferito, non dipende affatto dalle curvature delle superficie in considerazione le quali, anzi, in generale sono differenti (giacchè quella del piano è nulla, mentre quella della superficie sarà in generale $\neq 0$); ma il fatto non stupisce, giacchè è ben noto che la curvatura di una superficie dipende dalla *calotta* del 2° ordine di questa.

Risultati relativi a calotte di ordine superiore al primo si trovano in un recente lavoro di Bompiani (4), nel quale viene iniziato lo studio delle *isometrie di ordine k fra calotte superficiali*, definite al seguente modo:

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) Un primo cenno sui risultati qui esposti è stato presentato quale Comunicazione al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Pisa, 23–26 settembre 1948).

(2) V. per esempio L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, III ed., Zanichelli, Bologna, 1927, vol. I, parte I, cap. VII.

(3) E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2ª ed., Gauthier-Villars, Paris, 1946, cap. IV.

(4) E. BOMPIANI, *Isometria di calotte superficiali.* « Rendiconti di Mat. ecc. », 1948, fasc. I–II.

Date due calotte superficiali σ_n, $\bar{\sigma}_n$, di ordine qualsiasi n, si diranno *isometriche di ordine k intorno ai loro centri*, se è possibile stabilire fra di esse una corrispondenza puntuale, tale che gli sviluppi dei coefficienti delle prime forme fondamentali, ds^2 e $d\bar{s}^2$, calcolati nell'intorno dei centri delle calotte, coincidano fino ai termini di ordine $k-1$ inclusi; in altri termini, gli elementi lineari delle due calotte (o di due superficie qualsiansi che le contengano) coincideranno non solo nei centri della calotta, ma in tutti i loro intorni fino a quelli di ordine $k-1$. Già dal risultato di Cartan sopra enunciato si vede come tale nozione *non* sia equivalente a quella di isometria fra (pezzi finiti di superficie) (5). Ma nel lavoro di Bompiani si dimostra di più che *due calotte sono sempre isometriche del 2° ordine* (e in infiniti modi); si trova poi che *condizione necessaria e sufficiente affinchè fra due calotte possa porsi un'isometria del 3° o del 4° ordine è, nel primo caso, che coincidano i valori delle curvature totali, calcolati nei centri delle calotte, e, nel secondo, che coincidano le curvature nei centri e in tutti i punti degl'intorni del 1° ordine.* Volendo esprimere analiticamente il fatto ora enunciato, converrà anzitutto porre le due calotte a contatto nei loro centri O, $\overline{O}$ e assumere $O \equiv \overline{O}$ quale origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali, il cui piano $z = 0$ sia il piano tangente comune alle due calotte; poichè fra le due calotte esistono sempre infinite isometrie del 2° ordine, potremo senz'altro far coincidere due qualsiansi coppie di tangenti ortogonali corrispondenti in una di queste isometrie; scelte queste tangenti come assi x, y, le due calotte si rappresentano analiticamente al seguente modo:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x = u \quad ; \quad y = v \quad ; \quad z = \frac{1}{2}\varphi_2(u,v) + \\ \quad + \frac{1}{3!}\varphi_3(u,v) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi_n(u,v) + \cdots \\ x = \bar{u} \quad ; \quad y = \bar{v} \quad ; \quad z = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_2(\bar{u},\bar{v}) + \\ \quad + \frac{1}{3!}\bar{\varphi}_3(\bar{u},\bar{v}) + \cdots + \frac{1}{n!}\bar{\varphi}_n(\bar{u},\bar{v}) + \cdots \end{cases}$$

ove le φ_i, $\bar{\varphi}_i$ sono *forme* di grado uguale all'indice.

Allora, se e solo se

$$(2.2)\qquad K(0,0) = \bar{K}(0,0)$$

(essendo K, $\bar{K}$ le curvature totali delle due calotte), è possibile, e in infiniti modi, stabilire fra due qualsiansi calotte *aventi a comune con le date le relative calotte del 2° ordine*, un'isometria *del 3° ordine*, che è rappresentata dalle formule:

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \bar{u} = u + \frac{1}{3!}\vartheta_3(u,v) + \frac{1}{4!}\vartheta_4(u,v) + \cdots \\ \bar{v} = v + \frac{1}{3!}\chi_3(u,v) + \frac{1}{4!}\chi_4(u,v) + \cdots \end{cases}$$

(5) Cfr. l'introduzione del lavoro citato in (4).

con le ϑ_i , χ_i , forme di grado uguale all'indice e *assolutamente arbitrarie*. Si potranno poi scegliere le ϑ_3 , χ_3 in modo che le (2. 3) (con le ϑ_4 , χ_4 ancora arbitrarie) rappresentino un'isometria *del 4° ordine* se, e solo se, oltre alla (2. 2) valgono anche le

$$(2.4)\qquad \begin{cases} K_u(0,0)=\bar{K}_{\bar{u}}(0,0)=\bar{K}_u(0,0) \\ K_v(0,0)=\bar{K}_{\bar{v}}(0,0)=\bar{K}_v(0,0) \end{cases} \quad \left(\text{giacchè, } \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)_{0,0}=1 \text{ , } \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)_{0,0}=0\right)$$

e in tal caso due *qualsiansi calotte aventi a comune con le date le calotte del 3° ordine sono isometriche del 4° ordine.*

Anche qui è notevole la differenza dal caso finito in cui, come si è osservato, l'uguaglianza delle curvature è condizione solo *necessaria* (in generale) per l'isometria.

3. Si poneva allora la questione di determinare le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un'isometria di ordine >4; il problema era tanto più naturale, in quanto era da attendersi che, a un certo punto, *intervenissero altre condizioni oltre quelle* (certamente necessarie), *esprimenti la uguaglianza delle curvature e delle sue derivate, calcolate nei centri delle calotte.*

Nel lavoro di prossima pubblicazione, cui si accenna al principio, io ho risoluto completamente il problema; e, contrariamente all'aspettativa, ho trovato che le *condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un'isometria di ordine* $h \geqq 3$ *si possono sempre tradurre nell'uguaglianza dei valori che le curvature totali delle due calotte e le loro derivate fino a quelle di ordine* $k-3$ *incluso assumono nei centri delle calotte stesse* (per $h=3,4$ si hanno i risultati di Bompiani). Avverto però subito che, come risulterà da quanto segue, l'enunciato precedente *non* è affatto in contrasto col classico teorema ricordato alla fine del numero precedente. I risultati da me trovati sono, infatti, in forma più precisa, i seguenti.

Comincio anzitutto col dare forma diversa al risultato di Bompiani relativo all'isometria del 4° ordine, dimostrando che *affinchè due calotte, supposte isometriche del 3° ordine, lo siano anche del 4° occorre e basta che nei centri di essi coincidano i valori* (*non solo delle curvature totali* K , $\bar{K}$, *ma anche*) *dei parametri differenziali di* Beltrami $\Delta_1 K$, $\bar{\Delta}_1 \bar{K}$ [6]. *Se e solo se tale condizione relativa a* $\Delta_1 K$, $\bar{\Delta}_1 \bar{K}$ *è soddisfatta, si possono scegliere gli assi* x , y, *in modo che valgano le* (2. 4).

Passo poi al caso generale, che dimostro con metodo induttivo, da h ad $h+1$, nella maniera seguente. *Scelto il riferimento nella maniera precisata più sopra*, si può effettivamente dire che, per $h=3,4$, affinchè esista un'isometria di ordine h occorre e basta che, nei centri delle calotte, coincidano i valori delle curvature e delle loro derivate (prese rispetto ad u , v per entrambe le calotte), fino a quelle di ordine $h-3$. Suppongo allora che fra

(6) È, come è noto, $\Delta_1 K = \dfrac{GK_u^2 - 2FK_u K_v + EK_v^2}{EG-F^2}$ essendo E , F , G, i noti simboli di GAUSS.

le due calotte (2. 1) esista un'isometria di ordine h, rappresentata da certe formule:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \bar{u} = u + \sum_{3}^{h+1}{}_i \frac{1}{i!}\,\vartheta_i\,(u\,,v) + \cdots \\ \bar{v} = v + \sum_{3}^{h+1}{}_i \frac{1}{i!}\,\chi_i\,(u\,,v) + \cdots \end{cases}$$

con le ϑ_i , χ_i note per $i \leq h$ e le ϑ_{h+1} , χ_{h+1} arbitrarie; in virtù dell'ipotesi ammessa, l'esistenza di tale isometria porta come *unica conseguenza* l'uguaglianza (nei centri) dei valori delle curvature e delle loro derivate (*prese rispetto ad u e a v per entrambe le calotte*) fino a quelle di ordine $h - 3$ incluse; dimostro allora che, *affinchè si possano determinare le* ϑ_{h+1} , χ_{h+1} *così che le* (3. 1) *rappresentino un'isometria di ordine* $h + 1$, *è necessario e sufficiente aggiungere alle condizioni precedenti quelle esprimenti l'uguaglianza delle derivate di ordine* $h - 2$ *delle curvature*. In tale caso, *due qualunque calotte aventi a comune con le date le relative calotte di ordine h, sono fra loro isometriche di ordine* $h + 1$ In sostanza, l'esistenza o meno di un'isometria di ordine $h + 1$ dipende *solamente dalla calotta di ordine h*, dalla quale, si noti, dipendono anche le derivate della curvatura, fino appunto a quella di ordine $h - 2$.

4. Ma da quanto precede *non si può concludere*, come già si è detto, che *ogni corrispondenza fra due superficie che conservi i valori delle curvature e dei parametri differenziali primi sia un'isometria*; altrimenti due superficie generiche (v. più sotto la nota (7)) sarebbero applicabili; infatti, date due superficie σ , $\bar{\sigma}$. è, almeno in generale (7), possibile stabilire una corrispondenza Ω tale che in punti omologhi K e Δ_1 K abbiano gli stessi valori, bastando far corrispondere alle linee K = cost. Δ_1 K = cost. di una superficie le analoghe linee dell'altra. Detti allora O , $\overline{O}$ due punti omologhi in Ω, potremo senza altro stabilire fra le due calotte di σ , $\bar{\sigma}$ aventi i centri rispettivamente in O , $\overline{O}$, un'isometria del 4° ordine, I, la quale, come Ω, muta O in $\overline{O}$, *ma agirà – in generale – in maniera diversa da* Ω *sugl'intorni di* O , $\overline{O}$; se le due calotte considerate non sono isometriche del 5° ordine (almeno), a un punto O_1 dell'interno di I° ordine di O, I farà corrispondere un punto $\overline{O}_1$ dell'intorno di 1° ordine di $\overline{O}$, tale che in O_1 e in $\overline{O}_1$ coincidano i valori di K, *ma non quelli di* Δ_1 K . Di conseguenza, *non* saranno soddisfatte le condizioni esprimenti l'uguaglianza delle derivate seconde di K rispetto ad u , v, quando il legame fra $\bar{u}$, $\bar{v}$ sia dato mediante le (3. 1). È chiaro, però, che se fra le due calotte esiste un'isometria di ordine h intorno ai loro centri, questa ha con Ω *un contatto di ordine* $h - 4$.

Il risultato da me trovato dà insomma la possibilità, quando esista un'isometria, di costruirla, per così dire, passo a passo; il fare appello poi a condizioni *locali*, e non globali, mi pare più consono al problema, che è relativo agli intorni di due punti corrispondenti delle superficie che si considerano.

(7) Si escludono le superficie a curvatura costante, per le quali Δ_1 K è identicamente nullo; quelle per cui Δ_1 K è funzione di K, e infine quelle in cui Δ_1 K è costante.

Meccanica. — *Sul bilancio di potenza in una rete elettrica ad* m *morsetti in regime sinusoidale di correnti*(*). Nota di FRANCESCO BAROZZI, presentata (**) dal Socio L. LOMBARDI.

1. Si indichi con v_k il valore istantaneo della tensione che, rispetto ad un punto fisso di riferimento arbitrariamente scelto, compete ad un generico morsetto di una rete comunque complessa, e con i_k il valore della corrente che, in quell'istante, *entra* nella rete medesima attraverso il morsetto considerato. È ovvio che, se m è il numero dei morsetti attraverso i quali la rete (m-polo) comunica con l'esterno, la potenza p che essa assorbe nell'istante suddetto vale:

$$p = \sum_{k=1}^{m} v_k i_k. \tag{1}$$

La rete in esame possegga n nodi (compresi gli m morsetti di comunicazione con l'esterno) e siano v_i ed i_{ij} i valori istantanei, della tensione in un generico nodo i e, ordinatamente, della corrente, che, partendo da questo, confluisce al nodo adiacente j.

Tenuto conto che, per il primo principio di Kirchhoff:

$$\sum_j i_{ij} = 0 \tag{2}$$

si ha subito:

$$v_i \sum_j i_{ij} = 0$$

e quindi anche:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_j v_i i_{ij} = 0. \tag{3}$$

Proponiamoci di trasformare questa relazione così da esplicitare in essa i termini corrispondenti alle correnti che, attraverso i morsetti esterni, confluiscono nella rete. In tal caso, attribuendo al simbolo i_{ij}, *soltanto* il significato di valore istantaneo della corrente in rami *interni*, la (3) assume la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_j v_i i_{ij} - \sum_{k=1}^{m} v_k i_k = 0, \tag{4}$$

da cui:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k i_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_j v \tag{5}$$

Se poi si osserva che ad ogni ramo interno corrispondono due termini della doppia sommatoria di (5) (per il ramo fra i e j contribuiscono i termini $v_i i_{ij}$ e $v_j i_{ji}$) e si rileva che: $i_{ij} = -i_{ji}$, si ottiene:

$$v_i i_{ij} + v_j i_{ji} = (v_i - v_j) i_{ij} = u_r i_r, \tag{6}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Elettrotecnica e delle Comunicazioni Elettriche della Facoltà di Ingegneria di Bologna.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

ove con u_r si vuole qui indicare il valore istantaneo della d. d. p. agli estremi del ramo r di congiunzione fra i ed j, e con i_r il corrispondente valore di corrente.

Ciò permette di dare alla (5) l'aspetto:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k i_k = \sum_{r=1}^{l} u_r i_r, \tag{7}$$

l essendo i rami interni dell'm-polo.

Ora, per il vincolo che esiste fra tensione e corrente di un generico ramo, si può scrivere, con simboli di ovvio significato:

$$u_r = R_r i_r + \sum_{s=1}^{l} L_{rs} \frac{di_s}{dt} + \frac{\int i_r\, dt}{C_r}, \tag{8}$$

e pertanto:

$$\sum_{r=1}^{l} u_r i_r = \sum_{r=1}^{l} R_r i_r^2 + \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} L_{rs} i_r \frac{di_s}{dt} + \sum_{r=1}^{l} \frac{i_r \int i_r\, dt}{C_r}, \tag{9}$$

ossia:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k i_k = \sum_{r=1}^{l} R_r i_r^2 + \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} L_{rs} i_r \frac{di_s}{dt} + \sum_{r=1}^{l} \frac{i_r \int i_r\, dt}{C_r}, \tag{10}$$

relazione questa che esprime il bilancio fra potenza elettrica fornita alla rete, e potenze che, sotto forma di calore e sotto forma elettromagnetica, sono vincolate alla rete medesima (1).

(1) La (10) si trasforma facilmente nella:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k i_k = \sum_{r=1}^{l} R_r i_r^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} L_{rs} i_r i_s\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{l} \frac{q_r^2}{C_r}\right); \tag{11}$$

onde, ponendo:

$$p_J = \sum_{r=1}^{l} R_r i_r^2 = \text{potenza dissipata per effetto Joule}, \tag{12}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} L_{rs} i_r i_s = \text{valore istantaneo dell'energia magnetica immagazzinata}, \tag{13}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{l} \frac{q_r^2}{C_r} = \text{valore istantaneo dell'energia elettrostatica immagazzinata}, \tag{14}$$

risulta:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k i_k = p_J + \frac{dw_m}{dt} + \frac{dw_e}{dt}, \tag{15}$$

e moltiplicando per dt:

$$\sum_{k=1}^{m} v_k i_k\, dt = p_J\, dt + dw_m + dw_e. \tag{16}$$

Questa relazione esprime il bilancio che, in ogni intervallo elementare di tempo dt, si verifica fra l'energia fornita alla rete, l'energia in essa dissipata e la variazione di energia elettromagnetica accumulata.

Ovviamente la (10) poteva anche dedursi dalla (16) scritta come espressione del principio della conservazione dell'energia.

2. Orbene, si supponga di potere alterare gli elementi inseriti nei rami della rete in tal guisa che, mantenendosi pur sempre inalterati i valori delle tensioni nei singoli nodi, la vicenda nel tempo delle correnti in ciascun ramo non si identifichi più con quella che, con riferimento ad un istante iniziale comune alle due situazioni, caratterizzava le correnti stesse prima dell'alterazione in discorso.

Indicato allora con i'_r il valore della nuova corrente nel ramo r e con i'_k l'analogo valore della corrente confluente al morsetto k, si può senz'altro scrivere la relazione:

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{m} v_k i'_k = \sum_{r=1}^{l} R_r i_r i'_r + \sum_{r=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} L_{rs} i'_r \frac{di_s}{dt} + \sum_{r=1}^{l} \frac{i'_r \int i_r \, dt}{C_r}$$

nella quale le quantità come R_r, L_{rs}, C_r, rappresentano gli elementi costitutivi della rete non ancora modificata, ed i_r, i_s, le correnti nei rami r ed s di detta rete [2].

3. Particolarmente interessante è per noi il caso di regimi sinusoidali nei quali i_r ed i'_r risultino in quadratura fra di loro.

Allora, ricordando che una grandezza sinusoidale qualunque

$$(18) \qquad a = \sqrt{2}\, A \cos(\omega t + \alpha)$$

è esprimibile mediante numeri complessi nel seguente modo:

$$(19) \qquad a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{A}\, \varepsilon^{j\omega t} + \mathbf{A}^* \varepsilon^{-j\omega t})$$

qualora si indichi con ε la base dei logaritmi naturali e con $\mathbf{A}^*$ il coniugato di $\mathbf{A} = A\varepsilon^{j\alpha}$, ci è lecito scrivere:

$$(20) \quad \begin{cases} v_k = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{V}_k \varepsilon^{j\omega t} + \mathbf{V}_k^* \varepsilon^{-j\omega t}); \\ i_k = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{I}_k \varepsilon^{j\omega t} + \mathbf{I}_k^* \varepsilon^{-j\omega t}) \quad ; \quad i'_k = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (j\mathbf{I}_k \varepsilon^{j\omega t} - j\mathbf{I}_k^* \varepsilon^{-j\omega t}); \\ i_r = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{I}_r \varepsilon^{j\omega t} + \mathbf{I}_r^* \varepsilon^{-j\omega t}) \quad ; \quad i'_r = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (j\mathbf{I}_r \varepsilon^{j\omega t} - j\mathbf{I}_r^* \varepsilon^{-j\omega t}); \\ \dfrac{di_s}{dt} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (j\omega \mathbf{I}_s \varepsilon^{j\omega t} - j\omega \mathbf{I}_s^* \varepsilon^{-j\omega t}) \quad ; \quad \int i_r \, dt = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left(\dfrac{\mathbf{I}_r}{j\omega} \varepsilon^{j\omega t} - \dfrac{\mathbf{I}_r^*}{j\omega} \varepsilon^{-j\omega t} \right) [3]; \end{cases}$$

[2] Basta osservare che essendo rimaste inalterate le tensioni ai modi, la d. d. p. agli estremi di ciascun ramo può ancora esprimersi con la (8).

[3] L'integrale $\int i dt$ rappresenta per noi una funzione determinata poichè fra le primitive di i dobbiamo scegliere quella che ha andamento alternativo sinusoidale.

Le equazioni (10) e (17) equivalgono perciò alle seguenti (4):

$$(21)\qquad \mathcal{R}\left[\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k^*+\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k\varepsilon^{j2\omega t})\right]=\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r\mathbf{I}_r^*+\mathcal{R}\left[\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r^2\varepsilon^{j2\omega t}\right]-$$
$$-\mathcal{I}\left[\omega\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s\varepsilon^{j2\omega t}\right]+\mathcal{I}\left[\omega\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2C_r}\varepsilon^{j2\omega t}\right],$$

$$(22)\qquad \mathcal{I}\left[\sum_{k=1}^{m}(\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k^*+\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k\varepsilon^{j2\omega t})\right]=\omega\left(\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s^*-\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r\mathbf{I}_r^*}{\omega^2C_r}\right)-$$
$$\mathcal{I}[R_r\mathbf{I}_r^2\varepsilon^{j2\omega t}]-\mathcal{R}\left[\omega\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s\varepsilon^{j2\omega t}\right]+\mathcal{R}\left[\omega\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2C_r}\varepsilon^{j2\omega t}\right].$$

Separando le parti costanti da quelle dipendenti dal tempo, otteniamo:

$$(24)\qquad \begin{cases}\mathcal{R}\left[\sum_{k=1}^{m}\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k^*\right]=\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r\mathbf{I}_r^*\\ \mathcal{I}\left[\sum_{k=1}^{m}\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k^*\right]=\omega\left(\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s^*-\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r\mathbf{I}_r^*}{\omega^2C_r}\right)\end{cases}$$

e:

$$(25)\qquad \begin{cases}\mathcal{R}\left[\sum_{k=1}^{m}\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k\varepsilon^{j2\omega t}\right]=\mathcal{R}\left[\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r^2\varepsilon^{j2\omega t}\right]+\omega\,\mathcal{I}\left[\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s\varepsilon^{j2\omega t}-\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2C_r}\varepsilon^{j2\omega t}\right]\\ \mathcal{I}\left[\sum_{k=1}^{m}\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k\varepsilon^{j2\omega t}\right]=\mathcal{I}\left[\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r^2\varepsilon^{j2\omega t}\right]+\omega\,\mathcal{R}\left[\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s\varepsilon^{j2\omega t}-\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2C_r}\varepsilon^{j2\omega t}\right].\end{cases}$$

Moltiplicando la seconda delle (24) per j e sommando le due equazioni membro a membro, risulta:

$$(26)\qquad \sum_{k=1}^{m}\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k^*=\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r\mathbf{I}_r^*+j\omega\left(\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s^*-\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r\mathbf{I}_r^*}{\omega^2C_r}\right).$$

Analogamente, moltiplicando per j la seconda delle (25) e sommando, si ha:

$$(27)\qquad \sum_{k=1}^{m}\mathbf{V}_k\mathbf{I}_k\varepsilon^{j2\omega t}=\sum_{r=1}^{l}R_r\mathbf{I}_r^2\varepsilon^{j2\omega t}+j\omega\left(\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l}L_{rs}\mathbf{I}_r\mathbf{I}_s\varepsilon^{j2\omega t}-\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2C_r}\varepsilon^{j2\omega t}\right).$$

(4) Per ottenere le (21), (22), si tenga presente che il prodotto di due grandezze sinusoidali:

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{A}\varepsilon^{j\omega t}+\mathbf{A}^*\varepsilon^{-j\omega t}),$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{B}\varepsilon^{j\omega t}+\mathbf{B}^*\varepsilon^{-j\omega t}),$$

è immediatamente eseguibile con le regole ordinarie e dà il seguente risultato:

$$(23)\qquad ab=\frac{1}{2}(\mathbf{AB}^*+\mathbf{AB}\varepsilon^{2j\omega t}+\mathbf{A}^*\mathbf{B}+\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\varepsilon^{-j2\omega t})=\mathcal{R}[\mathbf{AB}^*+\mathbf{AB}\varepsilon^{j2\omega t}].$$

Il simbolo $\mathcal{R}[\cdots]$ sta ad indicare che della quantità complessa contenuta entro le parentesi quadre si considera la sola parte reale; analogo significato attribuiremo nel seguito al simbolo $\mathcal{I}[\ ]$ riferentesi al coefficiente d'immaginario.

Ovviamente in quest'ultima equazione il fattore $\varepsilon^{j2\omega t}$, comune a tutti i termini, può venire trascurato; abbiamo qui preferito lasciarlo indicato affinchè il significato fisico dei singoli termini, che ora andiamo a chiarire, apparisse più evidente.

4. Indicando con:

P_J – la potenza media (in un periodo) dissipata per effetto Joule nell'interno della rete;

W_m – l'energia magnetica media (in un periodo) accumulata nell'interno della rete;

W_e – l'energia elettrostatica media (in un periodo) accumulata nell'interno della rete;

e con:

$\mathbf{P}_{Jf}\,\varepsilon^{j2\omega t}$ – una quantità complessa la cui parte reale esprime la componente fluttuante della potenza dissipata;

$\mathbf{W}_{mf}\,\varepsilon^{j2\omega t}$ – una quantità complessa la cui parte reale esprime la componente fluttuante dell'energia magnetica;

$\mathbf{W}_{ef}\,\varepsilon^{j2\omega t}$ – una quantità complessa la cui parte reale esprime la componente fluttuante dell'energia elettrostatica,

possiamo scrivere le equazioni (26) e (27) nella forma:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^* = P_J + 2j\omega (W_m - W_e), \tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k = \mathbf{P}_{Jf} + 2j\omega (\mathbf{W}_{mf} - \mathbf{W}_{ef}). \tag{29}$$

Infatti, ricordando che i valori istantanei della potenza dissipata, dell'energia magnetica e dell'energia elettrostatica accumulate nell'interno della rete, sono date rispettivamente dalle formule (12), (13), (14), otteniamo – introducendovi i numeri complessi –:

$$p_J = \sum_{r=1}^{l} R_r \mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* + \Re\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l} R_r \mathbf{I}_r^2 \varepsilon^{j2\omega t}\right] \tag{30}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l} L_{rs} \mathbf{I}_r \mathbf{I}_s^* + \Re\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l} L_{rs} \mathbf{I}_r \mathbf{I}_s \varepsilon^{j2\omega t}\right] \tag{31}$$

$$w_e = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l} \frac{\mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^*}{\omega_2 C_r} - \Re\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l} \frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2 C_r} \varepsilon^{j2\omega t}\right] \tag{32}$$

da cui appare chiaramente che i valori medi delle grandezze suddette sono rispettivamente espressi dalle quantità reali e positive:

$$P_J = \sum_{r=1}^{l} R_r \mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* \tag{33}$$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l} L_{rs} \mathbf{I}_r \mathbf{I}_s^* \tag{34}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l} \frac{\mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^*}{\omega^2 C_r} \tag{35}$$

e che le loro parti fluttuanti sono rappresentabili rispettivamente con le quantità complesse:

$$\mathbf{P}_{1f}\,\varepsilon^{j2\omega t} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l} R_r \mathbf{I}_r^2\,\varepsilon^{j2\omega t} \tag{36}$$

$$\mathbf{W}_{mf}\,\varepsilon^{j2\omega t} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{l} L_{rs}\,\mathbf{I}_r\,\mathbf{I}_s\,\varepsilon^{j2\omega t} \tag{37}$$

$$\mathbf{W}_{ef}\,\varepsilon^{j2\omega t} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\frac{\mathbf{I}_r^2}{\omega^2 C_r}\,\varepsilon^{j2\omega t}. \tag{38}$$

Di conseguenza le equazioni (28) e (29) sono esattamente equivalenti alle equazioni (26) e (27) [5].

5. Il significato fisico delle equazioni (28) e (29) risulta evidente.

Abbiamo al primo membro della (28) una quantità complessa la cui parte reale, come facilmente si verifica, misura la potenza attiva che, attraverso gli m morsetti, viene complessivamente assorbita dalla rete; e, come coefficiente dell'immaginario, la corrispondente potenza reattiva. Alla parte reale corrisponde, secondo la (28) medesima, la potenza media dissipata per effetto Joule nell'interno della rete (somma delle potenze dissipate nei singoli rami), ed al coefficiente d'immaginario corrisponde la potenza reattiva, che risulta pure dalla somma delle potenze reattive corrispondenti ai singoli rami. Ciò è in perfetto accordo con il teorema della conservazione della potenza attiva e reattiva, di cui l'equazione (28) è quindi l'espressione sintetica per il caso della rete che ci interessa. Analogamente l'equazione (29) esprime il fatto che la potenza fluttuante, misurata ai morsetti della rete, corrisponde alla somma delle potenze fluttuanti relative ai singoli rami della rete medesima.

Complessivamente quindi le due equazioni dànno una rappresentazione completa del bilancio di potenza per l'm–polo considerato.

6. Se non esistono accoppiamenti magnetici fra un ramo e l'altro, le equazioni (26) e (27) diventano, rispettivamente:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^* = \sum_{r=1}^{l} R_r \mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* + j\sum_{r=1}^{l}\left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)\mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k = \sum_{r=1}^{l} R_r \mathbf{I}_r^2 + j\sum_{r=1}^{l}\left(\omega L_r - \frac{1}{\omega C_r}\right)\mathbf{I}_r^2. \tag{40}$$

Indicando con X_r la reattanza complessiva del ramo r, possiamo scrivere:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^* = \sum_{r=1}^{l} (R_r + jX_r)\mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* \tag{41}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k = \sum_{r=1}^{l} (R_r + jX_r)\mathbf{I}_r^2. \tag{42}$$

(5) Il PLANCK V. *Electromagnetisme*, p. 370 della II^a Ed. francese, Gauthier. Villars, Parigi) ricava la (28) direttamente dalle equazioni di Maxwell.

In questa semplice forma, pur con la limitazione anzidetta, le due equazioni hanno ancora un vastissimo campo di applicazione.

7. Supponiamo che le tensioni e le correnti corrispondenti ai primi q degli m morsetti della rete precedentemente esaminata, costituiscano un sistema polifase simmetrico ed equilibrato. Detta allora $\mathbf{E}_a$ la tensione di uno di questi morsetti, riferita al centro della stella q–fase simmetrica, ed $\mathbf{I}_a$ la corrente relativa, i termini della $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*$ corrispondenti ai primi q morsetti dànno come somma $q\,\mathbf{E}_a \mathbf{I}_a^*$, cosicchè possiamo scrivere:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^* = q\,\mathbf{E}_a \mathbf{I}_a^* + \sum_{u=q+1}^{m} \mathbf{V}_u \mathbf{I}_u^*; \tag{43}$$

ed analogamente, poichè i termini della $\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k$ corrispondenti ai primi q morsetti dànno somma nulla [6], avremo:

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{V}_k \mathbf{I}_k = \sum_{u=q+1}^{m} \mathbf{V}_u \mathbf{I}_u, \tag{44}$$

Le equazioni (28) e (29) diventano allora rispettivamente:

$$q\,\mathbf{E}_a \mathbf{I}_a^* + \sum_{u=q+1}^{m} \mathbf{V}_u \mathbf{I}_u^* = \mathrm{P_J} + 2j\omega\,(\mathrm{W}_m - \mathrm{W}_e), \tag{45}$$

$$\sum_{u=q+1}^{m} \mathbf{V}_u \mathbf{I}_u = \mathbf{P}_{jf} + 2j\omega\,(\mathbf{W}_{mf} - \mathbf{W}_{ef}) \tag{46}$$

e quando non vi siano accoppiamenti fra un ramo e l'altro:

$$q\,\mathbf{E}_a \mathbf{I}_a^* + \sum_{u=q+1}^{m} \mathbf{V}_u \mathbf{I}_u^* = \sum_{r=1}^{l} (\mathrm{R}_r + j\mathrm{X}_r)\,\mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* \tag{47}$$

$$\sum_{u=q+1}^{m} \mathbf{V}_u \mathbf{I}_u = \sum_{r=1}^{l} (\mathrm{R}_r + j\mathrm{X}_r)\,\mathbf{I}_r^2. \tag{48}$$

Se la nostra rete riceve energia attraverso i primi q morsetti e cede energia attraverso i rimanenti $m - q$ morsetti, essa agisce come un dispositivo capace di trasformare un sistema polifase (q-fase) simmetrico equilibrato in un sistema polifase (ad $m - q$ fasi) qualunque. Le equazioni (45) e (46), oppure le (47) e (48), rappresentano le condizioni che debbono essere verificate affinchè ciò avvenga.

Un tal dispositivo costituisce un « apparecchio equilibratore statico ».

Le equazioni suddette forniscono un comodo strumento per lo studio di questi interessanti dispositivi i quali hanno importanti applicazioni pratiche.

(6) È questa la proprietà caratteristica della potenza dei sistemi simmetrici ed equilibrati.

Astronomia. — *Perturbazioni e discontinuità nel moto polare.* Nota di TITO NICOLINI, presentata (*) dal Socio L. CARNERA.

1. L'analisi dei moti oscillatori per mezzo delle serie trigonometriche è molto frequente; più raramente invece avviene di mettere in evidenza discontinuità brusche o altre perturbazioni di detti moti. Tali perturbazioni tolgono all'analisi la sua semplicità ed eleganza sintetica; per oscillazioni sinusoidali con periodo, ampiezza e fase variabili, la rappresentazione usuale

$$x = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha)$$

va interpretata con le quantità A, T, α funzioni del tempo t, e quindi la complicazione in genere ne impedisce l'uso.

Per la individuazione pratica di discontinuità, è da citare particolarmente una Memoria di H. H. Turner (1); il metodo di questo autore consiste nel suddividere i dati per intervalli prossimi al periodo d'oscillazione, ed analizzare poi per una periodicità semplice questi intervalli; i risultati successivi indicano le variazioni, e particolarmente i salti irregolari di fase. Così il Turner trovò che nel caso dei numeri relativi delle macchie solari, la progressione della fase subì cambiamenti bruschi intorno agli anni 1766, 1796, 1838, 1868, 1895. Il procedimento del Turner è giusto; ma il semplice rilievo delle discontinuità è spesso ottenibile con calcoli numerici meno estesi e più immediati, dalle semplici sequenze dei massimi e minimi, originari o perequati coi valori vicini.

Altra importante ricerca è dovuta a G. U. Yule; è notevole che Sir F. Dyson, in una applicazione del metodo di Yule (lavori citati al riferimento bibliografico (2) abbia rilevata la discontinuità d'ampiezza del moto di Chandler per l'autunno 1923. Da una recente ricerca (2) risulta che anche il periodo subisce una discontinuità alla stessa epoca, fatto più sorprendente.

In ricerche di questo genere, inconvenienti ed errori di deduzione sono a volte originati da due ragioni: o si è abbassato il livello di rigore necessario affidandosi a criteri di osservazione grossolana ed empirica, o si è data eccessiva fiducia al rigore apparente di metodi formali usati senza precauzione critica.

I procedimenti qui suggeriti per l'individuazione delle perturbazioni brusche o graduali di un moto oscillatorio composto e applicati al moto polare complessivo, o alla essenziale componente chandleriana, sono i seguenti:

a) Esame dell'andamento dei periodi successivi di oscillazione pei moti composti in battimenti. Questo esame, che indica le alterazioni di rap-

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) «M.N.R.A.S.», *74* p. 82. V. anche l'applicazione alle discontinuità nella variazione delle latitudini in «Geoph. Suppl.», gennaio 1930.

(2) «Contr. Astron. Capodimonte», ser. II, vol. II, n. 8.

porto delle componenti, è sviluppato in dettaglio al riferimento [2], ed è chiaro dalla osservazione della fig. 1 di quella Memoria, e di altra [3] che mostra l'andamento anteriore al 1890.

b) Rilievo di singolarità (anche per semplice via grafica) locali delle oscillazioni, semplici o composte.

c) Esame diretto dei periodi empirici successivi della oscillazione semplice che più interessa.

d) Esame diretto delle ampiezze della stessa.

A questi criteri sarà nel nostro caso aggiunto il controllo fisico di fenomeni concomitanti, che accrescono fiducia nei risultati.

Per i dati relativi all'ampiezza e durata del ciclo di Chandler, si rinvia alle Memorie [2] e [3]; pei diagrammi della polodia complessiva, alle pubblicazioni del S.I.L.; i diagrammi del moto residuo di Chandler (di andamento prossimo al circolare) non vengono qui riportati, richiedendo essi un notevole spazio.

2. Usando i detti criteri di individuazione, le perturbazioni e discontinuità del moto polare sono riportate alla Tabella seguente (s'intende non tutte, ma quelle di un certo rilievo). *ax* o *dx* indicano aumento o diminuzione d'ampiezza della componente X del termine chandleriano a partire dalla data indicata; analogamente per la componente Y. *ap* e *dp* indicano aumento o diminuzione evidente del periodo di Chandler (questa importante quanto delicata questione sarà esaminata criticamente in « Contr. Astron. Capodimonte », ser. II, vol. III, n. 10). *c* ed *a* indicano rispettivamente predominanza del termine di Chandler o dell'annuale (sempre a partire dalla data indicata), rilevata dal criterio *a*) sopra elencato. *i* indica irregolarità locale della oscillazione chandleriana rilevata dal 3° diagramma, fig. 6, riferimento [2]. V*c* indica i più salienti vertici acuti o cuspidi nel moto polare di Chandler; V*p* idem per la polodia complessiva; *n* indica nodi in questa.

Perturbazioni principali del moto polare.

1842–43 *dp*	1919.0 V*p*
1853 *ap*, *ax*	1921.0 *dx*, *dy* ; 21.5 V*c*
* 1863 *dp*, *c*	* 1923.6 *dx*, *dy*, *dp*, *a*
1869 *dp*	1926.1, 26.8, 26.9 V*p* [4]
1890–92 *dp* ? 91.8 V*c*, V*p*	1927.2 *n*; 28.4, 29.1 V*p*
1895.0–95.2 e 95.5–95.6 *n*, V*c*	1935.0–35.1 V*c*, *n*; segue altro *n*
1895–96 *dx*, *dy*, riprende *dp*	1937.5 *dy*
* 1899–900 *i*, continua *dp*	1938.0–38.6 V*c*, V*p*
1900.4 V*p*	* 1939.7 *ax*, *ay*, *ap*, *c*, V*c*, *i*
* 1908–10 *ap*, *ax*, *ay*	1941.4 V*p*; 42.3, 42.5 V*p*; 42,6 *ax*, *ay*
1917–18 *dp*, *dx*, *dy*	1947.9 V*p* ?

(3) « Contr. Astron. Capodimonte », ser. II, vol. III, n. 7.

(4) Al 1926 si osserva un aumento moderato *ax*, *ay*, mentre il periodo tende a stabilizzarsi sul valore minimo.

Sintende che le date sono sempre approssimate, particolarmente riguardo alle variazioni di periodo; l'incertezza spesso si estende per 2 o 3 anni. Le date riportate al decimo di anno sono stabilite dall'esame della componente chandleriana alla Memoria riferita [2].

Naturalmente non tutte le irregolarità osservate, frequenti e complesse, sono riportate come perturbazioni o discontinuità, ma solo la più gran parte di quelle che ad un esame attento appaiono più notevoli. Potrebbe darsi che alcune delle riportate abbiano scarso interesse; viceversa possono anche significare che le perturbazioni grandi, come quelle del 1923 e 1939 circa non siano istantanee, ma siano un effetto cumulativo di altre minori e numerose circostanti. Le principali perturbazioni, e quindi evidenti e sicure, sono quelle indicate con asterisco.

3. Ora riportiamo le perturbazioni della rotazione terrestre quali rilevate dalla bibliografia indicata nelle note [5], [6], [7], [8]. R ed A indicano i principali rallentamenti o rispettivamente accelerazioni della rotazione; TI significa grande frequenza di terremoti in Inghilterra, TC in California; con tali fenomeni sono anche indicati i riferimenti bibliografici.

Perturbazioni principali della rotazione terrestre.

* 1840–42 R [5], [8]	; 1852.5 TI [5]	1892–93 R [6]	; 1893.5 TI [5]
1850–52 A [5]		* 1896–99 R [5], [8]	; 1899.5 TC [5]
* 1862–63 A [5], [8]		* 1908–10 R [5], [6]	; 1911.5 TI [5]
1869.5 TI e TC [5]		1916–18 A [8]	
1877–78 R [5], [8]		* 1922–23 A [5], [8]	
1890–5 TI [5]		1932–33 A [3]	

Anche qui le date sono approssimate come le precedenti; e le perturbazioni principali, e più sicure, sono segnate con asterisco.

Le considerazioni della presente Nota hanno un certo interesse geofisico. È evidente che ogni alterazione riguardante l'asse di rotazione terrestre importa una alterazione nel momento d'inerzia terrestre attorno all'asse stesso, e quindi nella distribuzione delle masse. Quindi non dovrebbero mancare correlazioni geofisiche, ed una prova convincente è data dalle corrispondenze tra le due tabelle riportate; ma vi sono anche altre interessanti coincidenze.

4. È particolarmente notevole l'epoca 1922 23 circa, con l'accelerazione della rotazione, e la più notevole alterazione in periodo ed ampiezza del moto di Chandler. Più ancora, anche la costante solare subì una caduta vistosa ed anormale [9].

(5) E. W. Brown, «Trans. Astron. Obs. Yale», vol. 3, parte 6ª, p. 205 (contiene anche frequenze di terremoti in Inghilterra e California).

(6) H. Glauert, «M.N.R.A.S.», *75*, pp. 489, 685.

(7) H. S. Jones, «M.N.R.A.S.», *87*, p. 4.

(8) H. S. Jones, «M.N.R.A.S.», *99*, p. 541.

(9) Abbot-Aldrich-Hoover, «Annals Astroph. Obs., Smiths. Inst.», vol. 6 (1942).

Una variazione effettiva della costante solare, influisce certamente sui fenomeni terrestri, ed anche sulle espansioni e contrazioni della crosta terrestre supposte dal Brown in connessione alle fluttuazioni della rotazione terrestre. Tuttavia non è necessario qui ricorrere a tale influenza, e neanche accettare la realtà della caduta di quella costante. Infatti si potrebbe supporre quel salto brusco solo apparente, e connesso piuttosto a qualche fenomeno geofisico od atmosferico, la cui relazione col ciclo di Chandler è più comprensibile.

A rafforzare la fiducia sulla relazione tra questi fenomeni, è anche da citare un rilievo del Markowitz [10], secondo cui la discontinuità del moto polare nel 1923 dovrebbe mostrare qualche alterazione climatica, se il termine chandleriano fosse di origine meteorologica; basta parlare in termini geofisici in generale, anzichè meteorologici, ed il rilievo è esatto.

A riguardo del livello del Lago Victoria, a cui fu dedicata dallo scrivente una Nota [11], si osservi che precisamente al 1923 cade la correlazione del livello stesso coi numeri di Wolf, che era stata così imponente per due cicli solari; cade anche la periodicità chandleriana alla stessa epoca, o meglio si ha una inversione di fase; con che il fenomeno torna più oscuro, e questo rilievo fu una delusione per lo scrivente. Ma le correlazioni qui dette sono altrettanto interessanti.

E. Huntington in *Mainspring of Civilization* rileva che la frequenza dei temporali nel Canadà centro-meridionale fluttuò in armonia coll'attività solare nell'intervallo 1887-1923, esternamente al quale le fluttuazioni sono in opposizione di fase. Anche qui risalta dunque l'epoca critica intorno al 1923; tuttavia pel Canadà orientale, l'intervallo corrispondente risulta piuttosto 1884-1930 (cfr. anche W. G. Bowerman in « Pop. Astr. » genn. 1948).

Oltre alle perturbazioni rilevate, seguono altre coincidenze notevoli con terremoti devastatori ed altri rilievi.

Nel 1897, 12 giugno, terremoto dell'Assam; 1906, 18 aprile, S. Francisco (anche pel 1906, al riferimento [2], si osserva qualche cenno di variazione *ay*). Nel 1908, 28 dicembre, terremoto distruttore di Messina e Reggio Calabria; seguìto da quelli anche violentissimi dell'Asia Minore (23 gennaio 1909), Turchia (13 febbraio), Giappone (13-14 marzo), Yunnan, Cina (12-14 maggio), Sumatra (4 giugno), Provenza (11 giugno), Acapulco, Messico (30 luglio).

Per le perturbazioni successive ci limitiamo a ricordare: 1923 (1° settembre) Formosa, Yokoama; 1939 (25 gennaio), Chile; 1940 (10 novembre), Romenia. Il secondo di questi terremoti è ricordato anche dal Markowitz in relazione alla discontinuità del moto polare. Gli altri sono studiati dal Rothé [12].

H. W. Newton ha rilevato [13] che il 1941 fu notevole per due tempeste geomagnetiche di eccezionale intensità: siamo nell'intervallo 1939 42 già

(10) « A. J. », vol. 50, n. 1141, p. 21 (1942).
(11) « Contr. Geof. Capodimonte », ser. II, n. 9.
(12) *Séismes et Volcans*. Paris, Presses Universitaires, 1946.
(13) « The Obs. », aprile 1948.

notato per le perturbazioni del moto di Chandler (si osservi anche il riferimento [2], componenti X ed Y del termine chandleriano alle figg. 3 e 4).

M. Bath [14] ha esaminato l'attività microsismica ad Uppsala nel 1907–1947 per la ricerca di variazioni a lungo periodo. Egli trova una ben chiara variazione undecennale, e qualche indicazione di una variazione con periodo di 28 mesi. Questo è evidentemente il doppio del periodo di Chandler. Inoltre la variazione undecennale dal 1923 risulta negativamente correlata con la frequenza delle macchie solari. Così anche nella ricerca di questo autore si trova indicazione del ciclo chandleriano, e della epoca perturbata 1923. Un ciclo di 28 mesi nell'attività solare ed in fenomeni meteorologici e magnetici fu già individuato da H. W. Clough [15].

5. Sebbene i particolari presentino tuttora incertezze, l'insieme dei dati suggerisce che il moto di Chandler è soggetto realmente a varie perturbazioni o discontinuità, alcune rilevanti, altre frequenti e minute come trepidazioni. L'accertamento è fatto studiando il moto da un punto di vista geometrico, ma è stato reso più convincente da varie significative coincidenze geofisiche.

Le ragioni di queste irregolarità di comportamento dell'asse terrestre sfuggono ad una analisi precisa. Personalmente tendo a connetterle ad espansioni e contrazioni della crosta terrestre (tra limiti di una quindicina di centimetri e 3 o 4 metri), non uniformi nè regolari, supposte dal Brown per spiegare le fluttuazioni del moto lunare. Questa ipotesi d'altronde, può avere anche qualche relazione con quella delle traslazioni continentali di Wegener; questa è anche l'opinione del prof. Carnera. In proposito si hanno varie indicazioni; anche recentemente alla conferenza dei sismologi giapponesi a Tokio è stato comunicato che una montagna ad W di Fukui (Giappone centrale si è spostata di un metro e mezzo verso SE, e che la pianura di Kukui si è abbassata di circa 60 cm. in seguito al terremoto devastatore del 21 giugno dell'anno corrente ed alle scosse successive.

Quindi non si tratta soltanto di ipotesi, e può anzi suggerirsi una spiegazione di più ampie conseguenze: il moto di Chandler appare come espressione non di termini soltanto meccanici, come la teoria spiega, ma dovrebbe corrispondere anche a vere e proprie oscillazioni fisiche (termiche, elettromagnetiche, radioattive, o altro) della massa terrestre. In altra ricerca si spera di trovare qualche evidenza o indizio di valida conferma relativa.

(14) « Uppsala Meddel. (Meteor.) », n. 12; da « Geof. pura e applic. », vol. 12, Milano 1948.
(15) « Mo. Wea. Rev. », 56, July (1928).

Fisica. — *Sullo spessore dello strato di sbarramento nei raddrizzatori a ossidulo di rame* (*). Nota di FRANCESCA DEMICHELIS, presentata (**) dal Socio E. PERUCCA.

In un lavoro precedente Perucca e Demichelis (1) hanno indicato come le variazioni di talune proprietà del raddrizzatore in funzione della temperatura, si prestino a fornire un semplice metodo per la misurazione dello spessore h dello strato di sbarramento in un raddrizzatore.

I valori trovati hanno oscillato tra $h = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ cm e $h = 4{,}1 \cdot 10^{-4}$ cm per i raddrizzatori a ossidulo di rame; essi sono intermedi ai valori precedentemente trovati da Dowling e Place ($h \gtrsim 10^{-4}$ cm) e da Waibel ($h \gtrsim 10^{-3}$ cm) mentre escludono l'attendibilità dei valori più anticamente ammessi da Wilson ($h \gtrsim 10^{-7}$ cm).

Il nuovo metodo di misurazione permette la determinazione di h con facilità e con una approssimazione che giunge a $\gtrsim 20\,\%$ mentre le determinazioni degli altri autori si limitano a stabilire un ordine di grandezza.

Perciò si è ritenuto interessante di applicare il nuovo metodo alla determinazione:

del valore di h nei vari tipi di raddrizzatori a strato di sbarramento;

della dipendenza di h dalle condizioni fisiche del raddrizzatore;

delle relazioni tra il valore di h e le varie caratteristiche del raddrizzatore.

Ma l'estensione delle misurazioni a raddrizzatori al selenio e a raddrizzatori a punta e cristallo (per esempio del tipo Sylvania) non ha dato risultati soddisfacenti.

Per i raddrizzatori al selenio l'incostanza del loro comportamento non ha finora permesso la determinazione di dati sperimentali sicuri. Per i raddrizzatori a punta e cristallo la ridottissima superficie di contatto e il non rilevabile sviluppo di calore in essa generato per effetto Joule, non hanno permesso misurazioni analoghe a quelle eseguite su raddrizzatori a ossidulo di rame.

Si sono quindi riprese esperienze sistematiche limitatamente ai soli raddrizzatori a ossidulo di rame. Le misurazioni vennero compiute su raddrizzatori a ossidulo di rame di area $\gtrsim 0{,}80$ cm^2 (2) e di area $\gtrsim 0{,}28$ cm^2 (3).

Di ogni raddrizzatore sono stati determinati:

1° l'intensità di corrente nel verso di difficile passaggio: i_d;

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) PERUCCA e DEMICHELIS, *Nuove proprietà dei raddrizzatori a strato di sbarramento.* « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IV, fasc. 6, 646.

(2) Raddrizzatori Westinghouse tipo E.

(3) Raddrizzatori Westinghouse tipo M 10.

2° l'intensità di corrente nel verso di facile passaggio: i_f;

3° il rapporto $K = \frac{i_f}{i_d}$;

4° lo spessore h dello strato di sbarramento secondo il metodo indicato in [1].

Queste determinazioni vennero eseguite a temperatura ambiente ($\simeq$ 20° C) con lo scopo di studiare quale influenza avesse su di esse il portare il raddrizzatore fino a una *temperatura di cimento* ϑ, il tenervelo alcuni minuti

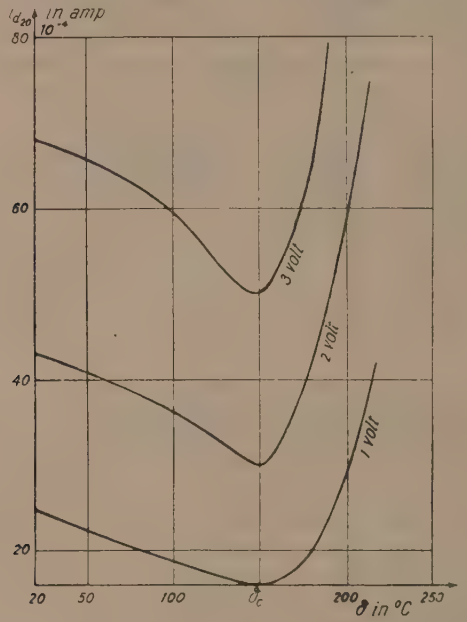


Fig. 1.

e infine lasciarlo raffreddare. Nelle prove fatte la temperatura di cimento ϑ variò da 40° C fino a oltre 250° C.

Per ciascuna delle grandezze su indicate si è così ottenuto un diagramma in funzione di ϑ; su ciascun diagramma risultò interessante indicare il valore della temperatura critica ϑ_c come definita in [1].

Sono riportati i diagrammi relativi a un raddrizzatore tipo [3].

Le esperienze su una diecina di altri esemplari assicurano che l'andamento dei grafici è comune a tutti i raddrizzatori dei due tipi.

Il diagramma di figura 1 dà $i_{d_{20}}$ in funzione di ϑ; è parametro la tensione applicata.

Il diagramma di figura 2 da $i_{d_{20}}$ in funzione di ϑ; è parametro la tensione applicata.

Il diagramma di figura 3 dà $K_{20} = \frac{i_{f_{20}}}{i_{d_{20}}}$ in funzione di ϑ; è parametro la tensione applicata. Nella figura 5 del lavoro citato [1] è rappresentato un

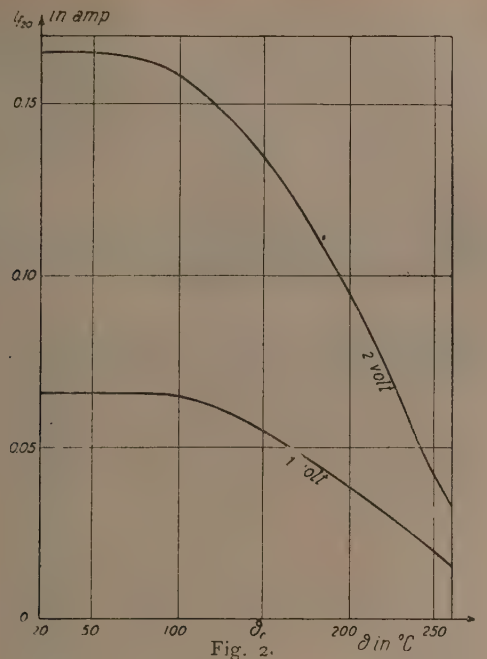

i_{20} in amp
0.15
0.10
0.05
0
2 volt
1 volt
20
50
100
ϑ_r
200
ϑ in °C
250

Fig. 2.

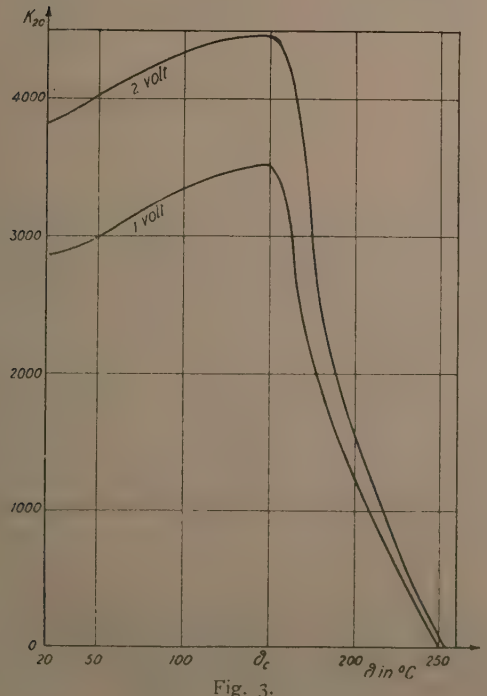

K_{20}
4000
3000
2000
1000
0
2 volt
1 volt
20
50
100
ϑ_c
200
ϑ in °C
250

Fig. 3.

diagramma analogo relativo ad alcuni raddrizzatori; in esso K_{20} è funzione praticamente costante della temperatura ϑ per valori di ϑ minori di ϑ_c.

Il diagramma di figura 4 dà lo spessore h in funzione di ϑ.

Dall'esame di questi dati sperimentali risulta che:

1° Aumentando la temperatura del raddrizzatore fino a valori minori di ϑ_c, per una tensione costante applicata al raddrizzatore, *aumenta la resistenza dello strato di sbarramento* e *diminuisce lo spessore h dello strato stesso*. Questo risultato ha un interesse essenziale e costituisce un elemento nuovo e tutt'altro che previsto, per la interpretazione del raddrizzamento.

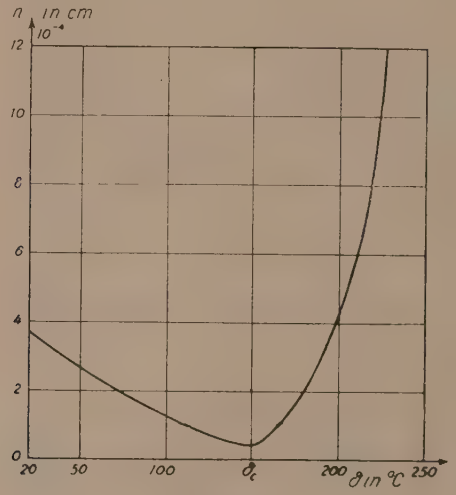


Fig. 4.

2° Aumentando la temperatura del raddrizzatore oltre il valore ϑ_c, per una tensione costante applicata al raddrizzatore, diminuisce la resistenza dello strato di sbarramento e aumenta lo spessore h dello strato stesso.

3° Dai diagrammi di figure 1, 3, 4 risulta che quando, in conseguenza del riscaldamento oltre ϑ_c, lo spessore h dello strato riprende il valore iniziale, K è di molto diminuito, il raddrizzatore è già in via di deterioramento; inoltre è diminuita la resistenza dello strato di sbarramento. Si deve ritenere che sia avvenuta quella alterazione nella costituzione dello strato di sbarramento la cui natura è tuttora ignota (diffusione di O_2 ? trasformazione di Cu_2O in CuO ?) e la cui presenza nella fabbricazione e nella conservazione del raddrizzatore costituisce come il veleno (gli inglesi direbbero *poisoning*) che impedisce il buon funzionamento dello strato di sbarramento.

Ringrazio vivamente il prof. Perucca che mi ha seguita nello svolgimento del presente lavoro e la Società Westinghouse che ci ha offerto i raddrizzatori necessari alle esperienze.

Fisica. — *Sull'assorbimento di eletttroni di 17 MeV, in materiali di diverso numero atomico* (*). Nota di MARIO AGENO e MARIO CHIOZZOTTO, presentata (**) dal Socio G. C. TRABACCHI.

Ogni tentativo di calcolo della curva di assorbimento di elettroni di spettro energetico conosciuto in un determinato materiale assorbente si infrange, com'è noto, contro la difficoltà fondamentale di tener conto in modo corretto della diffusione.

È d'altra parte essenziale in molti casi, per l'interpretazione di una esperienza, il disporre di dati relativi alla penetrazione di elettroni di energia nota. Ci limitiamo a citare a questo proposito, a titolo di esempio, i recenti tentativi di determinare lo spettro energetico degli elettroni di disintegrazione dei mesoni μ mediante misure di assorbimento. Le esperienze istituite a questo scopo [1] sono d'interpretazione oltremodo difficile e assai dubbia va considerata ogni conclusione da esse tratta, in quanto nessun affidamento si può fare sulle curve di assorbimento calcolate e mancano dati sicuri sull'assorbimento di elettroni di energia dell'ordine di 50 MeV.

Queste considerazioni ci hanno convinto della convenienza di eseguire una serie di curve di assorbimento di elettroni in condizioni di buona geometria e per energie maggiori di quelle ordinariamente in gioco nella radioattività β, che sono le uniche per le quali esistano nella letteratura dati sufficientemente attendibili [2].

Ci siamo serviti a questo scopo degli elettroni Compton prodotti in alluminio dai raggi γ di 17,6 MeV della reazione $Li^7(p, \gamma)$. I protoni, dell'energia di circa 0,5 MeV, necessari per la produzione di tali raggi γ sono stati da noi ottenuti col tubo acceleratore a 1,1 MeV dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma [3]. La targhetta di litio metallico con essi bombardata era di spessore grande in confronto al range dei protoni incidenti (targhetta spessa).

Il nostro dispositivo sperimentale è rappresentato in iscala nella fig. 1. La targhetta di Litio che rappresenta la nostra sorgente di raggi γ, può assimilarsi ad un dischetto di spessore trascurabile e del diametro di 2 cm. circa. Il radiatore costituito da 3,6 cm. di alluminio è posto a circa 50 cm. dalla sorgente: esso è di spessore piccolo in confronto allo spessore di dimezzamento in alluminio dei γ di 17,6 MeV (11,6 cm.), ma non inferiore al range, in tale materiale, dei relativi elettroni secondari (radiatore spesso).

Gli elettroni secondari venivano rivelati mediante un sistema di contatori di Geiger in coincidenze triple. Un quarto gruppo di contatori, posti

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) J. STEINBERGER, « Phys. Rev. », *74*, 500 (1948); E. P. HINKS, B. PONTECORVO, « Phys. Rev. », *74*, 697 (1948).

(2) Si veda per esempio: E. BLEULER, W. ZÜNTI, « H.P.A. », *19*, 373 (1948).

(3) AMALDI, BOCCIARELLI, RASETTI, TRABACCHI, « Ric. Sc. », X, 623 (1939).

davanti al radiatore, rappresentava un'anticoincidenza avente lo scopo di eliminare eventuali elettroni non provenienti dal radiatore. Gli assorbitori venivano posti immediatamente davanti all'ultimo gruppo di contatori.

Tutti i contatori erano in vetro sottile (spessore delle pareti circa 0,2 mm., argentato internamente per via chimica. Le loro dimensioni utili erano di $1{,}5 \times 5$ cm². La registrazione di coincidenze aveva un potere risolutivo di circa 8×10^{-6} sec.

Come risulta dalla figura 1, il nostro dispositivo sperimentale realizza una buona geometria sia nei confronti dei raggi γ incidenti, sia nei confronti degli elettroni secondari. L'uso inoltre di coincidenze triple praticamente elimina ogni effetto di zero.

Sono state fatte prove molto accurate per determinare quale fosse la migliore schermatura dei contatori, onde ridurre in ciascuno di essi il numero delle singole dovute a elettroni non provenienti dal radiatore. Abbiamo

Fig. 1.

concluso alla fine che le condizioni migliori si realizzano eliminando ogni schermatura ed allontanando il più possibile ogni altro oggetto dai contatori.

La scelta dei materiali assorbenti (Al, Fe, Cd, Pb) è stata fatta in modo da coprire il più vasto intervallo di numero atomico possibile. È stato inoltre fatta una curva di assorbimento in paraffina, dato l'interesse attuale di tale materiale assorbente in relazione al già citato studio dello spettro degli elettroni di disintegrazione dei mesoni μ.

Riportiamo a titolo di esempio le curve di assorbimento in ferro (fig. 2) e in paraffina (fig. 3). Agli spessori di assorbitori indicati in ascisse in gr/cm², vanno aggiunti 0,26 gr/cm², rappresentanti lo spessore medio delle cinque pareti di contatore attraversate dagli elettroni.

L'andamento generale delle nostre curve è, come si vede, abbastanza diverso da quello delle analoghe curve di altri Autori. Le nostre si distinguono dalle precedenti essenzialmente per una discesa assai più ripida soprattutto nel tratto iniziale. Ciò è da attribuirsi, com'è ovvio, alla differenza delle geometrie.

La seguente tabella riassume i dati da noi ottenuti nei diversi materiali. Nella terza colonna è indicato fino a che spessore di assorbitore è stata proseguita la curva di assorbimento. La quarta e quinta colonna contengono rispettivamente gli spessori di dimezzamento e di riduzione al 5 % della radia-

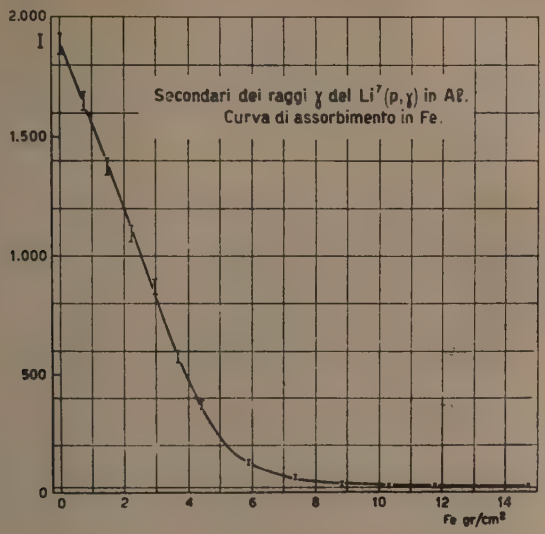


Fig. 2.

zione elettronica incidente (espressi in gr/cm².). È da notare che la curva relativa alla paraffina è stata eseguita in condizioni geometriche lievemente diverse da quelle descritte. A causa della bassa densità di questo materiale

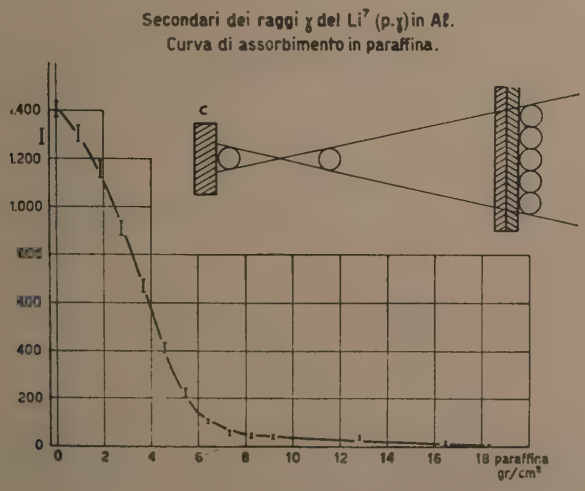


Fig. 3.

abbiamo dovuto portare a 25 cm. la distanza tra i due gruppi estremi di contatori di coincidenza e di conseguenza per non ridurre troppo l'angolo solido portare a cinque i contatori in parallelo dell'ultimo gruppo. Alla paraffina è stato attribuito un numero atomico medio pari a circa 3.

TABELLA I.

Materiale assorbente	Z	d_{max}	$d_{1/2}$	$d_{1/20}$
Paraffina	(3)	18	3,8	7,4
Alluminio	13	11.5	3,4	6,9
Ferro	26	15	3,0	6,4
Cadmio	48	10.5	2,6	6,0
Piombo	82	12	2,1	5.8

I dati della tabella I sono riportati nella fig. 4, che dimosta graficamente l'andamento dello spessore di dimezzamento e dello spessore di riduzione al 5 % (espressi in gr/cm².) in funzione del numero atomico. Il regolare anda-

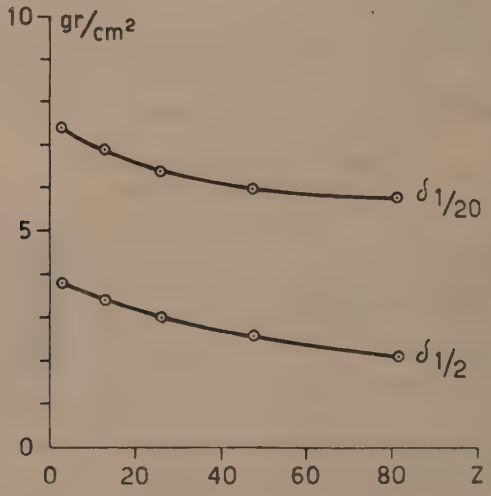


Fig. 4.

mento di queste curve (nonostante che i dati relativi siano stati ricavati dalle curve sperimentali mediante interpolazione grafica) è una riprova soddisfacente dell'accuratezza delle misure eseguite.

Come si vede, la penetrazione aumenta sensibilmente al diminuire del numero atomico, il che significa che le perdite di energia per irraggiamento hanno un effetto prevalente sull'effetto di schermo degli elettroni più esterni, che negli elementi pesanti fa sì che il nunero degli elettroni efficaci per ciò che riguarda il frenamento sia sensibilmente minore di Z.

Fisica. — *Determinazioni di una scala di sensazioni visive.* Nota di CARLA MARIA GARELLI e GINO SACERDOTE, presentata (*), dal Corrisp. R. DEAGLIO.

1. La legge che mette in relazione una sensazione visiva con l'eccitazione che la provoca si discosta, come è noto, dalla semplice relazione logaritmica di Weber-Fechner, la quale è dedotta ammettendo costante il rapporto fra il minimo incremento percettibile di brillanza alla brillanza stessa.

La tendenza attuale è quella di costruire una legge psicofisica che si deduce dai dati diretti dell'esperienza e non da integrazione da leggi elementari.

Non è facile, e forse non è possibile, definire in modo preciso e quantitativo la sensazione: noi possiamo confrontare le sensazioni prodotte da due eccitazioni diverse, e giudicare se esse sono eguali, o, se diverse, quali delle due è maggiore dell'altra. Si può però constatare che è anche possibile, con un criterio sia estetico, sia di ragionamento, giudicare quando una sensazione è la media aritmetica di due date sensazioni. Invero in una siffatta determinazione intervengono certamente elementi che possono portare una certa indecisione nelle misure ma si è potuto constatare sperimentalmente che, ciò malgrado, si ha la possibilità di dedurre, attraverso misure di sensazione media, una legge che dà la sensazione in funzione dell'eccitazione fisica che la produce.

2. Per esprimere questa legge sono stati fatti non pochi tentativi e si sono proposte molte leggi di carattere empirico valide in un campo più o meno esteso. Dalle più vecchie leggi di Weber Fechner:

$$S = a \log B + c$$

(S sensazione in unità arbitrarie, B eccitazione (nel caso visivo espressa in apostilb), a e c costanti)

e di Plateau

$$S = a B^n \qquad (n \text{ costante})$$

si è passati a leggi di carattere empirico ricavate da numerosi dati sperimentali dai colorimetristi americani (1).

I metodi che si seguono normalmente per ricavare una legge di sensazione sono: l'integrazione dei dati sperimentali relativi alla soglia differenziale di brillanza, integrazione però che porta con sè un elemento di arbitrarietà, ed il metodo così detto delle « bisezioni », con il quale si determina

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) E. Q. ADAMS, P. W. COBB, « J. Exp. Psych. », *5*, 39 (1922); A. E. O. MUNSELL, L. L. SLOAN, J. H. GODLOVE, « J. O. S. A. », *23*, 394 (1933); J. H. GODLOVE, « J. O. S. A. », *23*, 419 (1933); S. M. NEWHALL, D. NICKERSON, D. B. JUDD, « J. O. S. A. », *33*, 385 (1943); S. M. NEWHALL, « J. O. S. A. », *30*, 617 (1940).

l'eccitazione che dà una sensazione che sia la media aritmetica tra due sensazioni prodotte da due eccitazioni note. Nel caso dell'acustica questo metodo è stato molto sviluppato anche nel caso in cui una delle due sensazioni sia quella di soglia, ma non si è pervenuti ad alcuna legge che sia esprimibile analiticamente in modo semplice. Per la visione le misure eseguite con questo criterio dai colorimetristi del Bureau of Standards sono state condotte su serie di campioni, di costante lunghezza d'onda dominante e saturazione, e di fattore di riflessione diffusa variabile, i quali venivano scelti ed ordinati dall'osservatore in modo da fornire una scala di sensazioni tutte tra di loro equidistanti.

Il criterio seguìto nelle nostre misure è il secondo, con un diverso dispositivo sperimentale, che permette di ottenere in modo continuo tutte le brillanze da 0,1 a 1500 apostilb.

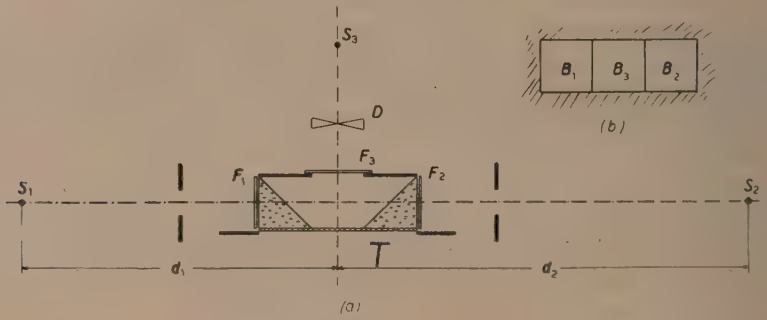


Fig. 1.

3. In fig. 1 è dato lo schema del dispositivo sperimentale: T è una testa fotometrica a 3 campi, ottenuta mediante due prismi a 45°, incollati su di un vetro lattato: la parte centrale è illuminata dalla lampada S_3, attraverso il settore rotante D la cui apertura è regolata dall'osservatore mediante comando a distanza; i due campi laterali sono illuminati dalle due sorgenti S_1 ed S_2 poste su di un banco ottico. Variando le distanze d_1 e d_2 e l'apertura del settore rotante, e mediante interposizione di opportuni filtri, è possibile variare con continuità la brillanza dei tre campi entro i limiti da 0,1 a 1500 apostilb. Il campo di osservazione circondato da uno sfondo opaco di carta nera, appare dunque all'osservatore costituito di tre campi rettangolari adiacenti, di brillanza diversa B_1, B_2, B_3 (fig. 1 *b*) ed è visto dall'osservatore sotto un angolo visivo di $4^0 \times 1{,}3^0$.

Fissate due brillanze B_1 e B_2 dei campi esterni, l'osservatore regola la brillanza del campo centrale B_3 in modo che a suo giudizio la sensazione prodotta da B_3 sia la media aritmetica tra le sensazioni date da B_1 e B_2.

4. Sono state eseguite col dispositivo descritto numerose determinazioni con soggetti diversi. I valori delle tre brillanze B_1, B_2, B_3 costituiscono tutta una serie di dati, che potrebbero venire rappresentati su di una superficie

nello spazio a tre dimensioni. Quello che è importante è poter constatare una coordinazione tra i vari risultati ed al tempo stesso di trovare un metodo che ci consenta di controllare l'espressione di una determinata legge $S = f(B)$. Si ha:

$$S_3 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{f(B_1) + f(B_2)}{2} = f(B_3). \tag{1}$$

La (1) è un'equazione funzionale la quale, noto B_3 in funzione di B_1 e B_2, consente di determinare la funzione f, da cui la legge $S = f(B)$.

Abbiamo eseguito tre serie di determinazioni.

Una prima serie, quella delle successive bisezioni, ci ha consentito di controllare l'attendibilità di questi risultati, per i quali elementi di giudizio hanno tanta importanza. Il metodo di operare è il seguente: si cerca la sensazione S_3, media tra S_1 ed S_2, poi la S_4 media tra S_1 ed S_3, la S_5 media tra S_3 ed S_2 ed infine la S_6 media tra S_4 ed S_5. Si constata sperimentalmente, ed in vari campi di brillanza, che la brillanza che produce la S_6 coincide con quella che produce S_3. Questo fatto rivela una coerenza di dati ed una attendibilità del metodo.

Una seconda serie di misure è stata fatta basandosi sulla ricerca della eccitazione che dà la sensazione media tra le sensazioni provocate da due eccitazioni che stanno tra loro in un dato rapporto. Abbiamo eseguito misure cercando la brillanza che dà la sensazione media tra B_1 e 0,1 B_1 al variare di B_1.

Dai risultati sperimentali si è constatato questo fatto: per un dato osservatore la B_3 è proporzionale alla B_1 secondo un fattore K il quale non varia sensibilmente al variare di B_1 entro limiti assai estesi. Ricerchiamo allora una soluzione dell'equazione funzionale

$$2f(K B_1) = f(B_1) + f(0{,}1\ B_1). \tag{2}$$

La (2) si può soddisfare con una legge del tipo

$$S = a B^n + c \tag{3}$$

che è dello stesso tipo della legge di Plateau. La (3) sostituita nella (2) dà:

$$2K^n = 1 + 10^{-n}. \tag{4}$$

La (4) permette di ricavare l'esponente n dal valore di K determinato sperimentalmente mediante il diagramma di fig. 2. Il caso anomalo di $n = 0$ si ha per $K^{-1} = \sqrt{10} = 0{,}316$, nel quale caso si ha la legge logaritmica, $S = a \log B + c$.

Sostituendo d'altra parte direttamente la (3) nella (1) si ha:

$$B_1^n (10^{-n} + 1) = 2 B_3^n$$

cioè

$$\log B_3 = \log B_1 + \frac{1}{n} \log \left[\frac{1}{2} (10^{-n} + 1) \right]. \tag{5}$$

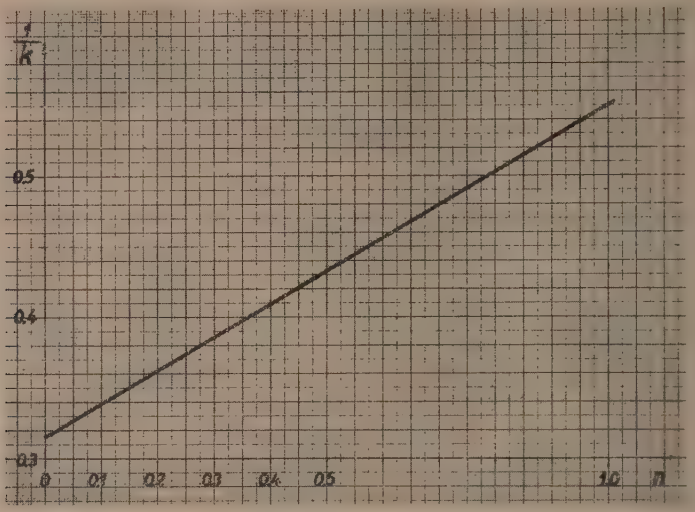


Fig. 2.

Se è valida la (5) riportando in scala doppio logaritmica i valori di B_3 in funzione di B_1 trovati sperimentalmente, essi devono trovarsi su di una retta di pendenza 1: ciò appunto si constata con buona approssimazione come è dimostrato dalla fig. 3. in cui sono riportati i risultati di molte osservazioni.

L'ordinata corrispondente a $B_1 = 1$ apostilb dà B_3^0:

$$y = \log B_3^0 = \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2} \right) (10^{-n} + 1).$$

La risoluzione di questa equazione trascendente che permette di ricavare n è possibile per via grafica, coll'aiuto del diagramma di figura 4.

In realtà tra i vari osservatori si notano delle differenze sensibili nel valore di K corrispondenti ad un lieve spostamento della retta di figura 3 parallelamente a se stessa.

Da queste prime misure la legge di Plateau sembra esser ben verificata entro il campo di brillanze osservato per un determinato osservatore, ma l'esponente caratteristico varia entro certi limiti da soggetto a soggetto. Il valore che si trova per n varia per i diversi osservatori da 0,3 a 0,5, mentre per ogni osservatore ogni esponente dedotto con molte misure è compreso entro una incertezza di $\pm$ 7 %. Munsell e Stefanini avevano scelto per rappresentare i loro dati il valore $n = 0,5$.

In generale abbiamo sottoposto alle prove persone allenate alla ricerca sperimentale, le quali mettevano particolare impegno per ottenere risultati attendibili. Notiamo che questo giudizio può venire da un ragionamento che può essere diverso da persona a persona: ad esempio alcuni soggetti sta-

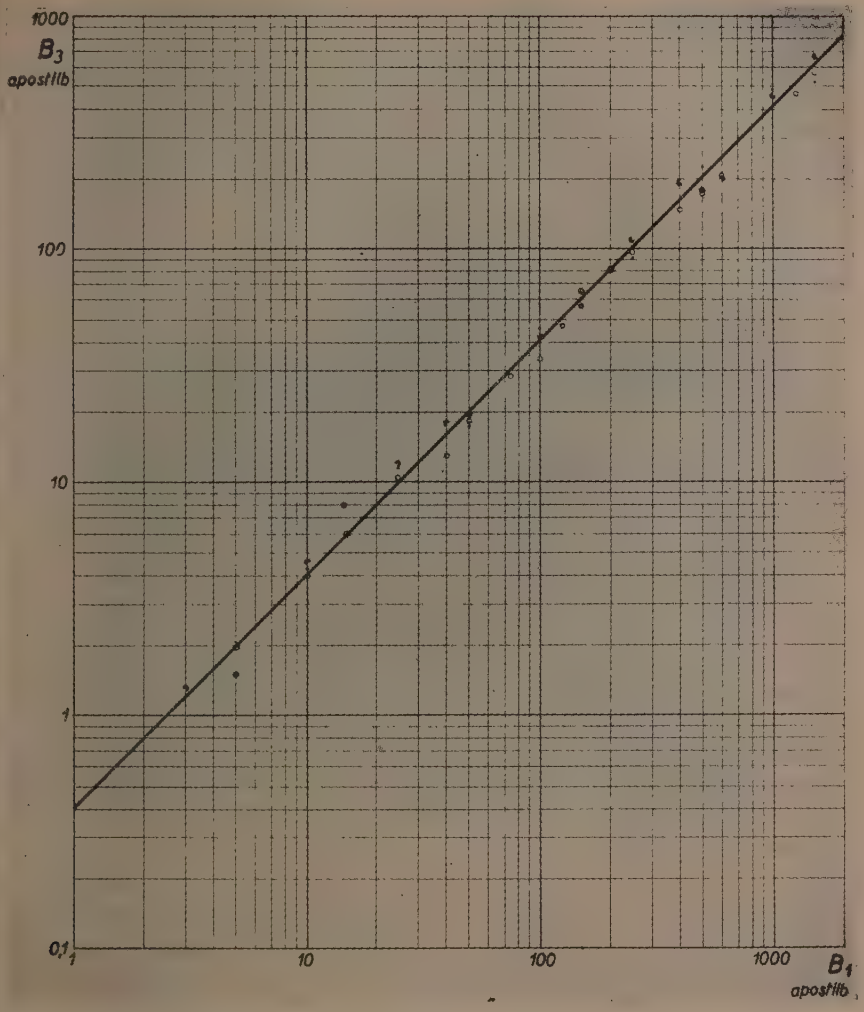


Fig. 3.

bilivano la sensazione intermedia quando erano nell'incertezza di classificare la zona centrale come chiara o scura, ossia di aggregarla alla classe del campo più chiaro oppure a quella del campo più scuro; altri ricercatori seguivano un criterio estetico, altri infine si basavano direttamente su di un giudizio di eguale contrasto. Notiamo ancora la difficoltà di fare misure a brillanze molto basse: per effetto del contrasto i bordi della macchia centrale apparivano di diversa brillanza. In seguito all'esperienza finora seguìta riteniamo che sarà necessario riprendere queste misure anche con modalità diverse, ad esempio separando nettamente i vari campi tra di loro, variando le condizioni di illuminamento dello sfondo, che nel nostro caso era nero;

probabilmente avrà anche importanza la forma e la posizione dei singoli campi.

Comunque queste determinazioni mettono ulteriormente in rilievo la possibilità di poter stabilire una legge, ed una prova della loro attendibilità si ha esaminando la terza serie di determinazioni le quali sono state condotte fissando la B_1 e variando la B_2 entro larghi limiti, e questo per diversi valori della B_1.

Tracciata con scala doppio–logaritmica la curva $S = a\, B^{0,3}$, con $n = 0,3$ (valore ottenuto dalla retta di figura 3 che meglio si accorda con i vari dati sperimentali della seconda serie di misure), si possono sistemare su di essa

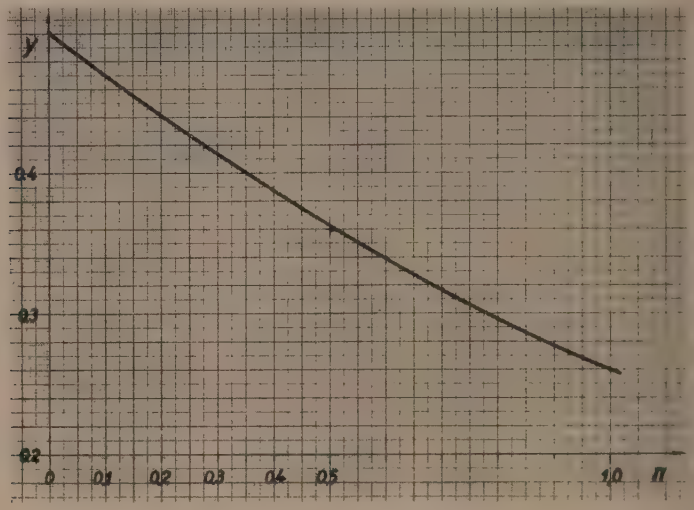


Fig. 4.

i punti sperimentali ottenuti da questa terza serie di misure: abbiamo constatato che nel campo delle brillanze esplorato tutti i punti si piazzano assai bene sulla linea I (fig. 5).

Possiamo quindi concludere, ammesso come valido il dato sperimentale (2), che *una* delle possibili soluzioni dell'equazione funzionale (2) rappresenta, tra 0,1 apostilb e 1500 apostilb, con buona approssimazione la curva di sensazione: sarebbe certamente interessante estendere queste misure e constatare la validità della costanza di K ed i limiti di variazione di essa da soggetto a soggetto.

Notiamo che, ammesso il fatto sperimentale del K costante, si può ammettere anche una legge del tipo

$$S = a\, B^n + c \tag{6}$$

con $c \neq 0$ e non è detto che si abbiano funzioni di carattere più generale che risolvano la (2).

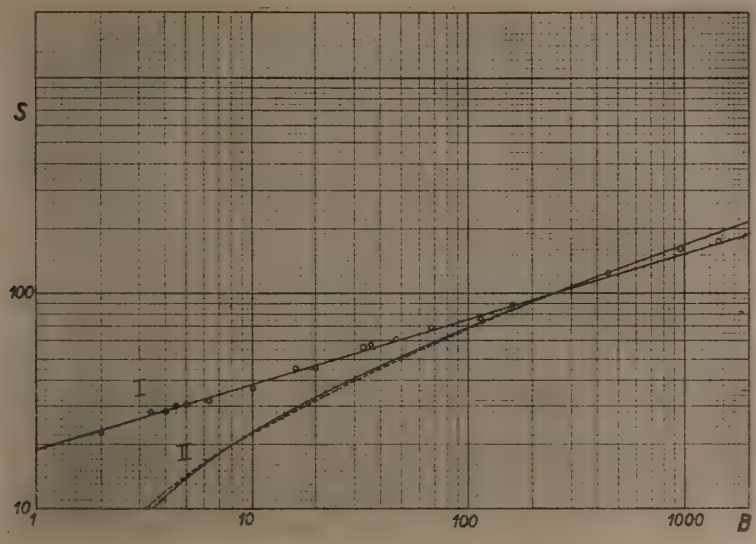


Fig. 5.

5. Per poter confrontare i nostri risultati con quelli dei colorimetristi americani occorre tenere conto che le scale di sensazione ottenute da questi derivano tutte dalla scala proposta originariamente dal Munsell il quale per poter confrontare i suoi risultati con quelli ottenuti dall'integrazione della soglia differenziale ha imposto le condizioni S = 20 ed S = 100 in corrispondenza di due valori del fattore di riflessione diffusa dei suoi campioni, a cui corrispondevano valori della brillanza di 8 e 250 apostilb. In tal caso la c della (6) non verrebbe uguale a 0, però il dato sperimentale da noi constatato della costanza di K è sempre valido. Ammesso ancora $n = 0{,}3$ otteniamo per a e c i seguenti valori:

$$a = 34{,}4$$

$$c = -38$$

quindi la legge diventerebbe:

$$S = 34{,}4\, B^{0{,}3} - 38$$

Nei limiti tra 1 e 250 lux questa legge (curva II, fig. 5) coincide bene con quella definitiva proposta dal Sottocomitato della O.S.A. per la revisione dell'atlante di Munsell (curva tratteggiata), e viceversa si potrebbe dire che anche i dati degli americani interpretati in modo opportuno possono portare ad una legge del tipo di Plateau.

Il fatto che i nostri valori sono leggermente più elevati di quelli americani è da attribuirsi all'influenza dello sfondo, che d'accordo con le determinazioni degli americani stessi, giustifica perfettamente questo fatto.

Può sembrare strano che una legge che deve avere un carattere ben definito sia esprimibile con funzioni di andamento così diversi, ma noi ci limitiamo per ora a constatare l'esistenza di una legge funzionale, legge che ammette soluzioni analitiche di diversa natura, che tutte però soddisfano il dato sperimentale di partenza.

Per avere una legge diciamo così di carattere assoluto occorre un altro dato; però per un esame completo della situazione è necessario ricorrere alla soluzione completa dell'equazione funzionale che abbiamo citata.

Le misure sono state eseguite nel laboratorio di Fotometria dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris.

Desideriamo esprimere i nostri vivi ringraziamenti al prof. Deaglio per gli utili consigli di cui ci fu largo nel corso dell'esperienza e per le discussioni sull'interpretazione dei risultati. Ringraziamo pure il dott. Ferrero e la dottoressa Rossi, e gli altri collaboratori che hanno eseguito numerose serie di determinazioni.

Chimica (Chimica Biologica). — *Sull'ossidazione dell'acido piruvico nell'«Escherichia Coli»*(*). Nota di NORA BARGONI, presentata(**) dal Socio A. HERLITZKA.

Edlbacher e Grauer (1) già da tempo poterono dimostrare che l– e d–istidina innalzano il consumo di ossigeno di estratti di fegato di ratto, senza accompagnarsi o a una loro diminuzione o a una formazione di ammoniaca. Più tardi, ancora Edlbacher (2) osservò un'azione ben netta di aminoacidi e protidi sulla demolizione ossidativa di d–aminoacidi e nuovamente Edlbacher e Wiss (3), fra l'altro, determinarono con l e d istidina, acido l- e d–aspartico, acido l– e d–glutamico un forte aumento nell'ossidazione dell'acido piruvico, promossa da estratti di fegato di ratto. Anche Waterman, Berkhout e Bos (4) ottennero un'attivazione della respirazione del fegato di ratto con glicina, cistina, triptofano, prolina, acido aspartico e acido glutamico. Recentemente io pure in una comunicazione (5) riferii sulla azione svolta da taluni aminoacidi sull'ossidazione dell'acido piruvico nell'Escherichia Coli. Ivi affermai che glicina, α alanina, β alanina, cistina, diossifenilalanina, tirosina, leucina, triptofano, istidina, acido glutamico, prolina, ossiprolina non promuovono un aumento dell'ossidazione del che-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Torino.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.
(1) EDLBACHER e GRAUER, « Helv. Chim. Acta », *26*, 864 (1943).
(2) EDLBACHER, « Helv. Chim. Acta », *28*, 797 (1945); *28*, 1111 (1945).
(3) EDLBACHER e WISS, « Helv. Chim. Acta », *29*, 216 (1946).
(4) WATERMAN, BERKHOUT e BOS, « Enzymologia », *12*, 206 (1947).
(5) BARGONI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *22*, 293 (1947).

toacido, che è invece determinato da arginina. Essendo l'ossidazione dell'acido piruvico nell'Escherichia Coli fenomeno pur sempre, almeno in parte, oscuro, per quanto notevoli siano i risultati raggiunti [6], e l'eventuale constatazione di effettori della reazione potendo contribuire al suo chiarimento, eseguii successivamente una nuova serie di esperienze, di cui ora dò relazione, lasciando respirare a lungo i batteri sospesi in soluzione di Ringer addizionata di un terzo del volume di soluzione regolatrice della reazione di fosfati mol/15 a pH 7,35 in ambiente di O_2, sino a che il consumo di O_2 si fosse sensibilmente attenuato ed aggiungendo solo allora la soluzione dell'aminoacido. Adottando questa modalità di esperimento i risultati furono notevoli.

Fu possibile infatti osservare nell'ossidazione dell'acido piruvico un aumento del consumo di O_2 determinato da glicina, cistina, acido aspartico, acido glutamico, prolina. Senza effetto risultarono β-alanina, fenilalanina, tirosina, leucina, isoleucina, lisina, triptofano, istidina, arginina, ornitina, ossiprolina. È di un certo interesse che identico risultato, eccettuando il comportamento del triptofano, ottennero Waterman, Berkhout e Bos [4] nello studio dell'azione di alcuni aminoacidi sulla respirazione del fegato. Inibizione dell'ossidazione si osserva nelle prove con acido piruvico e α-alanina, cisteina, triptofano. Sulla respirazione del batterio solo, oltre l'acido aspartico, acido glutamico, prolina, ebbero azione α alanina, lisina, ornitina, arginina, triptofano, mentre furono inattive glicina, β-alanina, fenilalanina, cistina, leucina, isoleucina, valina, tirosina, istidina, ossiprolina. Determinazioni di NH_2 all'inizio ed al termine dell'indagine nelle prove di ossidazione dell'acido piruvico in presenza di aminoacidi, ove era misurato un aumento del consumo di ossigeno, dimostrarono o scomparsa di taluni aminoacidi (acido aspartico, cistina) od una riduzione ben chiara di altri (acido glutamico, prolina, glicina). L'osservazione è importante, dacchè conduce ad escludere con tutta probabilità un'azione di effettore delle reazioni di ossidazione dell'acido piruvico promossa dall'Escherichia Coli svolta dagli aminoacidi adoperati. D'altro canto, l'esame dei numeri pone in evidenza un'attivazione della desaminazione ossidativa dei medesimi aminoacidi durante l'ossidazione dell'acido piruvico. L'attivazione, generalmente di modica entità, della respirazione del batterio, promossa da alcuni aminoacidi, non è invece accompagnata da variazioni apprezzabili di NH_2. Non è però possibile da ciò dedurre un'azione di attivazione di certi aminoacidi sui processi respiratori del batterio, essendo il fenomeno prodotto di modico grado.

PARTE SPERIMENTALE. — Le indagini venivano eseguite su colture di 24 ore di Escherichia Coli in brodo. La massa batterica era separata mediante centrifugazione e quindi sospesa in liquido di Ringer addizionato di un terzo del volume di una soluzione regolatrice della reazione di fosfati mol/15 a pH 7,35. La sospensione era adoperata per l'indagine solo quando il suo consumo di O_2 appariva sensibilmente diminuito.

[6] LIPMANN « Advances in Enzymol. », 6, 231 (1946).

L'ossidazione dell'acido piruvico si seguiva con il metodo manometrico di Barcroft–Warburg, con le norme consuete.

Le determinazioni di azoto aminico venivano eseguite con il micrometodo di Van Slyke, e quelle di prolina con il metodo colorimetrico proposto da Guest (7).

l–α–alanina, l–leucina, l–isoleucina, l–arginina, l–ornitina, l–lisina, l–tirosina, l–triptofano, l–istidina, acido l–glutamico, l–prolina, l–ossiprolina, erano preparati di Hoffmann–La Roche; acido piruvico, glicina, l–β–alanina, cistina, d , l–diossifenilalanina di Kahlbaum; acido l–aspartico di Erba; l–cisteina, e l–fenilalanina di Winthrop.

Gli acidi erano trasformati nei sali sodici e adoperati in soluzione a pH 7,4.

Le indagini eseguite sono state:

A) Azione della glicina, α–alanina, β–alanina, cistina, cisteina, valina, leucina, arginina, ornitina, lisina, acido l–aspartico, isoleucina, fenilalanina, tirosina, triptofano, istidina, acido l–glutamico, prolina e ossiprolina sull'ossidazione dell'acido piruvico.

1° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, glicina 0,02 mol o H_2O ml 0,5

QO_2 = mmc O_2 consumato per ora

$\Delta QO_2 = QO_2$ con substrato – QO_2 senza substrato

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	23,4	—
Acido piruvico	74,9	51,5
Glicina	22,3	0
Acido piruvico + glicina	82,5	59,1

2° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, α–alanina 0,02 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	23,4	—
Acido piruvico	74,9	51,5
α–alanina	55,0	31,6
Acido piruvico + α–alanina . . .	53,2	29,8

3° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, β–alanina 0,02 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	30,4	—
Acido piruvico	60,8	30,4
β–alanina	23,4	0
Acido piruvico + β–alanina . . .	63,2	32,8

(7) GUEST, «Canad. J. Research», *17 B*, 143 (1938).

4° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, cistina 0,01 mol o H_2O ml 0,5;

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	14,0	—
Acido piruvico	36,3	22,3
Cistina	14,0	0
Acido piruvico + cistina	45,6	31,6

5° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, cisteina 0,01 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	3,5	—
Acido piruvico	52,6	49,1
Cisteina	24,6	21,1
Acido piruvico + cisteina	53,8	50,3

6° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, valina 0,02 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	37,4	—
Acido piruvico	71,2	33,8
Valina	25,7	0
Acido piruvico + valina	67,9	30,5

7° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, leucina 0,02 mol. o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
	29,0	—
Acido piruvico	67,5	38,5
Leucina	27,0	0
Acido piruvico + leucina	62,7	33,7

8° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, isoleucina 0,02 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	21,1	—
Acido piruvico	67,9	46,8
Isoleucina	22,2	1,1
Acido piruvico+isoleucina	60,9	39,8

9° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, fenilalanina 0,01 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
	15,2	—
Acido piruvico	40,9	25,7
Fenilalanina	13,5	0
Acido piruvico + fenilalanina	42,8	27,6

10° Composizione delle prove: sospensione batterica ml. 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, tirosina 0,002 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	14,2	—
Acido piruvico	41,9	27,7
Tirosina	6,6	0
Acido piruvico + tirosina	38,7	24,5

11° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, triptofano 0,01 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	18,7	—
Acido piruvico	69,2	50,5
Triptofano	39,1	20,4
Acido piruvico + triptofano	63,8	45,1

12° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, istidina 0,01 mol o H_2O ml. 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	16,8	—
Acido piruvico	58,1	41,3
Istidina	14,2	0
Acido piruvico + istidina	57,8	41,0

13° Composizione delle prove; sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, arginina 0,01 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
	16,4	—
Acido piruvico	87,7	71,3
Arginina	40,0	23,6
Acido piruvico + arginina	110,0	93,6

14° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, ornitina 0,01 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	16,4	—
Acido piruvico	45,6	29,2
Ornitina	24,4	8,0
Acido piruvico + ornitina	51,5	35,1

15° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, lisina 0,01 mol o H_2O ml. 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	26,1	—
Acido piruvico	63,6	37,5
Lisina	32,3	6,2
Acido piruvico + lisina	72,9	14,8

16° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, acido aspartico 0,015 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	32,5	—
Acido piruvico	72,5	40,0
Acido aspartico	72,5	40,0
Acido piruvico + acido aspartico	126,3	93,8

17° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, acido glutamico 0,015 mol o H_2O ml 0,50:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	11,6	—
Acido piruvico	65,8	54,2
Acido glutamico	31,0	19,4
Acido piruvico + acido glutamico	101,3	89,7

18° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, prolina 0,02 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	17,5	—
Acido piruvico	81,9	64,4
Prolina	22,2	4,7
Acido piruvico + prolina	99,9	82,4

19° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 1; acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 0,5, ossiprolina 0,015 mol o H_2O ml 0,5:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2
—	27,1	—
Acido piruvico	70,3	43,2
Ossiprolina	23,2	0
Acido piruvico + ossiprolina	70,9	43,8

B) L'azoto aminico durante l'ossidazione dell'acido piruvico in presenza di glicina, cistina, acido aspartico, acido glutamico, prolina.

1° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 2, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 1, cistina 0,01 mol o H_2O ml 1.

A 37° per 150':

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2	N aminico in mg. inizio	N aminico in mg. fine
—	21,3	—	—	—
Acido piruvico	61,3	40,0	—	—
Cistina	20,8	0	0,28	0,28
Acido piruvico + cistina	79,6	58,3	0,28	0

2° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 2, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 1, acido aspartico 0,015 mol o H_2O ml 1.

A 37° per 150':

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2	N aminico in mg. inizio	N aminico in mg. fine
—	18,5	—	—	—
Acido piruvico	59,9	41,4	—	—
Acido aspartico	69,3	50,8	0,21	0,21
Acido piruvico + acido aspartico	150,2	131,7	0,21	0

3° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 2, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 1, acido glutamico 0,015 mol o H_2O ml 1.

A 37° per 150':

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2	N aminico in mg. inizio	N aminico in mg. fine
—	20,2	—	—	—
Acido piruvico	60,2	40,0	—	—
Acido glutamico	28,2	8,0	0,20	0,20
Acido piruvico + acido glutamico	95,0	74,8	0,20	0,11

4° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 2, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 1, prolina 0,04 mol o H_2O ml 1.

A 37°, per 150′:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2	N aminico in mg. inizio	N aminico in mg. fine
—	10,8	—	—	—
Acido piruvico	47,2	36,4	—	—
Prolina	14,9	4,1	0,56	0,56
Acido piruvico + prolina	70,2	59,4	0,56	0,24

5° Composizione delle prove: sospensione batterica ml 2, acido piruvico 0,04 mol o H_2O ml 1, glicina 0,02 o H_2O ml. 1.

A 37°, per 150′:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2	N aminico in mg. inizio	N aminico in mg. fine
—	16,5	—	—	—
Acido piruvico	58,3	41,8	—	—
Glicina	18,2	1,7	0:28	0,28
Acido piruvico + glicina	72,1	55,6	0,28	0,22

C) L'azoto aminico durante la respirazione dell'Escherichia Coli, in presenza di α–alanina, arginina, ornitina, lisina, triptofano.

Composizione delle prove: sospensione batterica ml 2, alanina 0,02 mol o arginina 0,01 mol o ornitina 0,01 mol o lisina 0,01 mol triptofano 0,01 mol o H_2O mol 1.

A 37°, per 150′:

Sostanze aggiunte	QO_2	ΔQO_2	N aminico in mg. inizio	N aminico in mg. fine
—	30,6	—	—	—
α–alanina	47,4	16,8	0,28	0,28
Arginina	42,3	11,6	0,14	0,14
Ornitina	37,9	7,3	0,14	0,14
Lisina	37,0	6,4	0,28	0,28
Triptofano	44,2	13,6	0,14	0,14

Chimica (Chimica Biologica). — *Sulla glicolisi nel cervello*(*). Nota di CAMILLO LENTI, presentata(**) dal Socio A. HERLITZKA.

Indagini condotte già da tempo da Mazza e Malaguzzi Valeri (1) hanno fatto stabilire che è possibile ottenere dal cervello estratti, che formano, in assenza di ossigeno, acido lattico dal glicogeno o dall'acido fruttofuranoso–1, 6–difosforico e che la reazione procede attraverso la formazione di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica della Università di Torino.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.
(1) F. P. MAZZA e C. MALAGUZZI-VALERI, « Arch. Sc. Biol. », *21*, 443 (1935).

esteri triosofosforici analogamente a quanto avviene nella glicolisi del muscolo e del lievito. Successivamente, l'avvenimento di una glicolisi fosforica nel tessuto nervoso ha ampia conferma, in particolare, dalle ricerche di von Euler, Günther e Vestin [2], Meyerhof [3], Ciaccio e Caprì [4], Banga, Ochoa e Peters [5], MacFarlene e Weil Malherbe [6], Ochoa [7], Mitolo [8], Klein [9], Utter, Wood e Reiner [10], Racker e Krimsky [11]. Rimane tuttavia ancora aperta la questione, posta dai risultati di numerose indagini, se nel cervello esiste, accanto alla glicolisi fosforica, una via di demolizione dei glicidi, che non passi per i processi di fosforilizzazione. Mazza e Lenti [12], invero, trovano che il cervello, dal quale si è allontanato mediante estrazione con liquido di Ringer il sistema enzimatico della glicolisi fosforica, conserva una parte notevole della sua attività glicolitica sul glucoso, non attacca glicogeno, acido glucopiranoso 1–fosforico, acido glucopiranoso-6–fosforico, acido glucofuranoso-6 fosforico ed acido fruttofuranoso–1, 6–difosforico, non produce dal glucoso acido glucopiranoso–1–fosforico, acido glucopiranoso–6–fosforico, acido fruttofuranoso–6–fosforico, acido fruttofuranoso–1, 6–difosforico, esteri triosofosforici, non assume PO_4''' dal mezzo esterno per esterificarli, non attiva glicogeno ed acido glucopiranoso–6-fosforico, in modo da farli fungere da donatori di idrogeno al bleu di metilene. Lenti e Fuortes [13] in ricerche sul tessuto nervoso estratto, le cui strutture cellulari sono demolite mediante congelamento con aria liquida seguìto da scongelamento, osservano una perdita dell'attività glicolitica, anche se si aggiunge cozimasi, acido adenilico, glutatione e Mg^{++}, a differenza di quanto avviene per il lievito e per il muscolo. Più di recente, inoltre Lenti e Bargoni [14] stabiliscono che la glicolisi nel cervello estratto si svolge indipendentemente dalla presenza della cozimasi. Finalmente Lenti [15] dimostra nella glicolisi afosforica del tessuto nervoso estratto la formazione di acido piruvico, attraverso il quale può forse avvenire la congiunzione dei due processi glicolitici fosforico ed afosforico prima che il chetoacido sia trasformato in acido lattico.

In questa Nota è portato un ulteriore contributo alla dimostrazione dell'impossibilità del cervello estratto a demolire il glucoso attraverso reazioni analoghe a quelle osservate nel muscolo e nel lievito.

(2) Von H. Euler, G. Gunther e G. T. Vestin, « Z. physiol. Chem. », *240*, 265 (1936).
(3) O. Meyerhof, « Bull. Soc. Chim. Biol. », *20*, 1335 (1938).
(4) C. Ciaccio e A. Caprì, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *13*, 1062, 1063, 1066, 1069 (1938).
(5) I. Banga, S. Ochoa e R. A. Peters, « Biochem. J. », *33*, 1980 (1939).
(6) M. G. MacFarlene e H. Weil-Malherbe, « Biochem. J. », *35*, 1 (1941).
(7) S. Ochoa, « J. Biol. Chem. », *141*, 245 (1941).
(8) M. Mitolo, « Arch. Fisiol. », *42*, 1 (1942).
(9) J. R. Klein, « J. Biol. Chem. », *153*, 295 (1944).
(10) M. F. Utter, H. G. Wood e J. M. Reiner, « J. Biol. Chem. », *161*, 197 (1945).
(11) E. Racker e I. Krimsky, « J. Biol. Chem. », *161*, 453 (1945).
(12) F. P. Mazza e C. Lenti, « Arch. Sc. Biol. », *24*, 203 (1938); *25*, 447 (1939); *28* (1942).
(13) C. Lenti e M. Fuortes, « Atti Acc. Sc. Torino », *73*, 228 (1937–1938).
(14) C. Lenti e N. Bargoni, « Arch. Med. Sper. », *15*, 71 (1944).
(15) C. Lenti, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *20*, 530 (1945).

Reazione importante della glicolisi anossibiontica è il trasporto di un radicale fosforico dell'acido adenosintrifosforico all'esoso, catalizzato dalla fosfoferasi esocinasi, ora ottenuta allo stato puro e cristallino da Berger, Slein, Colowick e Cori [16] e da Kunitz e McDonald [17]. Ostern, Guthke e Terszakowec [18] dimostrano invero nel muscolo la reazione:

acido adenosintrifosforico + acido fruttoso–6–fosforico ⟶ acido adenosindifosforico + acido fruttoso–1, 6–difosforico.

Più recentemente, Colowick e Kalckar [19] trovano pure nel lievito che l'acido adenosintrifosforico cede un radicale fosforico al glucoso, conforme lo schema

acido adenosintrifosforico + glucoso ⟶ acido adenosindifosforico + + acido glucoso–6–fosforico.

Secondo Colowick e Price [20] la reazione di trasporto del radicale fosforico dal nucleotide al glucoso o all'acido fruttoso–6–fosforico avviene in presenza di guanina e di diidrocozimasi, che fungono da coenzimi. Infatti estratti di muscolo dializzati, contenenti acido adenosintrifosforico, del tutto inabili a fosforilizzare il glucoso, ne acquistano completamente la capacità dopo aggiunta di diidrocozimasi e di guanina. Secondo le ricerche di von Euler e Solodkowska [21], la guanina partecipa pure a processi ossidativi degli acidi nucleinici, determinati da sistemi enzimatici del sarcoma di Jensen, che si associano forse a reazioni di fosforilizzazione. Come osserva Lenti [22], anche l'ossidazione dell'acido acetilacetico nell'Escherichia coli, che si svolge quasi sicuramente attraverso reazioni di deidrogenazione accoppiate con reazioni di fosforilizzazione, è attivata dalla guanina.

Pertanto, si è ora indagato se la guanina e la diidrocozimasi siano capaci di attivare la glicolisi del tessuto nervoso, dal quale è stato allontanato il sistema glicolitico di Embden–Meyerhof mediante ripetute estrazioni con liquido di Ringer.

Come si rileva dai dati riportati nella parte sperimentale, essendo regolatore della reazione il sistema $NaHCO_3$—H_2CO_3 oppure Na_2HPO_4—KH_2PO_4, in tutte le esperienze mai il cervello estratto ha formato maggiore quantità di acido lattico da glucoso, allorchè si è aggiunta guanina e diidrocozimasi.

Anche questi esperimenti perciò concordano con quelli precedenti, confermando che la glicolisi nel tessuto nervoso estratto segue una via, nella quale le reazioni di fosforilizzazione non sembrano avere importanza.

(16) L. BERGER, M. W. SLEIN, S. P. COLOWICK e C. F. CORI, « J. Gen. Physiol. », *29*, 379 (1946).

(17) M. KUNITZ e M. R. MCDONALD, « J. Gen. Physiol. », *29*, 393 (1936).

(18) P. OSTERN, J. A. GUTHKE e J. TERSZAKOWEC, « Z. physiol. Chem. », *243*, 9 (1936).

(19) S. P. COLOWICK e H. M. KALCKAR, « J. Biol. Chem. », *137*, 789 (1941).

(20) S. P. COLOWICK e W. H. PRICE, « J. Biol. Chem. », *157*, 415 (1945); *159*, 563 (1945).

(21) Von H. EULER e W. SOLODKOWSKA, « Bull. Soc. Chim. Biol. », *29*, 382 (1947).

(22) C. LENTI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *23*, 296 (1947); « Giorn. Batt. e Immun. », *39*, 171 (1948).

Parte sperimentale. – Il cervello, prelevato da coniglio appena ucciso per dissanguamento, veniva finemente triturato in mortaio ed estratto per due volte con 5 parti di liquido di Ringer per 20 minuti. Del tessuto estratto si pesavano campioni di gr. 1 e si portavano in beute da 50 ml., munite di tappo a due rubinetti, contenenti 10 ml. di liquido di Ringer, cui era aggiunto o $NaHCO_3$ 0,03 mol. o un terzo del volume di soluzione regolatrice della reazione di fosfati mol/15 pH 7,35, ed eventualmente i substrati da cimentare (glucoso mg. 50; guanina mg. 2, diidrocozimasi mg. 0,5). Nelle prove con fosfati si faceva passare una corrente di N_2 per 15 minuti, in quelle con $NaHCO_3$ per lo stesso tempo una corrente di 95 % N_2 + 5 % CO_2. In queste ultime fungeva perciò da regolatore della reazione il sistema $NaHCO_3$—H_2CO_3, mentre il pH si aggirava fra 7,4 e 7,5. Le beute erano tenute in termostato a 37° per tre ore. Tutte le prove erano in doppio.

L'acido lattico si determinava con il metodo di Lieb e Zackerl [23], dopo deproteinizzazione secondo Schenck ed eliminazione dei glicidi mediante precipitazione cupro–calcica.

La guanina era preparata secondo il metodo di Hunter e Hlynka [24]. La deidrocozimasi era ottenuta con il metodo di Ohlmeyer [25], dalla cozimasi, preparata secondo le indicazioni di von Euler, Albers e Schlenk [26].

Ecco i risultati di tre esperienze:

	mg acido lattico totale		media mg
	I	II	
1° Composizione delle prove:			
Ringer fosfato + cervello	0,49	0,45	0,47
Ringer fosfato + cervello + glucoso	3,27	3,33	3,30
Ringer fosfato + cervello + guanina + diidrocozimasi	0,49	0,49	0,49
Ringer fosfato + cervello + guanina + diidrocozimasi + glucoso	3,30	3,22	3,26
Ringer bicarbonato + cervello	0,46	0,49	0,47
Ringer bicarbonato + cervello + glucoso	3,40	3,20	3,30
Ringer bicarbonato + cervello + guanina + + diidrocozimasi	0,50	0,49	0,49
Ringer bicarbonato + cervello + guanina + + diidrocozimasi + glucoso	3,30	3,23	3,26
2° Composizione delle prove:			
Ringer fosfato + cervello	0,52	0,58	0,55
Ringer fosfato + cervello + glucoso	2,90	3,05	2,97
Ringer fosfato + cervello + guanina + diidrocozimasi	0,45	0,60	0,52

(23) H. Lieb e M. K. Zackerl, « Z. physiol. Chem. », *211*, 211 (1932).
(24) G. Hunter e J. Hlinka, « J. Biochem. », *31*, 486 (1937).
(25) P. Ohlmeyer, « Biochem. Z. », *297*, 66 (1938).
(26) Von H. Euler, H. Albers e F. Schlenk, « Z. physiol. Chem. », *240*, 113 (1936).

	mg acido lattico totale I	mg acido lattico totale II	media mg
Ringer fosfato + cervello + guanina + diidrocozimasi + glucoso	3,00	2,98	2,99
Ringer bicarbonato + cervello	0,50	0,62	0,56
Ringer bicarbonato + cervello + glucoso .	2,86	2,98	2,92
Ringer bicarbonato + cervello + guanina + + diidrocozimasi.	0,48	0,55	0,51
Ringer bicarbonato + cervello + guanina + + diidrocozimasi + glucoso	2,96	3,06	3,01
3° Composizione delle prove:			
Ringer fosfato + cervello	0,25	0,23	0,24
Ringer fosfato + cervello + glucoso . . .	3,40	3,48	3,44
Ringer fosfato + cervello + guanina + diidrocozimasi	0,20	0,30	0,25
Ringer fosfato + cervello + guanina + diidrocozimasi + glucoso	3,38	3,52	3,45
Ringer bicarbonato + cervello	0,20	0,26	0,23
Ringer bicarbonato + cervello + glucoso	3,55	3,35	3,45
Ringer bicarbonato + cervello + guanina + + diidrocozimasi	0,18	0,32	0,25
Ringer bicarbonato + cervello + guanina + + diidrocozimasi + glucoso	3,30	3,26	3,28

Elettrochimica. — *Ricerche sui fenomeni di scarica agli elettrodi ad altissima densità di corrente* (*). Nota di GIUSEPPE BIANCHI, presentata (**) dal Socio O. SCARPA.

Allo scopo di iniziare lo studio dei fenomeni che accompagnano l'elettrolisi con densità di corrente eccezionalmente elevate, ho adottato la seguente disposizione sperimentale (fig. 1) che ha concesso di raggiungere con tensioni di poche decine di Volt densità di corrente di decine di migliaia di A/dm².

La cella elettrolitica è costituita da un recipiente di vetro A entro cui è disposto un elettrodo H costituito da una rete cilindrica di platino del diametro di 40 mm. alta 50 mm. aderente alla parete del recipiente di vetro. L'altro elettrodo K è disposto coassialmente al precedente ed è costituito da un filo di platino saldato al tubo di vetro C, sporgente per la lunghezza di 1 mm., posto di fronte al foro circolare B (del diametro di 3 mm.) prati-

*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.
(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

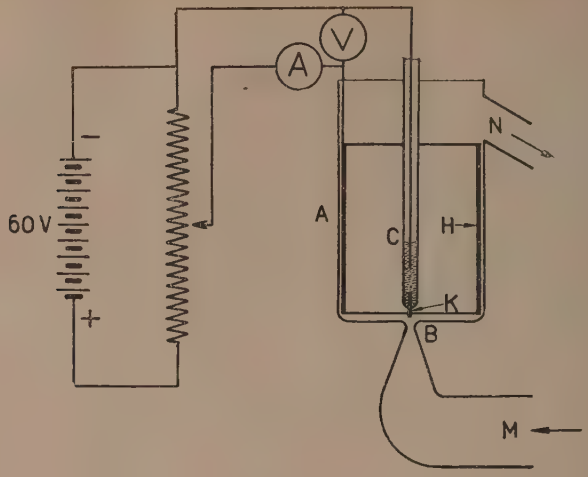

V
A
N
60 V
–
+
A
C
H
K
B
M

Fig. 1.

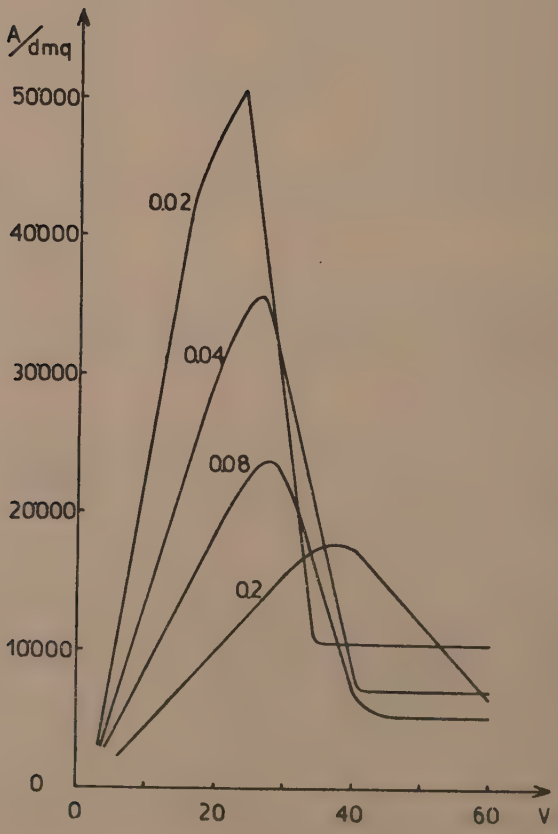

A/dmq
50000
40000
30000
20000
10000
0
0.02
0.04
0.08
0.2
0
20
40
60
V

Fig. 2.

cato nel fondo del recipiente. L'elettrodo K può così essere investito da un forte getto di elettrolita (2,38 m/sec) che arriva in pressione attraverso il tubo M e che serve ad allontanare rapidamente i prodotti dell'elettrolisi e ad asportare il calore che si sviluppa sull'elettrodo. Il circuito elettrico è costituito da una batteria di accumulatori avente la tensione di 60 V con disposizione tale da poter variare in modo continuo la tensione applicata alla cella. Nelle prove ho usato come elettrolita acido solforico normale sperimentando alla temperatura ambiente. Applicando alla cella elettrolitica

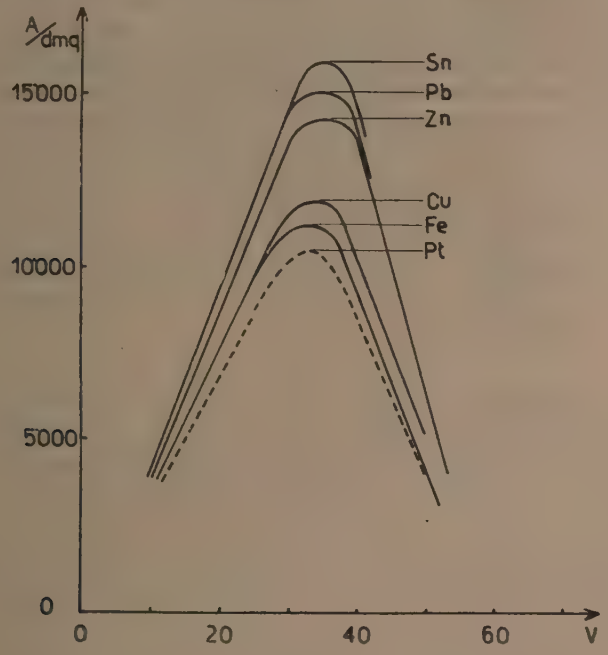


Fig. 3.

una tensione man mano crescente e leggendo, per ogni valore della tensione, il valore della corrente corrispondente, facendo funzionare il filo di platino da catodo in modo che su di esso si scaricasse dell'idrogeno, ho sperimentato con fili di platino di diametro variabile tra 0,02 mm. e 0,2 mm. Ho così rilevato per punti i diagrammi rappresentati in figura 2 riportando le tensioni applicate alla cella elettrolitica sulle ascisse e in ordinate le densità apparenti di corrente catodica calcolate in base alla superficie apparente del filo di platino. Tutti questi diagrammi mostrano l'esistenza di massimi molto pronunciati. Le esperienze vennero eseguite in modo che non si formassero sul filo di platino archi voltaici visibili in una camera oscura e che la densità di corrente sulla rete di platino fungente da anodo fosse sempre tanto piccola da rendere trascurabile l'influenza dei fenomeni anodici sull'andamento dei fenomeni.

Sperimentando con fili di platino ricoperto di nero di platino ho osservato, a parità di tensione applicata alla cella, una densità apparente di corrente superiore a quella con filo di platino non platinato (circa 1,25 volte per filo del diametro di 0,1 mm. nell'intervallo compreso tra 15 e 60 V). Scambiando le polarità della cella, ossia facendo funzionare il filo di platino da anodo e la rete di platino da catodo, i fenomeni rimasero qualitativamente inalterati (le curve relative presentano ancora un massimo); con il filo di platino del diametro di 0,02 mm. il valore massimo della densità di corrente era di 66.400 A/dm² per una tensione di 26 V (50.700 A/dm² per 23,5 V per il filo di platino di ugual diametro funzionante da catodo).

Oltre che con fili di platino di diverso diametro ho sperimentato con fili di ugual diametro di metalli diversi fissandoli ancora all'estremità di un tubetto di vetro con mastice a base di silicato. Con filo del diametro di 0,35 mm. fungente da catodo ho potuto sperimentare con ferro, rame, zinco,

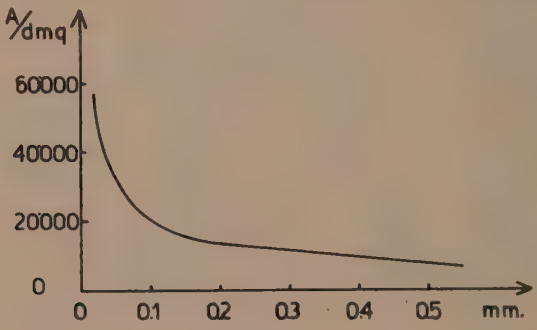


Fig. 4.

piombo e stagno ottenendo le curve della figura 3: la curva tratteggiata si riferisce ai valori interpolati da precedenti esperienze per filo di platino del diametro di 0,35 mm.

Altre esperienze sono state eseguite alimentando la cella elettrolitica con corrente alternata (42 p/sec.). Usando filo di platino del diametro di 0,02 mm., ho trovato che quando la tensione alla cella raggiungeva 10 V (valore efficace) si formava un arco voltaico tra il filo di platino e l'elettrolita, mentre con corrente continua era possibile raggiungere i 60 V senza formazione dell'arco.

Le esperienze sopraripportate dimostrano che l'elettrodo su cui avviene la scarica catodica ad elevatissima densità di corrente influisce sui fenomeni con le sue dimensioni geometriche e con la sua natura.

L'influenza del diametro del filo è resa più evidente dal diagramma di figura 4 in cui in funzione del diametro del filo di platino, è riportato il valore della densità apparente di corrente δ_{max} corrispondente al massimo delle curve della figura 2. L'aumento della densità di corrente con il diminuire del diametro D del filo di platino con legge circa iperbolica $\left(\delta_{max} = \frac{A}{D}\right)$

trova spiegazione nella considerazione dell'andamento del campo elettrico tra due elettrodi cilindrici coassiali, se si ammette l'ipotesi che la densità di corrente massima sia proporzionale al gradiente alla superficie dell'elettrodo filiforme. Il gradiente stesso è infatti inversamente proporzionale al diametro dell'elettrodo. Più interessante risulta l'influenza del materiale di cui è costituito l'elettrodo: dalla figura 3 risulta che i massimi delle curve per i vari metalli sono ordinati come i punti di fusione dei metalli stessi.

Mi riprometto di approfondire con ulteriori ricerche lo studio dei fenomeni sopra comunicati.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, che mi ha aiutato durante lo svolgimento della presente ricerca.

Petrografia. — *Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in alta Val Camonica.* – II. *Formazioni metamorfiche associate agli scisti del Tonale* (*). Nota di GIUSEPPE SCHIAVINATO, presentata (**) dal Socio A. BIANCHI.

QUARZITI E SCISTI ASSOCIATI, A NORD DELLA «LINEA DI PEIO». – Oltre agli scisti della « Serie del Tonale » di cui ho trattato in una precedente Nota (1), affiorano fra l'alta Val Camonica ed il Passo di Gavia altre formazioni metamorfiche fra le quali spiccano per importanza ed estensione quelle costituite da quarziti, paragneiss e micascisti filladici di meso-epizona che in parte corrispondono alle rocce rilevate da Hammer fra la Val Montozzo e la Valle di Peio e che da questo autore furono denominate « Gemeiner Gneis, untere Quarzite, Schiefer der Pejo Serie » (2).

Quantunque si tratti di rocce aventi una facies ed una composizione mineralogica abbastanza varie ritengo tuttavia opportuna la loro riunione sia perchè esse costituiscono una formazione metamorfica talora geologicamente bene individuata, sia perchè i passaggi dall'uno all'altro tipo sono

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche diretto dal prof. A. Bianchi.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Vedi questo periodico, ser. 8ª, vol. IV, p. 736 (1948).

(2) W. HAMMER, *Geologiche Aufnahme des Blattes Bormio-Tonale*. « Jahrb. d. Geol. » R. A., 55. (1905). W. HAMMER G. B. TRENER, *Blatt Bormio-Tonale*, Spezialkarte. Herausgegeben von der k. k. Geol. R. A. Bisogna notare che la « obere Pejo Serie » di HAMMER corrisponde ai micascisti della serie del Tonale, e le « Grauwacke » che l'autore comprende nella « untere Pejo Serie » non sono probabilmente che facies tettoniche degli stessi parascisti del Tonale. Vedi anche CORNELIUS FURLANI, *Die Insubrische Linie* ecc., p. 253 e C. ANDREATTA, *La « linea di Peio » nel massiccio dell'Ortles*. « Acta. Geol. Alpina», p. 18, Bologna 1948.

spesso frequentissimi o avvengono attraverso una serie di termini di transizione tale che una rappresentazione fedele anche in un rilevamento di dettaglio al 25.000 risulta praticamente impossibile. Caratteristica comune a tutta la formazione è la mancanza di intercalazioni di marmi, anfiboliti e pegmatiti che, come ho avuto occasione di ricordare nella precedente Nota, contraddistinguono la « serie del Tonale », o di anfiboliti che si notano nei parascisti a granato e staurolite di cui tratterò fra poco.

Le rocce in questione compaiono, nell'area cui si riferisce il mio rilevamento, sul versante sud–orientale della Valle di Viso dove vengono in contatto tettonico con gli scisti del Tonale e si sviluppano fino alla Bocchetta di Montozzo per costituire poi interamente la cresta che si spinge in direzione nord fino alla Punta di Ercavallo. Un'altro cospicuo affioramento di rocce analoghe si ha sul versante occidentale di M. Caione donde prosegue, oltre la Valle delle Messi, fino a sud di Punta Monticelli.

La facies più comune è rappresentata da una roccia grigia compatta, durissima, costituita in prevalenza da una generazione abbastanza uniforme a grana media di quarzo al quale si associa un anfibolo verde chiaro debolmente pleocroico che ritengo grünerite. Accessori normali: feldispati acidi, biotite, granato, tormalina, zoisite, magnetite, ed apatite. Frequenti sono ghiandole e vene costituite soltanto da quarzo in granuli più grossi di quello della massa principale. Lenti di quarzo latteo sono spesso visibili ad occhio nudo e raggiungono qua e là uno spessore di qualche decimetro. Le facies più ricche di mica assumono un aspetto filladico e presentano una facile divisibilità che permette di ricavarne lastre di notevoli dimensioni. Eccezionalmente la biotite diviene più abbondante tanto da essere riconoscibile ad occhio nudo e conferisce alla roccia un aspetto finemente listato. A nord dei laghetti di Montozzo le quarziti presentano in qualche punto una facies meno regolare tanto da divenire per gradi decisamente conglomeratiche.

Notevole fra le rocce considerate è un paragneiss a due miche che ho incontrato in Val Montozzo a sud della Punta di Ercavallo. Esso si fa notare per la irregolarità dei piani di scistosità che hanno un aspetto ondulato e nodulare dovuto alla presenza di xenoblasti tondeggianti di albite della grossezza di un pisello che al microscopio presentano un tipico aspetto poecilobastico per la abbondanza delle inclusioni di granato, biotite e quarzo. In questa roccia si notano incerti indizi di relitti strutturali che mi propongo di chiarire.

Alla Forcellina di Montozzo, in prossimità della zona di schiacciamento e di scorrimento che segna il limite fra gli scisti del Tonale ed i parascisti con intercalazioni di quarziti, quest'ultimi presentano pronunciati fenomeni di cataclasi o di completa triturazione che li riduce a minuto brecciame. Tutto ciò è accompagnato da una decolorazione della roccia che tende a tinte grigio–biancastre o verdoline. Nella massa chiara spiccano i piani di milonitizzazione spalmati da una sostanza diaftoritica nerastra.

Più che agli scisti del Tonale, i parascisti di meso epizona a N nella « linea di Peio » sono da ricollegarsi sia ai micascisti a granato e staurolite

coi quali sono talora intimamente associati, sia alle filladi quarzifere alle quali sono legati da una completa gamma di termini di transizione.

MICASCISTI A GRANATO E STAUROLITE. – Queste rocce costituiscono gran parte del versante meridionale del gruppo del Coleazzo dove sono sostituite, nella parte più elevata, dagli scisti della serie del Tonale, per ricomparire più a nord nella zona dei Monticelli di Somalbosco e nei due versanti dell'alta Valle delle Messi; qui fanno passaggio alle quarziti ed alle filladi. Oltre che per la composizione mineralogica esse si differenziano dagli scisti delle altre formazioni per una struttura cristallina più grossolana, una tessitura irregolarmente scistosa ed ondulata ed un colore giallo rossiccio a chiazze con caratteristici riflessi nelle superfici di scistosità alterate. Tali caratteri valgono naturalmente per le facies più tipiche, mentre anche qui si notano termini di transizione verso rocce di altre serie, in special modo verso le quarziti. Non ho creduto opportuno distinguere sulla carta queste particolarità, nè d'altra parte sarebbe stato sempre possibile data la difficoltà di cogliere sul terreno tutte le sfumature. Ho contraddistinto invece le lenti concordanti di quarzite che si differenziano nettamente dalla roccia di fondo e che sono numerose soprattutto sulle pendici sud orientali di Cima Bleis di Somalbosco.

Minerali caratteristici per questi micascisti sono il granato e la staurolite. Va rilevato però che mentre il primo è quasi sempre visibile macroscopicamente, il secondo si presenta solo di rado in cristalli ben sviluppati mentre talora è riconoscibile solo al microscopio o addirittura non compare. Micascisti ricchissimi di staurolite in prismi bruno-rossastri di qualche centimetro si notano lungo la mulattiera che da case Pradazzo sale alla baita dei Monticelli, come pure sotto la carrozzabile del Gavia a sud di baite Gaviola. Qualche esempio di alterazione di staurolite in sericite si nota nei micascisti a nord di Pezzo dove il processo di retrocessione metamorfica può portare alla sostituzione quasi completa del minerale di cui rimangono solo tracce in un minuto feltro sericitico. Sempre molto abbondante è la quantità di quarzo presente mentre i feldispati mancano del tutto o compaiono solo sporadicamente in piccoli elementi nella massa quarzosa. Fra le miche prevale di solito la muscovite sostituita qualche volta dalla flogopite, ma anche la biotite è ben rappresentata. Accessori comuni: sillimanite, ilmenite, e magnetite. La tormalina può assumere localmente una certa importanza presentandosi in prismi neri lucenti nei piani di scistosità. Ciò avviene per esempio sul versante est della Cima Bleis di Somalbosco.

Non di rado i micascisti contengono lenti o vene di quarzo latteo dello spessore massimo di qualche decimetro, ma più frequente è una intima impregnazione di questo minerale, cosicchè, soprattutto sulle pareti normali ai piani di scistosità, l'erosione incidendo maggiormente sugli altri componenti mineralogici lascia in risalto la parte quarzosa. Ad un esame superficiale o a distanza la roccia può in questo caso essere scambiata con un ortogneiss.

Ad ovest del laghetto di Monticelli sotto quota 2666 i micascisti sono lievemente rosei e tempestati di granati della grossezza di un pisello i quali sporgono dalle superfici erose dai ghiacciai.

Probabili relitti di una precedente struttura rappresentati da una netta disposizione ed orientazione di granuli di quarzo e bacchettine di ilmenite, nell'interno dei grossi cristalli di granato, in piani all'incirca normali a quelli dell'attuale scistosità, si notano in alcuni campioni raccolti sul versante occidentale di M. Caione. L'osservazione naturalmente va integrata ed estesa allo scopo di stabilire se si tratti di un fenomeno di importanza regionale. Scarse e di piccolo rilievo le deformazioni postcristalline.

I micascisti a granato e staurolite contengono intercalazioni, non troppo frequenti, di *anfiboliti* di tipo analogo a quelle contenute negli scisti della serie del Tonale. Notevole per potenza ed estensione quella che dal dosso ad est della baita di Valle Massa scende in direzione sud ovest scomparendo ripetutamente sotto la copertura morenica e riaffiorando oltre la Val Canè in corrispondenza delle case del Ponte.

Assai più cospicue sono le intercalazioni di *ortogneiss* fra le quali primeggiano quelle che costituiscono in gran parte le due creste ad occidente del laghetto dei Monticelli. La roccia piuttosto acida ed essenzialmente muscovitica ha una tessitura fortemente orientata ed è percorsa da numerosi sistemi di fessurazione. Qua e là si notano delle liste più chiare con carattere di zone aplitiche. Vene di quarzo latteo simili a quelle che impregnano gli scisti a granato e staurolite attraversano anche l'ortogneiss.

Altri ortogneiss sempre concordanti e a tessitura talora marcatamente parallela, tal'altra appena rilevabile, compaiono nella cresta settentrionale del Coleazzo. Ai tipi granitici ricchissimi di quarzo e con una sola mica muscovitica si associano qui ortogneiss a due miche, di composizione granodioritica, nei quali il componente di gran lunga più diffuso è un plagioclasio acido con fitte geminazioni e qualche deformazione postcristallina; ed infine tipi a facies gradualmente pegmatitica con cristalli di feldispato che raggiungono le dimensioni di parecchi centimetri. Più rare le facies prevalentemente ortoclasiche caratterizzate da una bella tinta rosea.

FILLADI QUARZIFERE E MICASCISTI ASSOCIATI. – Ritengo opportuno trattare insieme e contrassegnare con lo stesso colore sulla carta geologica le formazioni metamorfiche che affiorano in prevalenza nell'alta Valle delle Messi e nel triangolo: laghetti di Caione – Punta di Ercavallo – pendici meridionali di Monte delle Graole. Esse sono costituite da micascisti e paragneiss filladici, da tipiche filladi quarzifere e da termini di transizione con variazioni di tessitura e di contenuto in quarzo, che si alternano lasciando la prevalenza ora all'uno ora all'altro dei due tipi fondamentali. Caratteristica comune di questo gruppo di rocce è la relativa abbondanza di intercalazioni di ortogneiss.

I *micascisti filladici* si presentano in facies che permettono di ricollegarli a quelli che, secondo Cornelius-Furlani, si sviluppano largamente ad

ovest della nostra regione e che da questi autori furono denominati « micascisti di Val Grande ». Corrispondono pure abbastanza bene alle rocce che Hammer ha definito come « Phyllitgneis ». Essi rappresentano il tipo prevalente nelle zone sopra nominate (in special modo nella cresta ad ovest di Punta Monticelli e fra le Cime di Caione ed il Lago di Ercavallo) e si distinguono abbastanza bene sul terreno per una speciale patina rossastra di alterazione. Accanto a tipi non deformati ne esistono altri coi piani di scistosità ondulati o intensamente ripiegati. Componenti mineralogici comuni in ordine di importanza sono: quarzo, biotite, muscovite e, in misura molto subordinata, albite. Il granato può assumere talora notevole diffusione mentre qua e là compare anche la tormalina in piccoli cristalli bruni. Accessori: magnetite, apatite, titanite, zircone ed un pigmento grafitico o carbonioso.

Rocce aventi un tipico aspetto di *filladi quarzifere* si incontrano a nord delle baite di Valmalza sotto il Lago Nero. Quando non siano ricoperte da una patina bruna di alterazione, esse hanno una tinta grigio-chiara con caratteristici riflessi argentei sulle superfici di scistosità quasi sempre ondulate. Molto frequenti sono vene e ghiandole di quarzo visibili anche macroscopicamente. La struttura è filladica normale. Oltre al quarzo, abbondantissimo, ed alla mica muscovitica o biotitica in piccole lamine ordinate in sottili pellicole ho accertato in vari campioni, accanto ad accessori di minore importanza, la presenza del granato, della tormalina, e di un anfibolo verde-chiaro con i caratteri della grünerite. Nel complesso queste filladi quarzifere corrispondono a quelle che affiorano per larghi tratti più a nord nel massiccio dell'Ortles per cui rimando alla descrizione di Hammer.

Molto numerose sono le intercalazioni di *ortogneiss* in tutte le formazioni di micascisti filladici e filladi quarzifere descritte in questo capitolo. Esse sono assai poco note anzi, fatta eccezione per quella affiorante a quota 2736 del M. delle Graole che è segnata in uno schizzo di Cornelius-Furlani, tutte le altre rinvenute fra la Cima di Caione e la Punta di Ercavallo erano completamente sconosciute. Si tratta in genere di ortogneiss chiari muscovitici, raramente occhiadini. Quello a nord est di Cima Caione, per lo più in facies aplitica è in qualche punto granatifero (granulite). Anche in questo come nell'ortogneiss dei Monticelli ho notato delle vene di quarzo latteo di evidente iniezione tardiva che fungono talora da cemento in vere e proprie brecce ad elementi di ortogneiss. Notevole anche il fenomeno di venature aplitiche deformate e interrotte da piani di scorrimento completamente risanati.

MOTIVI TETTONICI E PETROTETTONICI. – La tettonica di gran parte della regione da me rilevata che, come già dissi in precedenza, si trova al limite meridionale dell'unità geologica delle Austridi superiori (Tirolidi), è stata oggetto di studio soprattutto da parte dei coniugi Cornelius-Furlani [3].

3) H. P. CORNELIUS M. FURLANI, *Die insubrische Linie von Tessin bis zum Tonalepass*. « Denkschr. d. Akad d. Wissensch. in Wien », Bd. 102 (1930).

Osservazioni integrative furono in seguito eseguite da Gb. Dal Piaz [4]. Ben poco quindi mi resterebbe da aggiungere sulle caratteristiche generali, mentre credo opportuno fare qualche rilievo relativo a fenomeni di interesse particolare e locale venuti in luce durante il mio lavoro di campagna e dalle prime indagini microscopiche.

Ho più volte accennato nelle brevi illustrazioni delle singole formazioni metamorfiche fatte in questa e nella Nota precedente a più o meno evidenti deformazioni di natura prevalentemente postcristallina rilevate al microscopio ed ho pure avuto occasione di riferirmi a fenomeni di disturbo tettonico osservati sul terreno anche a nord ed a notevole distanza dalla importante linea di dislocazione tardo-alpina del Tonale che, come è noto, segna il limite fra l'unità geologica delle Austridi e quella delle Alpi meridionali o Dinaridi. Si tratta di zone di schiacciamento e di frizione secondo superfici parallele o quasi ai piani di scistosità in corrispondenza delle quali sono particolarmente accentuati gli effetti meccanici che si traducono in deformazioni di tipo cataclastico o milonitico. Talora nelle stesse zone le rocce sono soggette ad un più pronunciato metamorfismo retrogrado che conferisce loro un tipico aspetto diaftoritico, mentre al microscopio, accanto ad una profonda milonitizzazione esse lasciano scorgere una notevole abbondanza di sostanze a granulazione finissima di neoformazione.

Fenomeni di tal genere, nella regione rilevata, hanno a volte un carattere strettamente locale e vanno considerati come normali manifestazioni accessorie della linea di dislocazione principale, ma in qualche caso rivestono maggiore importanza e su questi credo opportuno richiamare fin d'ora l'attenzione.

Il rinvenimento di una zona a scisti milonitizzati sul fianco sinistro della Valle di Pezzo aveva indotto Gb. Dal Piaz a considerare la probabilità che essa potesse rappresentare la prosecuzione occidentale della « linea di Peio », che C. Andreatta [5] aveva precedentemente seguìto per una estensione di alcune decine di chilometri dalla bassa Val d'Ultimo alla Forcellina di Montozzo. Durante il mio rilevamento non solo ho potuto confermare pienamente tale ipotesi osservando in numerosi luoghi lungo il versante meridionale della Valle di Viso la effettiva continuità dei piani di scorrimento dalla Forcellina di Montozzo alla Valle di Pezzo, ma ho potuto anche accertare che la linea suddetta si prolunga in direzione W-SW almeno fino al limite occidentale della regione da me percorsa. Ad ovest di Zuanno, a nord di Villa d'Allegno ed a sud di Canè i fenomeni sopra accennati si ripetono in evidente allineamento nelle zone di affioramento degli scisti dalla copertura morenica. La « linea di Peio » sarebbe così prolungata di circa 12 Km. verso occidente.

(4) A. Bianchi-Gb. Dal Piaz, *Il settore nord-occidentale del massiccio dell'Adamello*. « Boll. Uff. Geol. Ital. », vol. LXV (1940).

(5) C. Andreatta, *I giacimenti ferriferi della Regione Boai Comasine in Val di Peio*. « La Ricerca Scient. », X, n. 6 (1939). Un più completo studio dell'importante linea di dislocazione, in gran parte da lui scoperta, si trova nel recentissimo lavoro dello stesso Autore: *La « linea di Peio » nel massiccio dell'Ortles*. « Acta Geol. Alpina », Bologna 1948.

Il passaggio dagli scisti del Tonale ai paragneiss e micascisti con intercalazioni quarzitiche nella parte orientale, ed ai micascisti a granato e staurolite nella parte occidentale della regione cui si riferisce il mio rilevamento è quindi contrasegnata da una serie continua di piani di scorrimento e di triturazione che fanno pensare ad un contatto tettonico fra la prima e le altre formazioni metamorfiche. Per il carattere essenzialmente distruttivo dei fenomeni dai quali è accompagnato (miloniti, retrocessioni metamorfiche, cataclasi ed altre manifestazioni tipiche di epizona) lo scorrimento avvenuto in corrispondenza della « linea di Peio » come pure quelli analoghi, benchè rivelati da deformazioni meno vistose, osservati alla Bocchetta di Valle Massa e a nord di Cima Caione, sono certamente riferibili a fasi dell'orogenesi alpina.

Ad una precedente fase dinamica, ercinica o preercinica, e ad un metamorfismo di zona più profonda (meso o catazona) sono invece imputabili l'attuale scistosità, le pieghe e le deformazioni paracristalline che ho potuto riscontrare, in alcune rocce della zona rilevata, mediante l'indagine microscopica. Per quanto ancora sommaria ed estesa ad un numero relativamente limitato di sezioni, questa ha messo in luce anche la probabile esistenza di relitti di una precedente struttura con una scistosità discordante rispetto a quella attuale. Almeno tre sarebbero perciò le azioni dinamiche alle quali sono state sottoposte le rocce affioranti nella regione a sud del Passo di Gavia: due di zona profonda, prealpine, ed una alpina di epizona.

Nuove osservazioni di campagna ed accurate indagini di laboratorio potranno fare maggior luce su questi e su altri problemi già prospettati ed emersi dal lavoro di rilevamento e dagli studi petrografici preliminari da me compiuti, e che mi riservo di approfondire, poichè la struttura e la storia geologica di questa regione così complessa ed interessante richiedono l'ausilio di precisi dati quali solo profonde indagini di carattere petrotettonico possono offrire.

Paleontologia. — *Una nuova forma werfeniana del Cadore: «Myophoria costata Zenk. n. var. ognibeni»* (*). Nota di PIERO LEONARDI, presentata (**) dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

Nel corso di un rilevamento geologico della zona di M. Rusiana presso Auronzo (1), il dott. Gino Ogniben rinvenne numerose impronte di lamellibranchi in un affioramento di Strati di Werfen.

L'affioramento in questione, tettonicamente isolato, è costituito da arenarie micacee grigie e pochi calcari giallicci ricchi di fossili, ed è situato sul versante sudoccidentale del citato M. Rusiana, a poca distanza dalla

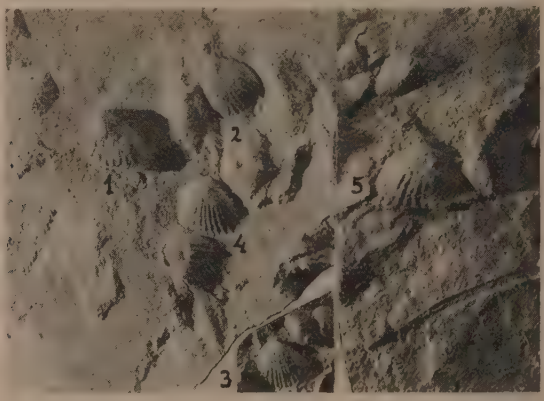
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) Eseguito per incarico del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

località chiamata Piazza Foletto (Tavoletta I. G. M. Auronzo) in direzione WSW sopra la testata della Valle Lagoverde.

La maggior parte delle impronte raccolte dal dott. Ogniben è certamente riferibile alla forma tipica di *Myophoria costata* Zenk. [2]. Ma ve ne sono alcune che, pur appartenendo con ogni probabilità alla stessa specie, si distinguono dalla forma tipica perchè la parte anteriore delle valve, per l'estensione di poco più di un quarto della lunghezza, non è ornata dalle coste radiali angolose che sono caratteristiche di questa specie. Per questo carattere la forma di M. Rusiana è affine alla var. *tommasii* Leonardi della Carnia [3], ma si



Lamellibranchi werfeniani del M. Rusiana (Cadore).

1–3. *Myophoria costata* Zenk. forma tipica, valve sinistre; 4. *Myophoria costata* Zenk. n. var. *ognibeni*, valva sinistra, *olotipo*; 5. *M. costata ognibeni*, valva destra, *paratipo*. Tutti gli esemplari leggermente impiccioliti. Fotogr. G. Barbiero.

distingue anche da questa per il numero assai maggiore delle coste radiali angolose che ornano la parte rimanente delle valve.

Infatti nella varietà citata vi sono soltanto cinque o sei coste, mentre nella forma di M. Rusiana queste sono in numero di dodici.

Ritengo pertanto si tratti di una nuova forma, per la quale propongo il nome di *Myophoria costata* Zenk. n. var. *ognibeni*, dedicandola al dott. Gino Ogniben, che rinvenne gli esemplari e me li favorì gentilmente in istudio.

Dimensioni del tipo

Altezza	mm.	10,5
Lunghezza	mm.	11.5+ [4]

(2) G. v. ARTHABER, *Lethaea geognostica*, II Teil, *Das Mesozoicum*, *I*, *Trias*, Atlas, Tav. 5, fig. 10; Tav. 34, fig. 11.

(3) P. LEONARDI, *Il Trias inferiore delle Venezie*. «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», vol. XI, p. 47, Tav. II, fig. 4 (1935).

(4) Non è possibile misurare esattamente la lunghezza completa nell'esemplare tipo essendo l'estremità posteriore mascherata dalla roccia. Si può presumere che tale dimensione raggiungesse almeno mm. 13.

BIBLIOGRAFIA.

ARTHABER G. v., *Lethaea geognostica*, II Teil, *Mesozoicum*, I Bd., *Trias*, 3Abt, *Die Alpine Trias des Mediterran – Gebietes*, Stuttgart, 1905.

CASTIGLIONI–LEONARDI–MERLA–ZENARI, *Carta Geologica delle Tre Venezie – Foglio Pieve di Cadore*, Padova 1940.

DIENER C., *Leitfossilien der Trias – Wirbellose Tiere und Kalkalgen* in: GÜRICH, *Leitfossilien*, Berlin, 1925.

DIENER C., *Fossilium catalogus*, I, *Animalia*, Pars 19, *Lamellibranchiata triadica*, Berlin 1923.

FRECH F., *Neue Zweischaler und Brachiopoden aus der Bakonier Trias*. « Res. d. wiss. Erf. d. Balatonsees », I Bd., I th., Pal. Anh.. Wien, 1912.

KUTASSY A., *Fossilium catalogus*, I, *Animalia*, Pars 51, *Lamellibranchiata triadica* II, Berlin 1931.

OGILVIE GORDON M., *Geologie von Cortina d'Ampezzo und Cadore*, « Jahrb. d. Geol. Bundesanst. », vol. 84, 1934.

TOMMASI A., *La fauna del Trias inferiore nel versante meridionale delle Alpi*. « Paleontographia italica », vol. I, 1895.

WITTEMBURG P., *Beiträge zur Kenntniss der Werfener Schichten Südtirols*. « Geol. u. Pal. Abhandl. », N. F., vol. 8, « d. g. R. », vol. 12, Jena 1908.

Mineralogia. — *I costituenti minori delle antimoniti* (*). Nota di MARIO BERTOLANI, presentata (**) dal Corrisp. G. CAROBBI.

La vicinanza del raggio ionico di In^{+3} e Sb^{+3}, pur, non rappresentando una condizione sufficiente, faceva affacciare l'ipotesi di una possibile presenza dell'indio nei minerali di antimonio. Tale supposizione non era tuttavia convalidata da alcun dato sperimentale (1) in quanto nessuno aveva sottoposto ad indagine spettrochimica vera e propria detti minerali e particolarmente le antimoniti, che sono fra essi i più diffusi.

Ho preso perciò in esame 28 campioni di stibina raccolti in giacimenti diversi di differenti zone minerarie (2), ed ho effettuato altrettanti spettrogrammi con lo spettrografo Zeiss Qu 24 dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Firenze. Ho usato elettrodi di carbone purificato forniti dalla Specola Vaticana (3) ed effettuato riprese di arco di 1'30". La volatilizzazione

(*) Le ricerche spettrochimiche sono state effettuate nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Firenze; quelle ottiche e di minerosintesi nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Modena.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) G. CAROBBI nelle *Proposte per un sistema cristallochimico degli ioni* (« Atti Acc. Sc. Lett. ed Arti di Modena » [V], VII, 1947), afferma che, pur essendovi vicinanza di raggio ionico, « non vi sono dati per legare geochimicamente l'indio alla stibina ed in genere all'antimonio trivalente ».

(2) I campioni appartengono alle collezioni degli Istituti mineralogici delle Università di Modena (11), Firenze (7), Roma (3), Bologna (1). Ai Direttori di detti Istituti rivolgo sentiti ringraziamenti.

(3) I carboni usati contenevano B, come sempre accade, e tracce di Cu e Mg.

delle antimoniti richiede particolare cura, perchè, se il riscaldamento è forte e troppo rapido, il minerale, appena fonde, esce violentemente e completamente dal pozzetto scavato nel carbone; occorre perciò riscaldare moderatamente per alcuni minuti prima di accendere l'arco. I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella con indicata approssimatamente l'intensità media delle principali righe che hanno servito all'identificazione dei singoli elementi (4):

ff = *fortissima*, f = *forte*, m = *media*, d = *debole*, dd = *debolissima*, tr = *traccia spettroscopica*.

Per chiarire la presenza di alcuni costituenti minori ho ritenuto opportuno integrare le ricerche spettrografiche con quelle ottiche, ho perciò sottoposto a indagine microscopica a luce riflessa quei campioni di stibina dei quali possedevo sufficiente materiale. Macroscopicamente essi si dividono in tre tipi:

1° a grandi lamine allungate secondo *z*, come l'antimonite del Giappone;

2° a cristalli aciculari allungatissimi, assai comune e diffusa;

3° in masse microcristalline, come l'antimonite della Slesia.

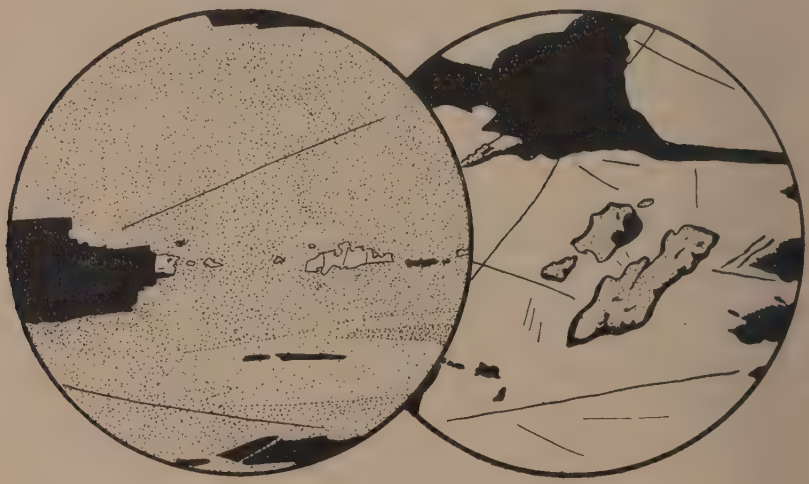
L'antimonite di Ichinokawa (Giappone), come si è detto, appartiene al primo gruppo. Al microscopio si vedono grandi lamine uniformi, non geminate, pleocroiche nei colori grigio roseo e grigio azzurrognolo, fortemente anisotrope in toni violaceo, celeste, azzurro cupo. Tali lamine sono povere di inclusioni; con l'osservazione microscopica se ne scorgono solo alcune appartenenti a minerali trasparenti.

(4) Tra le righe ultime usate per l'identificazione riporto le seguenti desunte da HARRISON (*Wavelength tables with intensities in arc, spark, or discharge tube*. New York, 1946) e LOPEZ DE AZÇONA (*Atlas de lineas ultimas con excitacion pro arco*. « Inst. Geol. y Min. de España », VIII, 1941)

Ag – 3280,68	Al – 3082,15	As – 2288,12	Ba – 4554,04	Ca – 3933,67
3382,89	3092,71	2349,84	4934,08	3968,46
	3961,53	2780,20		4226,72
		2860,45		
Cd – 3261,06	Cu – 3247,54	Fe – 2382,04	Ge – 3039,06	In – 3039,35
4799,91	3273,96	2395,62		3256,09
		2482,38		
		2483,53		
Mg – 2795,59	Mn – 2605,69	Na – 3302,32	Pb – 2833,07	P – 2535,65
2802,69	2794,82	3302,99	2802,00	
2852,13	2798,27		3683,47	
Si – 2506,90	Sn – 2839,99	Sr – 3464,57	Zn – 3302,59	
2516,12	2863,33	4607,33	3345,02	
	3034,12		4722,16	
	3175,02			
	3262,33			

Antimonite	Ag	Al	As	Ba	Ca	Cd	Cu	Fe	Ge	In	Mg	Mn	Na	P	Pb	Si	Sn	Sr	Zn
Miniera del Leccio (Pari)	f	—	d	—	ff	—	m	d	—	—	m	dd	—	—	—	ff	—	—	—
Petriolo (Siena)	f	m	d	—	ff	—	f	m	—	—	f	d	d	d	—	f	—	—	—
Scansano (Mar. Toscana)	—	d	—	—	f	—	d	d	—	—	m	dd	—	—	dd	d	—	—	—
Monte Acuto (Toscana)	d	d	dd	—	ff	—	m	m	—	—	m	m	—	—	dd	m	—	—	—
Pereta (Toscana)	ff	m	dd	—	m	—	m	m	—	—	m	dd	—	d	dd	f	—	—	—
Montagnola (Siena)	d	—	dd	—	f	—	m	m	—	—	m	d	—	—	tr	ff	—	—	—
Banditaccia di Montorsaio (Toscana)	f	m	d	m	ff	—	m	m	—	—	f	m	d	tr	d	m	—	d	—
M. Catria Cantiano (Urbino)	m	—	d	—	f	—	m	d	—	—	m	dd	—	—	d	dd	—	—	—
Usseglio (Piemonte)	m	—	m	—	f	—	m	m	—	—	m	d	—	d	f	dd	—	—	—
Scalaplana (Sardegna)	f	d	dd	—	f	—	m	m	—	—	d	d	—	—	d	d	—	—	—
Bottino (Sravezza)	f	d	dd	—	f	—	f	d	—	—	m	dd	—	—	ff	m	d	—	—
Muri Luri (Corsica)	m	d	m	—	f	—	m	m	—	—	m	dd	—	d	m	d	—	—	—
Kremnitz (Bassa Ungheria)	d	dd	d	—	d	—	dd	d	—	—	d	—	—	—	f	d	—	—	—
Kremnitz (Bassa Ungheria) var. feltriforme	m	d	d	—	f	—	m	d	—	—	m	tr	—	—	ff	d	d	—	—
Kapnik (Ungheria)	f	dd	dd	—	f	—	f	d	—	—	m	d	—	—	m	m	—	—	—
Malatzka (Alta Ungheria)	f	—	dd	—	f	—	d	m	—	—	m	m	—	dd	tr	m	—	—	—
Boemia	d	m	d	—	ff	—	m	d	—	—	m	—	—	—	—	f	—	—	—
Pölöbanya (Fossa Felsobanya) Transilvania	f	—	d	—	m	—	m	d	—	—	d	dd	—	—	m	m	—	—	—
Nagyag (Transilvania)	f	d	d	—	d	d	—	m	—	—	d	dd	—	d	m	m	—	—	f
Volfsberg (Harz)	d	—	dd	—	d	—	d	d	—	—	d	dd	—	—	m	dd	—	—	—
Bohnsdorf (Slesia)	f	d	d	—	f	—	f	m	—	—	m	d	—	d	f	d	—	—	—
Arnsberg (Prussia)	f	—	d	—	f	—	m	dd	—	—	d	d	—	—	d	d	—	—	—
Spagna	m	dd	dd	d	d	—	m	d	—	—	d	dd	—	—	tr	d	tr	—	—
Ichinokawa (Giappone)	m	dd	d	—	d	—	m	d	—	—	d	—	—	—	dd	dd	dd	—	—
Montcluçon (Francia)	m	d	dd	—	f	—	m	m	—	—	d	d	—	—	m	f	—	—	—
Queensland (Australia)	m	d	d	—	m	—	m	m	—	—	d	d	—	—	m	f	—	—	—
Siberia	f	m	d	d	ff	—	m	m	tr	dd	m	m	d	—	m	m	m	—	—
Perù	m	d	dd	f	ff	—	m	f	—	—	m	m	—	—	m	m	—	—	—

L'antimonite del M. Catria (Urbino) è invece formata da un intreccio di cristalli assai allungati (2° tipo). Al microscopio presenta normali proprietà ottiche. Tra i cristalli che si anastomizzano si formano vuoti, in parte riempiti da minerali non metallici. Caratteristiche le sezioni basali, che mostrano assai netti e regolari i contorni del prisma {hko} e del pinacoide {0.10}. Qua e là in allineamenti e fiamme, compaiono cristallini isotropi di pirite, (fig. 1–A). Raramente sono idiomorfi, si dispongono in prevalenza tra i piani di contatto di due cristalli di antimonite e, a volte, inglobano frammenti di stibina.



A Fig. 1. *B*

A: Allineamenti di pirite (bianca) nell'antimonite pleocroica (punteggiata).
B: Isole di antimonite (punteggiata) nell'antimonio nativo.
In nero i vuoti tra i cristalli.

L'antimonite di Scansano (Maremma Toscana) è anch'essa del secondo tipo molto simile alla precedente, solamente costituita da cristalli più esili. Anche le proprietà ottiche sono identiche a quelle dei campioni precedenti, ma le inclusioni sono rappresentate da minerali non metallici e da minute granulazioni giallastre attribuibili a bornite. Anche *l'antimonite di Nagyag* (Transilvania) è del secondo tipo; i cristalli sempre allungati e assai fragili sono di diverse dimensioni e racchiudono tra essi larghi vacui. Al microscopio mostrano proprietà ottiche uguali ai precedenti. Nei cristalli più grandi sono immersi noduli di pirite e minerali trasparenti; in alcuni punti s'insinuano venuzze di blenda. Qua e là, specialmente agli orli dei cristalli, l'antimonite è trasformata in ocra (stibiconite ?).

L'antimonite di Bohnsdorf (Slesia) è microcristallina, perciò del terzo tipo. Al microscopio si osserva un mosaico di cristalli equidimensionali, con le stesse proprietà ottiche dei precedenti, ma ricchi di geminazioni

polisintetiche a lamelle cuneiformi con estinzione ondulata. Oltre ad inclusi di minerali trasparenti (in prevalenza quarzo), vi sono cristallini di pirite a contorno geometrico e masserelle gialle intense, anisotrope, di calcopirite.

Da precedenti analisi chimiche erano noti come costituenti minori, Ag, As, Cu, Fe, Mn, Pb, Si (5); con le presenti ricerche ho messo in luce, oltre questi, Al, Ba, Ca, Cd, Ge, In, Mg, Na, P, Sn, Sr, Zn, con grande uniformità di distribuzione in campioni provenienti da zone disparatissime. Da notare la mancanza del bismuto, malgrado il noto isomorfismo fra antimonite e bismutinite. Le osservazioni ottiche e alcuni saggi chimici hanno però rivelato che Al, Ba, Ca, Mg, Mn, Na, P, Si, Sr sono da attribuirsi alle ganghe silicee, calcaree, ecc., che inevitabilmente restano impigliate nel complicato intreccio della cristallizzazione delle stibine. Caratteristico il comportamento del manganese, che segue regolarmente il calcio come intensità delle righe. Dalle osservazioni ottiche appare anche che Fe e Cu si manifestano sotto forma di pirite, di calcopirite o di bornite e Zn e Cd di blenda. Restano, in qualità di costituenti minori propriamente detti, Ag, As, Ge, In, Pb, Sn dato che, malgrado abbia posto la massima attenzione, non ho otticamente individuato minerali di detti elementi.

L'argento, presente in 27 campioni su 28, mostra notevoli oscillazioni nell'intensità; l'arsenico, anch'esso in 27 esemplari, è piuttosto uniforme; pure il piombo è pressochè costante, ma si rivela particolarmente scarso nelle antimoniti toscane. Lo stagno non si trova che in 5 campioni e il germanio e l'indio solo in quello siberiano e per di più con righe debolissime. La ricerca dell'indio è risultata quindi pressochè negativa; dato che, dove è presente, compare anche, con righe piuttosto intense, lo stagno. Tra i pochi minerali nei quali è segnalato l'indio in natura, figurano proprio quelli di stagno, non è quindi da escludere che l'indio sia legato a tale elemento. Infatti se la relazione fosse con l'antimonio, difficilmente il reperto resterebbe isolato, ma, come succede nelle wolframiti e nelle blende, la presenza dell'indio sarebbe assai più diffusa e costante. E per quanto riguarda lo stagno è bene ricordare che si conoscono composti di detto elemento isomorfi con altri di antimonio. Anche la presenza dell'arsenico non meraviglia, poichè note sono le possibilità di sostituzione tra i due elementi.

(5) Analisi di antimoniti con la determinazione di alcuni costituenti minori sono riportate da DOELTER (« Handbuch der Mineralchemie », IV 1, 1926); SZTOKAY *Ueber das neue Antimonglanz-Vorkommen von Kisbánya u. Borpatak* », Zentr. Min. », a. A. 1941); SERRA *Neue Beobachtungen über die minerallagenstätten in der Provinz Sassari, Sardinien.* « Sond. Abd. aus d. Zentr. Min. », a. A, 8 S, 1940); VARZINECZ *Asvanyelezesek.* « Mag. chem. fol. », XXXIX, 1933); PETUNNIKOV *Die Erze des Scwartzen Bergen bei Skoplje, Mazedonien.* « Mont. Rundsch. », XIX); DE ANGELIS D'OSSAT E MILLOSEVIC *La miniera di antimonio a Montauto di Maremma e suoi dintorni.* « Rassegna mineraria », XV, 13, Torino, 1901); DE ANGELIS D'OSSAT *Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari.* « Atti R. Acc. Lincei », Rend. V, 1902); JOHN e EICLEITER *Arbeiten aus den chemischen Labor., ecc.*, « Jarb. geol. Reiches. », XLV, 1895); KONT *Beitrag zur Kenntniss des Antimonglanzes.* « Inaug. Diss. », Freiburg, 1884); REICHARDT *Vorkommen von Scwefel Antimon bei Schleiz.* « Polytechn. Journ. », 1863).

Più interessante la presenza di Ag e Pb; in special modo di quest'ultimo metallo, classificato tra gli elementi liberi, appunto perchè con difficoltà si sostituisce isomorficamente con gli altri. Il sospetto che possa trattarsi di inclusi di galena argentifera non è certo avvalorato dai risultati spettrochimici, dato che in qualche antimonite esiste Ag senza Pb. Inoltre a luce riflessa la galena, benchè con potere riflettente molto vicino all'antimonite, non può sfuggire alla indagine microscopica per la sua isotropia nettamente in contrasto con la fortissima anisotropia della stibina e, malgrado abbia posto particolare attenzione nella ricerca, non mi è stato possibile vedere alcuna traccia di galena nei campioni esaminati. Nemmeno con attacchi eseguiti mediante HCl sono riuscito a scoprire qualcosa. Perciò, o il minerale contenente piombo ha una struttura criptocristallina non rivelabile al microscopio, o detto elemento, e così anche l'argento, riesce a penetrare nel reticolo dell'antimonite.

Per assicurarmi che, anche artificialmente, si possono ottenere antimoniti contenenti piombo, ho effettuato alcune ricerche seguendo, per la sintesi di questo minerale, i metodi enunciati da Carpanese e Ligabò [6]. A questo scopo ho preso gr. 2 di Sb_2O_3 e li ho intimamente mescolati con gr. 0,02 di PbO. La navicella con tale miscela è stata posta in un tubo di vetro infusibile lungo 50 centimetri, introdotto in forno tubolare elettrico a temperatura regolabile mediante reostato. A una estremità del tubo ho collegato, mediante tappo, un raccordo con due apparecchi di Kipp svolgenti HCl e H_2S. La temperatura nell'interno del tubo è stata portata gradualmente a 550°C in modo che non si formassero cristalli nella navicella a contatto con particelle indecomposte di PbO, ma sulle pareti del tubo all'uscita di questo dal forno. Inizialmente è stata introdotta una corrente di HCl e dopo mezz'ora quella di H_2S, cinque volte maggiore dell'altra. L'operazione è durata circa 3 ore ½ con buon risultato. Si è formato infatti un fitto intreccio di cristalli aghiformi di 1 cm.–1 cm. ½ di lunghezza e ½ mm. di larghezza. Detti cristalli, del tutto identici a quelli ottenuti e descritti da Ligabò [7], presentavano lucentezza metallica color grigio piombo brillante; alcuni mostravano patine iridescenti, non diverse del resto da quelle che si possono osservare nei cristalli naturali. Sulle pareti del tubo si sono formate anche incrostazioni costituite da un aggregato di cristalli di antimonite allungati e appiattiti, presentante verso l'interno del tubo un fitto feltro di cristallini. Verso le due estremità invece si sono depositate patine rosse, gialle e nere di tricloruro di antimonio.

L'analisi chimica di cristalli aciculari attentamente selezionati ha dato:

Sb	70,99
Pb	0,87
S	28,34
Cl	tracce
	100,20

(6) T. Carpanese, *Sulla bismutinite sintetica.* « Per. di Min. », VII, 1936. L. Ligabò, *Sull'antimonite sintetica.* « Per. di Min. », VIII, 1937.

(7) L. Ligabò, op. cit.,

Al microscopio a luce riflessa, sia i cristalli aciculari che quelli appiattiti [8], hanno mostrato, come già aveva segnalato Abbolito [9], aspetto del tutto identico a quello dei campioni naturali; pleocroismo, potere riflettente, colori di anisotropia, sono gli stessi. Anche la disposizione dei cristalli negli aggregati ricorda quella dell'antimonite naturale. Sia nelle superfici levigate che in quelle attaccate con HCl, non mi è stato possibile vedere la presenza di inclusi di altro minerale diverso dall'antimonite.

Pur non attribuendo eccessiva importanza a tali prove, è chiaro che il piombo ha la possibilità di introdursi nelle antimoniti con una certa facilità, che spiega la sua presenza quasi costante come costituente minore di questo minerale. Non altrettanto facile è dimostrare in che modo vi penetri; per l'argento, altro costituente minore a presenza costante e non rivelato da indagini ottiche, Pélabon parla di miscugli, in seguito allo studio termodinamico del sistema Ag_2S–Sb_2S_3 [10]. Sta di fatto che coi mezzi ottici a nostra disposizione non è possibile individuare inclusi e impurezze che denotino la presenza di Ag, As, Pb, costituenti minori abituali delle antimoniti, nonchè di Sn, meno comune ma non raro, mentre per il solo reperto di Ge e In non è da escludere, come si è detto, che abbia influenza la notevole quantità di stagno presente nel campione.

APPENDICE SUI COSTITUENTI MINORI DI ALCUNI CAMPIONI DI ANTIMONIO NATIVO. – Riporto i dati ottenuti dall'esame spettrochimico di tre campioni di antimonio nativo [11] effettuato contemporaneamente e con le stesse modalità di quello delle antimoniti.

ELEMENTO	LUOGO DI PROVENIENZA		
	Siberia	Spagna	Allemont (Francia)
Ag	f	m	m
Al	d	m	—
As	tr	d	f
Ca	f	ff	ff
Cu	f	f	—
Fe	m	f	m
Mg	m	f	m
Mn	d	d	f
Na	—	d	—
Pb	m	m	—
Si	f	f	d

(8) Per le operazioni di lucidatura ho agglomerato i cristalli, assai minuti e fragili, con cemento per odontoiatria. Tale sistema, già da me adottato da alcuni anni, sia per sezioni lucide che per sezioni sottili, è consigliato anche da Abbolito.

(9) E. ABBOLITO, *Studio micrografico sull'antimonite e bismutinite sintetica.* « Per. di Min. », IX, 1938.

(10) C. DOELTER, op. cit.

(11) I campioni provengono dal museo dell'Istituto di Mineralogia della Università di Modena.

I risultati ottenuti sono del tutto simili a quelli trovati nelle antimoniti. Anche qui alcuni elementi sono attribuibili a parti di ganga e si nota una sensibile uniformità di costituenti minori, malgrado i campioni provengano da zone completamente diverse.

A luce riflessa un frammento di Allemont ha mostrato, a nicols incrociati, una moderata ma netta anisotropia con colori varianti dal bruno al grigio bruno; qualche traccia di geminazione, ma, per lo più, cristalli grandi equidimensionali. Numerose le inclusioni di minerali non metallici, abbastanza frequenti anche isole di antimonite a contorno irregolare sinuoso (Figura 1–B). L'attacco con acido cloridrico non ha che rinforzato i solchi della lucidatura.

Per l'antimonio nativo occorrerebbe quindi ripetere quanto detto precedentemente per le stibine.

Biologia. — *La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris »* (*). Nota III di Teodoro Perri, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

In alcune precedenti pubblicazioni (1) mi sono occupato di numerosi casi di determinazione di arti soprannumerari ottenuti, in *Bufo vulgaris*, mediante trapianto su embrioni normali di abbozzi di organi asportati da embrioni trattati con dosi letali di raggi X, oppure (come nelle esperienze del 1946) da embrioni ibridi non vitali *Bufo viridis* ♀ × *Bufo vulgaris* ♂. Il trapianto, per lo più la parte apicale della testa, venne eseguito sul tronco di un embrione normale; e si ebbe l'induzione di arti soprannumerari unici o multipli. Sono note le ricerche del Balinsky (dal 1925) e di altri autori sull'induzione di arti soprannumerari in *Triton* mediante trapianto di otocisti o di abbozzo olfattorio. Per la bibliografia e per la tecnica rinvio al mio già citato lavoro in esteso. In *Bufo vulgaris* (2), ove se ne conosceva un sol caso, con la tecnica da me usata l'induzione avviene con notevole frequenza, e, fatto molto più interessante, con modalità alquanto diverse che in *Triton* e con risultati che permettono di approfondire varie questioni: natura degli induttori, campi morfogenetici, leggi di simmetria speculare del Bateson; onde l'utilità di continuare in queste esperienze su *Bufo vulgaris*.

Nella mia II Nota ho particolarmente insistito sull'importanza del « campo » sul risultato dell'induzione degli arti. Nella presente Nota desidero fare qualche aggiunta rispetto alla precedente, che pure tratta dei risul-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Nota I, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. III, p. 613 (1947); « Arch. Zool. Italiano », vol. XXXIII (1948); Nota II, in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. IV p. 585 (1948).

(2) Quest'anno ho avuto in *Bufo viridis*, con la stessa tecnica, un caso di determinazione di un arto soprannumerario giovane, con stilo-, zeugo- e autopodio già riconoscibili.

tati di quest'anno, avendo ora completato l'esame istologico dei casi interessanti; e sopratutto discutere l'applicazione delle leggi di simmetria speculare del Bateson a questi arti soprannumerari.

Per il meccanismo d'azione degli induttori da me usati mi limito a pochi cenni, sia perchè già ne parlai precedentemente, sia perchè ho rinviato all'anno prossimo un più approfondito esame sperimentale dell'argomento. Numerosi ricercatori dànno particolare importanza ai prodotti di scissione di sostanze proteiche nell'induzione. Questo concetto fu applicato sia per gli induttori embrionali morti; sia per l'induzione di arti soprannumerari negli Urodeli per opera particolarmente di Nassonov, Fedotov [3] ed altri. Vari ricercatori (come il Barth) dànno importanza alle sostanze citolizzanti, che provocando citolisi stimolano la formazione dell'indotto. Così Holtfreter [4] ritiene che l'induzione di placche neurali mediante sostanze chimiche, tessuti morti, ecc. sia sempre dovuta al fatto che questi induttori citolizzano cellule dell'ospite. Questi risultati richiamano le vecchie ricerche sui cosidetti necrormoni, che sono eccitatori di proliferazione cellulare, onde l'importanza loro attribuita nei processi rigenerativi. Il Weiss (secondo la citazione del Balinsky [5]) ritiene che nell'induzione degli arti soprannumerari il trapiantato determini una proliferazione cellulare, alla quale il « campo » imprime una determinata direzione di sviluppo. È evidente la fondamentale concordanza di tutte queste conclusioni.

Nel mio caso, come già scrissi, hanno certamente grande importanza il volume del trapiantato ed il suo andare distrutto spesso totalmente, a volte in grandissima parte, a seconda della dose di raggi X somministrata, pur essendo sempre dosi nettamente letali per l'intero organismo. Anche la rapidità della distruzione del trapiantato è in rapporto con la dose. È forse per questo che ebbi maggior frequenza di induzioni nei gruppi ove i donatori erano stati trattati con più forti dosi di raggi X [6].

Con gli induttori da me usati, che hanno la proprietà di andare gradualmente distrutti, si ha una continua e, per il volume del trapiantato, relativamente abbondante produzione di sostanze citolitiche, in modo da aversi uno stimolo forte e continuo; tale, come tutto lascia ritenere, da essere sufficientemente intenso anche nel momento in cui più facile è l'induzione. Il trapiantato, quando fornisce uno stimolo sufficiente, fa proliferare la zona degli arti (compresa com'è noto tra gli anteriori ed i posteriori) e così si attua ciò che la zona ha in potenza, comunque ciò si voglia interpretare, e si ha la formazione di uno o più arti soprannumerari [7].

(3) « Nature », vol. 158 (1946).

(4) « J. exper. Zool. », vol. 98 (1945).

(5) « Roux' Arch. f. Entw. mech. », vol. 130 (1933).

(6) Appare di notevole utilità, per chiarire la questione, l'individuare in *Bufo vulgaris* lo stadio preciso in cui avviene la normale determinazione degli arti, stadio che negli Anuri non è ancora sufficientemente conosciuto.

(7) In un caso di trapianto – da normale su normale – di un complesso di abbozzi comprendente l'oculare, l'olfattorio e parti vicine di encefalo, ebbi la determinazione di un

Per quanto riguarda la struttura di questi arti soprannumerari, debbo aggiungere che non solo in quelli sviluppatisi nel « campo » posteriore si ha un cinto (pelvico), ma anche in quelli del « campo » anteriore si ha un cinto (scapolare); mentre il Balinsky in *Triton* ebbe cinti pelvici e mai, con sicurezza, cinti scapolari.

Preciso che anche le articolazioni sono presenti, spesso in ottime condizioni, anche nei casi in cui tenni in vita i portatori fino ad un mese dopo la metamorfosi (in maggio–giugno). Ciò ha interesse per la questione dello sviluppo delle articolazioni, che secondo alcuni autori dipende dalla loro funzione, mentre secondo altri ne è indipendente. Per quest'ultima ipotesi depongono nettamente i miei risultati, in accordo con quanto avevano già sostenuto il Banchi (1900–1905) ed altri, e più recentemente il Muratori [8].

Applicazione delle leggi di simmetria speculare del Bateson. – Il Bateson [9] esaminando un gran numero di casi con appendici (arti, ecc.) soprannumerarie riscontrò verificarsi due leggi. La prima è che gli assi lunghi dell'appendice normale e di due soprannumerarie sono su uno stesso piano. La seconda legge è che si ha una simmetria speculare per struttura e posizione sia tra l'appendice normale e la soprannumeraria più vicina, sia tra le due soprannumerarie. L'Harrison (1921) [10] estese queste leggi ampliandone la seconda, nel senso che nei casi di appendici duplici o multiple (di cui una normale) il fatto essenziale è che due appendici adiacenti sono tra loro specularmente simmetriche. Una delle prime e più chiare verifiche è quella di P. Della Valle [11] che eseguendo in un arto anteriore destro di *Triton* una frattura e poi amputando l'arto distalmente a questa, ebbe dalla superficie prossimale della frattura un arto destro, dalla distale un arto specularmente simmetrico (cioè sinistro) e dalla superficie dell'amputazione un arto destro; egli fa dipendere il cambiamento di simmetria dall'inversione della polarità. Sono notevoli le esperienze dell'Harrison [10] che trapiantando un abbozzo di arto ebbe spesso la determinazione di un altro arto specularmente simmetrico con il precedente, specialmente nei casi di disarmonia (cioè di diversa lateralità) fra il trapiantato ed il lato del corpo ove si effettua il trapianto. Questo fatto fu riconfermato da vari autori, anche per gli Anuri (Gräper). È da tener presente (Swett) [12] che se una gemma di arto vien divisa in due metà, e l'abbozzo così diviso viene trapiantato, si ottengono due arti che hanno la stessa lateralità. Balinsky [13] nei suoi casi di determinazione di arti soprannumerari in *Triton*, osservò che gli anteriori sono di lateralità oppo-

arto molto atipico, ma certamente arto; anche qui è probabile si siano determinati fatti di citolisi, sia pure in piccola quantità.

(8) « Arch. Ital. di Anat. e di Embr. », vol. LI (1946).

(9) *Materials for the study of variation*. London (1894).

(10) « J. of exper. Zool. », vol. 32 (1921).

(11) « Boll. Soc. Naturalisti Napoli », vol. 25 (1911–1912).

(12) « J. exper. Zool. », vol. 52 (1929).

(13) « Roux' Arch. Entw. mech. », vol. 110, (1927) e vol. 130 (1933).

sta, mentre i posteriori hanno la stessa lateralità del lato del corpo su cui giacciono; ma poi trovò eccezioni che pose in rapporto con la zona ove aveva effettuato il trapianto. Il Bovet [14] osservò che nei tritoni adulti gli arti indotti con la tecnica della Locatelli (cioè recidendo lo sciatico e fissandone il moncone alla cute) sono di lato opposto a quello su cui giacciono. Il Przibram [15] esaminò dettagliatamente un grandissimo numero di casi con arti soprannumerari, specie di quelli trovati in natura, e riconfermò le leggi del Bateson.

L'Harrison nell'interpretazione della simmetria speculare, distingue la duplicazione delle parti e la simmetria; per quest'ultima che mostra anche un'influenza di una parte sull'altra, stabilisce un'analogia con i casi di *situs inversus viscerum*. In questi casi (Spemann e Falkenberg [16] ed altri) si divide parzialmente in due un uovo di *Triton* e si ottengono casi di *duplicitas anterior* in cui – è questo il fatto che più c'interessa – si hanno anche due cuori uno dei quali è invertito, sicchè si ha una simmetria speculare tra le due metà della *duplicitas*. Questi casi che andrebbero evidentemente approfonditi con la tecnica delle parabiosi, rappresentano un esempio bellissimo dell'influenza di una parte sull'altra; tanto più che è stato osservato che questa inversione dei visceri non può essere attribuita a pura casualità.

Come già dissi nei miei precedenti lavori, le leggi della simmetria speculare sono da considerarsi strettamente legate con la questione del « campo ». Ricordo che già lo Spemann trattando dello sviluppo normale dice essere risultato che la lateralità dell'arto dipende dalla struttura del « campo ». È opportuno trattarne dividendo lo spazio interposto tra gli arti normali di ciascun lato in tre zone o « campi »: dell'arto anteriore, del posteriore, e quello intermedio ai due ora detti; il quale ultimo per la forte atipicità degli indotti non presenta interesse per la specularità.

CAMPO POSTERIORE O CAMPO DEGLI ARTI POSTERIORI. – Corrisponde al terzo posteriore o poco più della distanza tra gli arti normali. È la zona in cui ebbi i risultati più tipici e sempre di arti posteriori.

Quest'anno ne ebbi vari casi; ciò che subito colpisce è che su 6 casi ben 4 sono arti duplici. Mi pare molto interessante questa tendenza alla duplicità, perchè corrisponde a quel punto delle leggi del Bateson, che dice essere gli arti soprannumerari solitamente in numero di due.

Quando ambedue gli autopodi lasciano riconoscere la loro lateralità, si osserva che essi sono tra loro in simmetria speculare; un arto è destro e l'altro è sinistro, sono cioè una coppia di arti; ed il soprannumerario più vicino al normale è specularmente simmetrico con questo. Si ha quindi la successione (per il lato destro): arto normale destro → arto soprannumerario sinistro → arto soprannumerario destro. Sono qui dunque pienamente verificate le leggi del Bateson.

(14) Citato da ABELOOS. *La régénération et les problèmes de la morphogenèse*. Paris. 1932.
(15) « Roux' Arch. Entw. mech. », vol. 48 (1921).
(16) « Arch. Entw. mech. », vol. 45 (1919).

Quando invece i due arti presentano un diverso grado di tipicità, allora il meglio conformato è stato sempre quello più vicino al normale ed è di lateralità opposta. Se poi vi è un solo arto soprannumerario, questo è parimenti di lateralità opposta al vicino arto normale. Nei due casi si ha quindi la successione: arto normale destro (rispettivamente sinistro) → arto soprannumerario sinistro (risp. destro). Adunque anche qui si sono verificate le leggi di simmetria speculare del Bateson, nei casi di appendice soprannumeraria unica.

Dove invece le leggi del Bateson non trovano almeno apparentemente applicazione, è dove si vuole che i due arti soprannumerari debbano essere anche per struttura specularmente simmetrici. Nei miei casi, come ho detto, talora lo sono, ma in altri i due arti sono invece sviluppati in modo anche molto diverso, uno dei due potendo essere persino del tutto abortivo. Occorre

Fig. 1. – *Bufo vulgaris* con una coppia di arti posteriori soprannumerari. Sono tra loro in simmetria speculare: ed il soprannumerario più caudale (che è un arto sinistro) è pure in simmetria speculare con il vicino arto normale (che è un arto destro). Disegno.

por mente che vi sono altre condizioni che possono impedire una completa estrinsecazione delle leggi del Bateson. Tra queste il fatto che man mano che ci si allontana dall'arto normale vediamo obbiettivamente diminuire la possibilità di formazione di arti tipici. È la variazione delle capacità del « campo » uno dei fattori che può impedire il verificarsi delle leggi del Bateson; sono anche da ricordare i fattori spaziali. E perciò non mi pare che questi fatti possano essere senz'altro addotti contro la validità di dette leggi.

Merita particolare menzione un caso in cui mediante trapianto nel « campo » posteriore sinistro, si formò un arto posteriore intermedio ai due posteriori normali e con il suo cinto adiacente al normale sinistro (mentre il cinto normale destro venne spostato in fuori e cefalicamente). Questo arto soprannumerario è certamente un arto posteriore destro; esso fa coppia con il normale sinistro. Ciò mostra che ha subìto l'influenza dell'arto più vicino (il sinistro), mentre il destro non ha esercitato nè subìto apprezzabile influenza. Se ne deduce che se un arto soprannumerario costituisce un « campo » (come infatti sembra che sia), questo ha una capacità inferiore a quello di un arto normale.

Campo anteriore o dell'arto anteriore. – Come già notai nella Nota II, in questo « campo », che occupa all'incirca il 3° anteriore dello spazio tra i due arti normali, gli arti ottenuti sono anteriori ma solo raramente abbastanza tipici; inoltre quando questi arti sono duplici, essi non si sono mai disposti a coppia (il che invece avviene per i posteriori: (tutto questo mi pare sia segno di minor energia del « campo » anteriore rispetto al posteriore. Per quanto riguarda la specularità, questa si è verificata ben raramente.

Come spiegare questo diverso comportamento nei riguardi della specularità tra gli arti soprannumerari anteriori e quelli posteriori ? Mi pare che la causa debba ricercarsi nella diversa intensità del « campo ». A « campo » più intenso corrisponde maggiore tipicità; tendenza a formare una coppia di arti; possibilità maggiori di realizzazione delle leggi di simmetria speculare. Per spiegare questa diversa energia tra i due « campi », debbo ricordare la concezione di Cotronei [17] sugli organizzatori embrionali; secondo la quale perchè essi estrinsichino la loro capacità, debbono prevalere sugli stimoli di altre zone tendenti ad imporre un diverso destino; nel mio caso è da considerare l'influenza delle zone cefaliche troppo più vicine agli arti anteriori che ai posteriori.

Un'osservazione necessaria per rendere più chiaro quanto sopra ho detto debbo fare sul concetto di « campo ». Ciò che noi vediamo non è il risultato del solo « campo » o del solo stimolo; bensì il risultato del complesso stimolo–campo. Usando stimoli più forti (o tali in sè stessi o tali perchè agiscono nello stadio più opportuno per ottenere un determinato effetto) si possono avere certamente risultati di più tipica induzione.

Ho lasciata per ultima la questione della duplicazione delle parti distali dell'arto, specie dell'autopodio, perchè ciò verificasi sia per il « campo » degli arti anteriori che dei posteriori. Ne ho avuti più casi. Si può spesso individuare un piano che le divida in due metà con nettissima simmetria speculare.

Concludendo. – Le leggi di simmetria speculare appaiono riconfermati più chiaramente dove il « campo » in base ad altri dati, soprattutto alla tipicità dell'indotto, appare dotato di maggiori capacità. Si può quindi affermare che anche in questi particolari arti soprannumerari le leggi del Bateson sono esatte, e che quando non si verificano ciò è dovuto all'ostacolo di altri fattori. A quest'ultima conclusione ero già arrivato nella mia Nota del 1947; le ricerche di quest'anno mi hanno permesso di individuare nelle diverse capacità del « campo » uno dei fattori principali per l'estrinsecarsi o meno delle leggi di simmetria speculare del Bateson.

(17) « Monit. Zool. Ital. », suppl. al vol. XLV, v. p. 127 (1934).

Biologia. — *Regolazioni duplicative dell'allungato in embrioni di «Rana esculenta»*[*]. Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata[**] dal Socio G. COTRONEI.

In una mia precedente Nota[1] presentata a questa Accademia e in un lavoro in corso di stampa (sull'« Arch. Ital. di Anat. e Embriol. ») riguardanti la causalità dell'orientamento delle fibre nervose, indagata sperimentalmente sulle fibre di Mauthner, avevo segnalata una enigmatica struttura provocata da un particolare intervento sperimentale. Allo scopo di impedire la decussazione di dette fibre trapiantavo nel piano sagittale mediale del presunto allungato di un embrione allo stadio di bottone codale un lembo cutaneo ventrale di un donatore allo stesso stadio (fig. 1 *a*) col proposito di separarne la metà destra dalla sinistra: ottenevo dopo 15–20 giorni dalla operazione la formazione, nella sede del trapianto, di una parete nervosa, formata da cellule e fibre, impiantata sul rafe ventrale e disposta verticalmente e sagittalmente nella stessa posizione della pelle trapiantata (fig. 1 *c* e 2 *b*), mentre di quest'ultima non se ne trovava più traccia. Così allora conclusi: « Poichè l'allungato non presenta apparenti riduzioni c'è da domandarsi se tali cellule provengano per cambiamento di destino delle cellule ectodermiche o se il frammento, con il suo lento dissolvimento, abbia destato una attività riproduttiva abnorme nella zona. Sebbene poco probabile la prima alternativa per lo stadio avanzato della operazione e senza dati quantitativi in appoggio della seconda, queste sembravano le uniche prospettabili. Le deduzioni teoriche che si potevano dedurre in base dell'uno o dell'altro procedimento erano troppo importanti per non addivenire ad uno studio più analitico che potesse chiarire la questione.

Ho pertanto ripetuto i trapianti di cute ventrale in embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale incipiente nella stessa sede e con le stesse modalità delle esperienze precedenti (17 operazioni con successo), fissando gli operati in Bouin picrico dopo 2, 5, 7, 10, 15 e 20 giorni dopo l'intervento. Le serie sezionate trasversalmente sono state in parte colorate con ematossilina ed eosina ed in parte con il metodo di Bodian al protargolo. Di alcuni esemplari è stata fatta la ricostruzione in cartone–cera secondo una mia tecnica già altrove descritta[2].

Dall'esame di questi preparati, la natura del setto nervoso neoformato è risultata ben diversa da quella sospettata con la prima supposizione e solo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) ALBERTO STEFANELLI, *L'orientamento delle fibre nervose intracentrali indagato sperimentalmente*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. IV, fasc. 1 (1948).

(2) Nella Memoria citata alla nota 8.

parzialmente si accorda con la seconda. È questa una prova, se ancora ne occorressero, che in biologia le previsioni debbono avere il solo valore di ipotesi di lavoro da sanzionarsi col dato obbiettivo sperimentale.

Nei preparati di embrioni operati da 2 giorni (fig. 1 *a*) si osserva il frammento di presunta pelle disposto verticalmente nella cavità ventricolare e

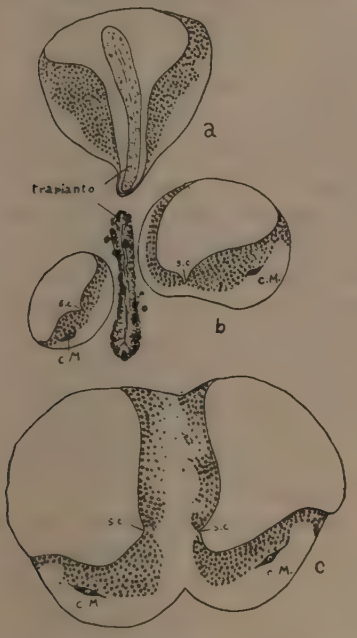


Fig. 1.

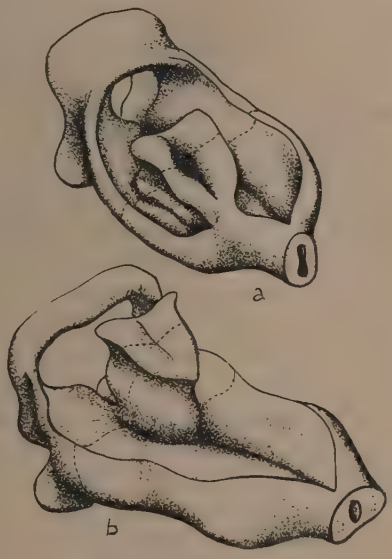


Fig. 2.

Fig. 1. – Sezioni trasverse dell'allungato di larve di *Rana esculenta* in cui è stato trapiantato allo stadio di bottone codale un lembo cutaneo nella regione dell'allungato presuntivo in posizione sagittale mediale: *a*) dopo 2 giorni dal trapianto; *b*) dopo 10 giorni; *c*) dopo 20 giorni. In *b* il trapianto è in necrosi. s. c. sulcus centralis; c. M: cellula di MAUTHNER. Le sezioni *b*) e *c*) si riferiscono agli encefali della fig. 2 in cui è indicato il piano con una linea tratteggiata.

Fig. 2. – Disegno dei modelli in cartone-cera degli allungati di *Rana esculenta* ricostruiti dalle sezioni trasverse. *a*) dopo 10 giorni dal trapianto (notare la fessura che separa i due allungati occupata dal lembo cutaneo trapiantato non riprodotto nel modello); *b*) dopo 20 giorni.

separante le due metà della vescicola cerebrale che ancora conserva la sua configurazione unitaria. Dopo 5 giorni dalla operazione già si osserva in atto quel processo che si completerà dal 7° al 10° giorno e che ci darà la spiegazione del fenomeno: le due metà simmetriche del rombencefalo separate dal trapianto si completano indipendentemente, ognuna con una propria tela corioidea, così da formare due tubi nervosi paralleli che si riuniscono anteriormente e posteriormente alla zona del trapianto (alle volte solo ad un estremo come nel caso del modello della fig. 2 *a*). Nelle larve fissate al 7° e

al 10° giorno dalla operazione i processi regolativi portano all'acquisizione per ognuna delle metà di un solco centrale (che segna il piano di simmetria bilaterale) e di una parte controlaterale più o meno estesa e completa. Nei casi osservati le due formazioni non sono di eguali dimensioni, verosimilmente a causa della sede di trapianto non perfettamente mediana.

Dopo 10–15 giorni (ma in alcuni casi anche molto prima) si osserva la graduale distruzione del frammento che presenta il caratteristico quadro dei tessuti in necrosi: formazione di masserelle melaniche, di frammenti cellulari, picnosi, ecc. (3). Nei preparati di embrioni operati dopo 15 o 20 giorni non vi è per lo più traccia del frammento cutaneo trapiantato. È proprio questa distruzione che permette la formazione di quella struttura che nelle passate esperienze mi apparve così enigmatica. Infatti con la distruzione del tessuto interposto i due allungati si accostano e si saldano in modo che le due metà neoformate (la destra del midollo di sinistra e la sinistra di quello di destra) vengono a costituire un unico setto nervoso che sembra così piantato verticalmente in un unico IV ventricolo. Conoscendo ora l'origine appare evidente la natura duplice di questa lamina nervosa. Si osservano infatti alla base della prominenza nervosa i due solchi centrali (fig. 1 *c*) che indicano il piano di simmetria bilaterale dei due allungati saldati insieme. Così appare evidente come non si debba interpretare la parte più dorsale della formazione quale volta di un unico IV ventricolo, ma come morfologicamente rappresenti le parti laterali destra e sinistra dei due allungati riuniti.

L'esame istologico dei due allungati, la cui regolazione duplice è avvenuta a causa dell'isolamento della influenza reciproca inibitoria delle intrinseche potenze duplici, ci rivela che tale regolazione morfologica è istologicamente deficente: in ogni midollo vi è infatti una sola cellula di Mauthner, solo quella del lato corrispondente al lato originario della formazione primitiva. È questo un esempio di indipendenza cronologica tra regolazione morfogenetica e regolazione istogenetica. Gli elementi più altamente specifici e con determinazione precoce, quali i neuroni di Mauthner (come ho già potuto dimostrare sperimentalmente) (4) non si riproducono e la regolazione morfogenetica si attua senza di quelli: ne consegue che la regolazione morfogenetica, che ha un periodo di attuabilità assai più lungo di quella istogenetica, è via via più deficente man mano che gli elementi nervosi vanno determinandosi dai più specifici ai meno sino a regolazioni limitate a pure modifi-

(3) Questa distruzione di pelle trapiantata omoplasticamente non deve sorprendere se si considera la sede estranea di trapianto che permette rapporti nutritivi assai scarsi con l'ospite. Inoltre, la regolazione dei trapianti in vescicole sferiche, o più o meno appiattite, con la superficie cutanea fisiologicamente esterna rivolta all'interno, provoca un accumulo di cataboliti, melanine, cellule morte, nella cavità chiusa. Che tale accumulo sia una causa della distruzione è dimostrato dalla persistenza dei trapianti anche dopo 20 giorni in quei pochi casi in cui le vescicole, pur situate profondamente, si sono messe in comunicazione con l'esterno.

(4) La prima Nota in proposito è stata annunciata nella seduta del 31 gennaio 1945 della Soc. It. di Biol. Sperim. e pubblicata nel vol. XX, 1945, del Bollettino.

cazioni plastiche, senza riproduzione di elementi nervosi, quale è la regolazione finale delle presenti esperienze che si manifesta con una semplice saldatura dei due midolli che conservano la loro duplicità morfologica. Anche le alterazioni di percorso di fibre nervose che a questo stadio ancora sono in sviluppo, per effetto della reciproca influenza dei due midolli allungati, vanno comprese in queste regolazioni più tardive.

La condizione messa in luce con queste esperienze di una neoformazione da parte delle due metà dell'allungato della rispettiva parte controlaterale si riconduce ad un fenomeno analogo da me messo in luce in frammenti di presunto allungato trapiantati in isolamento in cavità embrionali o espiantati. Già nel 1945 mettevo in evidenza in una Nota [5] come nei frammenti trapiantati si manifestassero fenomeni regolativi « costituendosi parti controlaterali e venendo ad assumere il trapianto un aspetto vescicolare con cavità omologa a quella ventricolare ». In una Nota successiva [6] facevo osservare come la regolazione del frammento a vescicola o a tubo, anzichè svilupparsi pieno, era da attribuirsi alla quantità di materiale. Una dimostrazione sperimentale di questa supposizione è stata data da una allieva (Forti) [7]. In una Memoria ed in una Nota di questa Accademia [8] ho discusso il valore di tale fenomeno regolativo nei riguardi della simmetria bilaterale del neurasse. Ricordo queste mie precedenti osservazioni sul potere intrinseco della bilateralità dei frammenti neurali (allungato), che si ricollégano alle attuali osservazioni, poichè vedo confermata la cosa in una conferenza di A. Dalcq [9] in base ad esperienze proprie e di Gallera (da lui rese note). Per quanto riguarda il raggiungimento della simmetria bilaterale anche il Dalcq crede che sia in relazione con la quantità di materiale, ma le mie esperienze non sembrano avvalorare il suo concetto della « size limitation ». Secondo questo autore « quando il numero degli elementi eccede il limite compatibile per un organo unitario, allora interviene una regolazione e si acquisisce la simmetria ». Nei miei espianti e trapianti e nelle attuali esperienze la parte simmetrica si forma, seppure a volte parzialmente, purchè ci sia un minimo di materiale che risulta essere ben inferiore al quantitativo dell'organo unitario quale è rappresentato nel nostro caso dalla metà simmetrica del rombencefalo.

(5) ALBERTO STEFANELLI, *Regolazioni e rigenerazioni nel rombencefalo di rana.* « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. XX, fasc. 3 (1945). Per la bibliografia successiva vedi la Memoria citata nella nota (8).

(6) ALBERTO STEFANELLI, *Ricerche di morfologia sperimentale sul differenziamento specifico generale e particolare delle cellule nervose.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, p. 1113 (1946).

(7) L. FORTI, *Su alcuni aspetti del differenziamento del tessuto nervoso in condizioni di espianto.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 202 (1947).

(8) ALBERTO STEFANELLI, *I problemi della determinazione istogenetica e del differenziamento dei neuroni inquadrati nel campo della embriologia sperimentale.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 673 (1947); Idem, *I fenomeni della determinazione, della regolazione e del differenziamento del tessuto nervoso.* « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, p. 23.

(9) A. DALCQ, *Recent experimental contributions to brain morphogenesis in Amphibians.* « Sixth Growth Symposium », pp. 85-119 (1947).

In conclusione, con queste esperienze ho potuto mettere in evidenza un notevole potere regolativo del rombencefalo embrionale di rana così da ottenere delle duplicazioni separando con un tessuto estraneo le due metà simmetriche di questo settore encefalico. La condizione dei due midolli morfologicamente regolati, ma istologicamente deficenti per alcuni elementi (cellule di Mauthner del lato neoregolato), dimostra un asincronismo cronologico delle proprietà regolative morfogenetiche ed istogenetiche. Questi risultati attribuiscono alle metà simmetriche bilaterali dell'allungato embrionale (allo stadio di bottone codale) una notevole attività regolativa che, con la formazione di una parte simmetrica speculare, permette l'estensione della legge di Bateson [10] sugli organi pari rigenerati al neurasse in quanto formato da due metà simmetriche e speculari.

La documentazione e la discussione di questi reperti saranno oggetto di un lavoro in esteso.

Citologia sperimentale. — *L'azione di alcuni cationi e dell'acqua sul condrioma isolato in vitro* [*]. Nota di ARTURO CERUTI, presentata [**] dal Corrisp. C. CAPPELLETTI.

La separazione del condrioma dai protalli di *Ginkgo biloba* venne eseguita in modo alquanto differente da quello usato nel precedente lavoro [1], poichè gli scopi qui ricercati sono differenti, essendo necessario ottenere una quantità di condrioma, la quale fosse costituita da elementi in istato volumetrico e di imbibizione uguale a quello che presumibilmente i medesimi presentano nel protoplasma. Allo scopo protalli vengono torchiati e si ottiene un liquido torbido per presenza di amido e di condrioma con frustuli cellulari. Questo liquido viene a lungo centrifugato sui 3500 giri. In tal modo si separano completamente l'amido, i frustuli cellulari, e una parte di condrioma che va persa per le ricerche. Il liquido soprastante è costituito da succo protoplasmatico, condrioma e frammenti protoplasmatici. Questo liquido dopo ripetute centrifugazioni viene separato e filtrato in filtri di caolino in modo da ottenere sul filtro la maggior parte del condrioma e nel filtrato i liquidi protoplasmatici [2]. Il condrioma raccolto sul filtro viene lavato con succo pro-

(10) Rimando alla Nota di T. PERRI in questo numero dei « Rendiconti » per una moderna esposizione della legge del BATESON.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Torino.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) A. CERUTI, *Clorocondrioma e cromocondrioma isolati in vitro*. Vol. I, On. prof. G. Gola, pp. 77-95; id. *Lavori di Botanica dell'Istituto Botanico di Torino*, vol. VIII, pp. 77-95 (1947).

(2) Tubetti di vetro del diametro di 3-4 mm., leggermente ristretti alla base, si chiudono con un po' di lana di vetro, mediamente compressa; si comprime sopra per un'altezza di 3 mm. caolino e si termina il filtro con due dischetti di carta da filtro impregnati di una soluzione all'1 % di collodio, in modo da ottenere una superficie perfettamente normale all'asse

toplasmatico puro, perchè qualsiasi soluzione, come vedremo in seguito, modificherebbe il suo volume [3]. Il liquido protoplasmatico puro presenta le seguenti caratteristiche: $\Delta = -1{,}36$; $P = 16{,}36$ Atm.; zuccheri esosi 1,2 % = mol. di glucosio 0,066 con $P = 1{,}9$ Atm.; zuccheri disaccaridi 1,6 % = mol. di saccarosio 0,05 con $P = 1{,}32$ Atm. La pressione osmotica data dagli esosi più quella dei disaccaridi è di appena 3,22, rimane quindi una P = 13,12 Atm. dovuta quasi completamente ai cristalloidi in minima parte ad altre sostanze.

Ogni qual volta si mette un sistema biologico di fronte a soluzioni è necessario determinare quella parte del sistema (volumetrica) che non è sensibile alle variazioni idriche (*non solvent volume*) nelle condizioni di esperimento in genere. Già fin dal 1898 Hamburger [4] aveva dimostrato la presenza di tale parte nei sistemi biologici ed aveva a tale scopo usato la formula: $\Pi_0 (V_0 - b) = \Pi (V_1 - b)$. Polanyi (1920) [5] usava invece la formula di Van der Waals.

In base alla tabella di Ursprung (Walter 1931, p. 161) [6] ho preparato due soluzioni di saccarosio, una con una pressione osmotica 16, l'altra con una pressione osmotica 22, 7, ed ho determinato la differenza di contrazione che il condrioma subisce in seguito a lavaggio prolungato nelle due soluzioni. Allo scopo, tubetti che contenevano il condrioma venivano aggiunti singolarmente delle soluzioni di cui sopra, si faceva attraversare la soluzione per aspirazione ed in seguito si determinava il volume. Risultò che il 45 % del sistema è insensibile nelle condizioni di esperimento all'attività dell'acqua: ciò risulta dalla seguente uguaglianza: $16 (133 - b) = 22{,}7 (112 - b)$; dove 133 è il volume del condrioma lavato con soluzione di zucchero a pressione osmotica 16; dove 112 è il volume del condrioma lavato con soluzione di zucchero a pressione osmotica 22,7 e b risulta = 60; se 133 possiede 60 di invariabile, 100 ne possiede 45. Riterremo questo numero fisso in tutte le nostre successive esperienze, anche se in realtà esso subisca piccole variazioni nei singoli esperimenti. Questo numero ci indica la parte invariabile del sistema, cioè quella parte costituita dalla somma volumetrica dei grassi, clorofilla, caroteni, xantofille, flavone, steridi, proteine unite a lecitine e a grassi. Poichè tale numero

del tubetto. Si aggiunge il materiale da filtrare e si filtra aspirando fortemente con una pompa ad olio. La difficoltà maggiore è quella di dar compressione esatta al caolino. La parte che rimane sul filtro è costituita quasi esclusivamente da condrioma con qualche residuo protoplasmatico, come gli esami microscopici mi hanno potuto dimostrare.

(3) Un po' di liquido di torchiatura viene filtrato attraverso una membrana di collodio, la quale non lasci passare nè il condrioma, nè frammenti protoplasmatici ma solo i liquidi e le sostanze disciolte. Con questo liquido si lava il condrioma. In tal modo si ottiene un condrioma praticamente puro, le rare impurità non possono più influenzare in modo sensibile i dati sperimentali ricercati.

(4) H. J. HAMBURGER, *Ueber den Einfluss von Salzlösungen auf das Volumtierischer Zellen.* « Arc. Anat. Physiol. », pp. 317–340 (1898).

(5) M. POLANYI, *Studien über Leitfähigkeitserniedrigung und Absorption durch lyophile Kolloide.* « Biochm. Z. », vol. 104, pp. 235–253 (1920).

(6) H. WALTER, *Die Hydratur der Pflanze.* Iena (1931).

è alquanto elevato si deve dedurre che una parte proteica non cede, non acquista acqua, non varia volumetricamente nelle condizioni di esperimento, cioè che a costituire questa frazione volumetrica viene anche interessata dell'acqua, analogamente a quanto Kunitz (1926–1927) aveva stabilito speri-

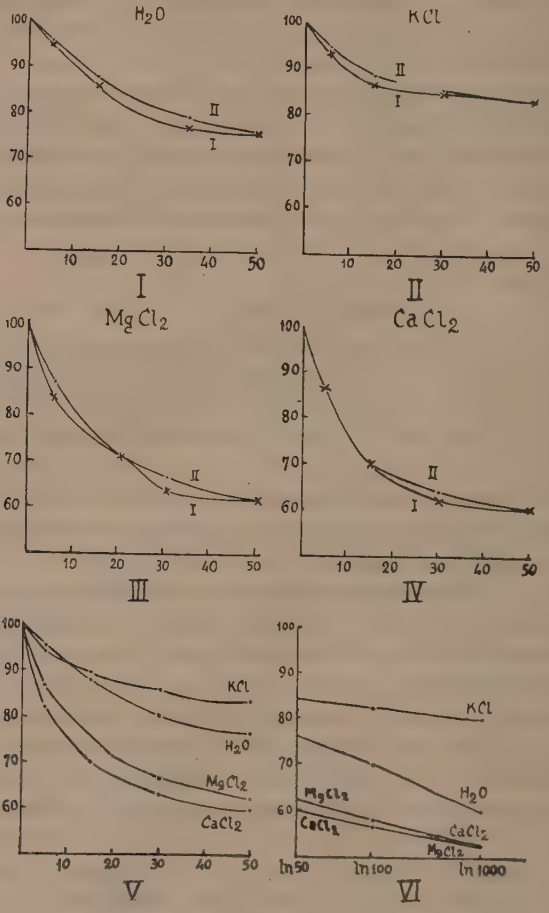


Fig. 1.

mentando su gelatine. Hamburger calcolava che il *non solvent volume* negli eritrociti è del 50–55 %.

Peso specifico del condrioma di Ginkgo biloba. In sette casi si è determinato il peso specifico del condrioma allo stato naturale dopo prolungata aspirazione (come del resto in tutte le ricerche di questo lavoro) in modo da asportare il massimo possibile di liquidi interstiziali. I risultati furono i seguenti:

Numero di osservazione	valore osservato	100 X, deviazione da G, G = 121, X-G	(X-G)	x/p
1	1,21	0	0	1,72
2	1,21	0	0	1,72
3	1,26	5	25	0,28
4	1,27	6	36	0
5	1,31	10	100	1,15
6	1,33	12	144	1,72
7	1,33	12	144	1,72

$\bar{x} = 127$; $s = 5{,}15$; $e = 1{,}94$; media $\pm$ probabile deviazione $= 127 \pm 0{,}6745\ (5{,}15) = 127 \pm \pm 3{,}47$; $V = 26{,}6 = s^2$; $V_{\bar{x}} = 3{,}81$; 50 % casi $123 \rightarrow 130{,}5$.

I dati più esatti sono evidentemente i più alti, però credo opportuno di considerare come peso specifico del condrioma di *Ginkgo* 1,27.

Azione dell'acqua distillata (Diagr. I). In 5 casi in tubetti contenenti il condrioma venne fatta passare H_2O nel solito modo per forte aspirazione e venne determinato il volume raggiunto dal condrioma dopo che passarono 5/10, 15/10, 35/10, 50/10 cc. di H_2O riportando i dati ad un volume iniziale di 100 mm^3 di condrioma. I dati furono i seguenti:

Oss.	5/10	15/10	30/10	50/10
1	92	84	71	71
2	93	85	77	76
3	96	86	78	76
4	97	87	79	78
5	97	88	80	79
media	95	86	77	76
100-X	5	14	23	24

Riportando su assi coordinati detti valori medi si ottiene la curva I. L'equazione $(a)\ y = 100\ \frac{ax}{x+b}$ in cui $a = 41{,}5$ e $b = 36{,}5$ ci dà espressa in assi cartesiani la curva II della medesima figura, quindi detta equazione

(essendo le differenze molto piccole) si considera l'equazione della curva sperimentale:

a ci indica l'asintote (= 100 — a), cioè anche se si fosse fatta filtrare una quantità infinita di acqua il volume non si sarebbe mai ridotto più del 41,5 % quindi si può affermare che teoricamente questo numero esprime l'azione massima dell'acqua su il condrioma;

a e b si calcolano facilmente sostituendo y ed x con valori sperimentali ed ancor più precisamente con il metodo dei minimi quadrati. Adunque 100 — 45 (*non solvent volume*) — 41,5 = 13,5, che esprime la riduzione massima della parte sensibile del sistema esente di *non solvent volume*; cioè, se il sistema fosse costituito solo dalla parte sensibile, la riduzione massima raggiungerebbe il 24 % il che è lo stesso che la parte sensibile in senso assoluto si ridurrebbe per attività dell'acqua distillata del 76 % del volume primitivo. L'acqua distillata determina una coartazione così notevole, in parte perchè essa agisce come solvente di proteine, in parte perchè agisce asportando cristalloidi ad azione imbibitrice delle proteine condriomali. L'acqua si può anche considerare come diluente delle soluzioni naturali che imbevono il condrioma.

Azione del KCl (Diagr. II). Tecnica come in precedenza. Soluzione al 2 % di KCl (= mol. 0,27) con P = 11 Atm. circa.

Oss.	5/10	15/10	30/10	50/10
1	91	80	79	79
2	93	85	83	82
3	94	88	86	85
4	96	90	88	86
5	96	91	88	87
media	94	87	85	84
100 X	6	13	15	16

Ricavando a e b dalla equazione a si ottiene: a = 20,3; b = 12. Adunque 100 — 45 — 20,3 = 35 riduzione massima della parte sensibile, cioè per azione di una soluzione di KCl 2 % la parte sensibile si riduce in dette condizioni del 36, 4 %. Una piccola parte di detta riduzione di volume è certamente in rapporto alla capacità solvente della soluzione KCl delle globuline. La scarsa capacità coartiva del KCl sul condrioma è certamente in relazione alla nessuna capacità del K^+ di combinarsi con le proteine, secondo le ricerche di Northrop e Kunitz (1924, 1925, 1928).

Azione del $MgCl_2$ (Diagr. III). Tecnica come in precedenza, Sol. al 2 % di $MgCl_2$ (= mol. 0,21) con P = 11 Atm. circa.

Oss.	5/10	20/10	30/10	50/10
1	80	68	60	60
2	81	70	61	61
3	85	71	63	62
4	87	73	65	63
5	87	74	66	64
media	84	71	63	62
100-X	16	29	37	38

$a = 47{,}9$, $b = 13$. Quindi $100 - 45 - 47{,}9 = 7{,}1$ = riduzione massima della parte sensibile per azione di una soluzione di $MgCl_2$ 2 %, cioè la parte sensibile si riduce in dette condizioni dell'87 %. La capacità solvente su le proteine protoplasmatiche è bassa, quindi questa forte riduzione di volume è quasi del tutto dovuta all'azione coartante del $MgCl_2$ sulle proteine del condrioma. La notevole capacità dei $Mg^{\cdot\cdot}$ di unirsi alle proteine è stata dimostrata corrispondere a 0,5 mM per gr. (v. in Greenberg: *Advances in protein chemistry*, 1944). Certamente la coartazione del condrioma è in gran parte legata a questa proprietà dei $Mg^{\cdot\cdot}$.

Azione del $CaCl_2$ (Diagr. IV). Tecnica come in precedenza. Soluzione al 2 % di $CaCl_2$ (= mol. 0,18) con P = 10 Atm. circa.

Oss.	5/10	15/10	30/10	50/10
1	78	67	60	57
2	81	68	62	58
3	83	70	63	60
4	85	72	65	62
5	86	73	67	63
media	82,5	70	63,5	60
100-X	27,5	30	36,5	40

$a = 46{,}66$, $b = 8{,}33$. Quindi $100 - 45 - 46{,}66 = 8{,}34$ = riduzione massima della parte sensibile per azione di una soluzione di $CaCl_2$ 2 %, cioè la parte sensibile si riduce dell'85 %. La capacità solvente del $CaCl_2$ come quella del $MgCl_2$ sulle proteine protoplasmatiche è minima. Perciò anche in questo caso si deve attribuire la diminuzione volumetrica quasi esclusivamente alla coartazione. La capacità del $Ca^{\cdot\cdot}$ a unirsi alle proteine è molto spiccata, essa corrisponde ad un valore di 0,9 mM per gr. (*v. l. c.*).

Conclusioni. – Poichè si è visto che l'andamento di tutte le curve sperimentali corrisponde ad una equazione del tipo (*a*) e che per i sali studiati e per l'acqua variano solo i valori di a e b, nel diagramma V si sono rappresentate graficamente le curve di tale espressione in rapporto ai sali studiati e all'acqua. Per vedere l'azione dell'acqua e dei sali, quando questi tendono ad un'azione infinita si è caratterizzato l'andamento asintotico nel diagramma VI, dove sull'asse delle x sono stati riportati i loro ln. di modo che rimangono più appariscenti le diversità tra l'azione dei singoli cationi. Esaminando il diagramma V, si nota per tutte le curve che la ripidità diminuisce con l'aumentare del valore delle x, non in modo uguale per tutte le curve ma in modo molto simile per il $MgCl_2$ e il $CaCl_2$ ed anche per il KCl, mentre diversifica notevolmente per l'H_2O. Per quantità piccole di cationi o di acqua l'azione coartante sul condrioma è molto diversa. Se calcoliamo il valore delle derivate quando l'azione dell'acqua e dei cationi è all'inizio, cioè quando il valore di x tende a zero avremo:

	H_2O	KCl	$MgCl_2$	$CaCl_2$
$\frac{a}{b}$	1,13	1,66	3,6	5.5

Donde risulta chiaro che l'azione iniziale coartante del $Ca^{\cdot\cdot}$ sul condrioma è notevolmente superiore a quella di tutti gli altri cationi ed è seguìta dal $Mg^{\cdot\cdot}$ e poi a notevole distanza dal $K^{\cdot}$. L'acqua ha un'azione iniziale molto bassa. L'azione iniziale scarsa dell'acqua è facilmente comprensibile perchè prima di poter agire ha bisogno di diluire oltre l'azione equilibratrice i liquidi impregnanti il condrioma. Ora se noi calcoliamo le derivate per i valori sperimentali di x o risultanti dall'andamento delle curve, avremo:

$\frac{a^b}{(x+b)^2}$	5/10*	15/10*	30/10*	50/10*	100/10	1000/10
H_2O	0,87	0,57	0,34	0,23	0,08	0,0014
KCl	0,84	0,33	0,13	0,063	0,02	0,0002
$MgCl_2$	1,9	0,8	0,33	0,15	0,048	0,0006
$CaCl_2$	2,2	0,71	0,26	0,11	0,033	0,0004

* Indica i valori calcolati sperimentalmente.

Dalla tabella sopra calcolata si possono trarre importanti considerazioni. Per quantità 5/10 di soluzione di sali al 2 % o di solvente H_2O l'attività coartante visibile massima è data dal $Ca^{\cdot\cdot}$ seguìto a breve distanza dal $Mg^{\cdot\cdot}$, mentre l'azione del $K^{\cdot}$ per questa quantità è già inferiore a quella dell'acqua distillata; mentre nella tabella precedente cioè per valori di sali e di H_2O tendenti a zero, la sua azione è superiore a quella dell'acqua. Per quantità 15/10 di soluzione l'attività del $Ca^{\cdot\cdot}$ e del $Mg^{\cdot\cdot}$ sul condrioma è ancora superiore a quella dell'H_2O, ma a partire dal valore 30/10 l'attività dell'acqua è sempre superiore a quella dei cationi. Donde si vede chiaramente che l'azione coartante dell'acqua è del tutto diversa da quella dei cationi, cioè l'acqua ha un andamento coartante del tutto specifico; essa infatti ha anche la proprietà di portare in soluzione alcune proteine e cristalloidi. L'attività coartante del $Ca^{\cdot\cdot}$ è più grande per piccole quantità che non per il $Mg^{\cdot\cdot}$, ma in seguito l'attività del $Mg^{\cdot\cdot}$ è leggermente superiore a quella del $Ca^{\cdot\cdot}$. Ciò è evidentemente da imputarsi ad una più rapida attività del $Ca^{\cdot\cdot}$ ad unirsi alle proteine del condrioma. Attività molto bassa è sempre dimostrata dal $K^{\cdot}$, perchè esso non ha nessuna capacità ad unirsi con le proteine del condrioma; inoltre esso è il catione più idratante. Ciò è quanto si osserva dai dati sperimentali e dal loro commento matematico. Ma in realtà non è la forza coartante intrinseca dei cationi che diminuisca aumentando la quantità del risultato della loro azione, è che il condrioma aumenta la sua resistenza man mano che il fenomeno procede, cioè il condrioma dimostra una resistenza crescente ad ogni successiva coartazione, e l'intensità della coartazione è in certo qual modo proporzionale al volume del condrioma.

Da tutti i dati e da tutte le osservazioni fatte risulta chiaro che il fenomeno della coartazione del condrioma è molto complesso intervenendo molti fattori. Non è tutta la massa del condrioma che è sensibile alla coartazione ma solo una sua parte che è circa il 55 % nelle nostre condizioni di esperimento. Sarebbe forse più opportuno dire che il 45 % non è assolutamente insensibile, ma che viene a trovarsi in un equilibrio stabile nelle condizioni di esperimento. Questo 45 % è rappresentato dai lipidi e da complessi lipo-proteici e da frazioni acquose. La parte contrattile in realtà subisce una coartazione molto più notevole di quanto non dimostri il semplice fatto sperimentale. Infatti, mentre il condrioma si riduce da 100 a 58,5 per una azione massima dell'H_2O; da 100 a 79,7 per un'azione massima del $K^{\cdot}$; da 100 a 52,11 per il $Mg^{\cdot\cdot}$; da 100 a 53,4 per il $Ca^{\cdot\cdot}$, la parte sensibile alla coartazione si riduce in realtà per l'H_2O del 76 %, per il $K^{\cdot}$ del 36,4 %, per il $Mg^{\cdot\cdot}$ dell'87 %, per il $Ca^{\cdot\cdot}$ dell'85 %. Donde è chiaro che l'azione del $K^{\cdot}$ è minima, mentre è estremamente più notevole quella dei metalli alcalino terrosi. L'azione del $Mg^{\cdot\cdot}$ e del $Ca^{\cdot\cdot}$ è molto simile per azioni molto notevoli, mentre è sensibilmente inferiore quella del $Mg^{\cdot\cdot}$ nel primo dato della gamma sperimentale, come risulta dalla tabella delle derivate. Inoltre l'andamento dell'azione dei sali, quantunque di entità diversa, ha un decorso pressochè parallelo, mentre l'andamento dell'azione dell'acqua è del tutto diverso. Il condrioma ha una tolleranza iniziale massima per l'H_2O e minima per il

Ca^{++} e i cationi agiscono in parte formando composti con le proteine, per lo meno i Ca^{++} e i Mg^{++}, ed in seguito essendo tutte le proteine reagenti bloccate il fenomeno di coartazione si estingue assai prima per questi cationi che per l'H_2O, la quale agisce con altri sistemi, sciogliendo sali che mantengono l'equilibrio naturale del volume del condrioma. In ogni modo qualsiasi aggiunta di cationi o di acqua al liquido che imbeve il condrioma viene a determinare una contrazione. Esso allo stato naturale ha il massimo volume possibile, da ciò si potrebbe anche dedurre che l'attività del condrioma è legata strettamente al suo volume. L'intensità di coartazione è legata al tipo di catione, ma anche al volume raggiunto ed è perciò in qualche modo in relazione al volume. Il risultato della coartazione nell'intervallo sperimentale è massimo per il Ca^{++} seguìto subito dal Mg^{++} e a notevole distanza dall'H_2O e dal K^{+} (diagramma V).

Citologia sperimentale. — *Prime osservazioni sulla inibizione pre-profasica della cariocinesi nei meristemi radicali*[*]. Nota di Francesco D'Amato, presentata[**] dal Socio A. Chiarugi.

Mentre nel campo zoologico sono già state studiate numerosissime sostanze capaci di impedire, talora a dosi piccolissime, l'entrata in cariocinesi dei nuclei quiescenti o in imminenza cariocinetica (veleni carioclasici o radiomimetici), nella citologia vegetale le nostre conoscenze intorno alla inibizione pre-profasica si limitavano finora ad osservazioni sporadiche e imprecise o - se condotte con rigore - non basate su opportuni dosaggi del composto studiato.

Il problema della inibizione pre profasica della cariocinesi deve, invece, impostarsi su precisi studi quantitativi che permettano di fissare, per ogni agente chimico, i valori limite del potere inibitore pre profasico nel quadro dei valori limite di tutti gli altri eventuali effetti citologici da esso indotti.

Seguendo un tale concetto, ci è stato possibile dimostrare [1] [2] [3] che tutte le sostanze da noi studiate sono capaci di indurre i fenomeni di disturbo e soppressione dell'attività fusale tipici della C mitosi in concentrazioni sempre più alte - e talora di molto - di quelle sufficienti a impedire l'entrata

(*) Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C. N. R. – Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) F. D'Amato, *The effect of colchicine and ethylene glycol on sticky chromosomes in «Allium Cepa»*. « Hereditas », *34*. 83-103, Lund (1948).

(2) F. D'Amato, *Sull'attività colchicino mitotica e su altri effetti citologici del 2.4 diclorofenossiacetato di sodio*. « Rendic. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. 8ª, *4*, 570-578 (1948).

(3) F. D'Amato, *Ricerche sull'attività citologica di alcuni composti organici con particolare riguardo alla colchicino mitosi e agli effetti tossici*. « Caryologia », *1*, 49-78, Pisa (1948).

in mitosi (valori-limite della C-mitosi più alti dei valori-limite della inibizione pre profasica). Ne deriva che la C-mitosi da esse indotta si esplica sempre in presenza di un più o meno forte effetto tossico, il quale – oltre che impedire l'entrata in mitosi dei nuclei quiescenti – impedisce il passaggio delle profasi in metafase (*accumulo profasico*) operandone la uccisione (*fissazione*) o inducendole a ritornare allo stato di quiescenza (*reversione*). Di conseguenza la C-mitosi è, ovviamente, possibile solo per quelle cellule del meristema colte dal trattamento in situazione di tarda profase, cioè al di là del periodo di sensibilità all'avvelenamento profasico.

Nei meristemi radicali, quindi, l'avvelenamento profasico rappresenta la spia più sicura della attività inibitrice pre-profasica degli agenti chimici.

In contrapposto agli inibitori pre-profasici, i tipici colchicino-mitotici (colchicina, acenaftene, derivati chinolinici, tiogamma e altri pochi) operano la C-mitosi in assenza di inibizione pre profasica non solo nei nuclei quiescenti diploidi ma – nella cellula vegetale – anche nei nuclei già poliploidizzati, con conseguente gigantismo nucleare [4]. Solo a concentrazioni elevate, e solo alcuni di essi, i tipici colchicino-mitotici possono agire da inibitori pre-profasici.

Allo scopo di recare nuove conferme a quanto sopra esposto e di contribuire ad una migliore impostazione del problema della inibizione pre-profasica, abbiamo recentemente sviluppato un nuovo metodo d'indagine, per mezzo del quale sono state conseguite le osservazioni quì riportate. Maggiori dettagli e i risultati di nuove osservazioni saranno riuniti in un lavoro attualmente in preparazione [5].

I. METODI. – Bulbi di Cipolla della comune varietà gialla vengono posti a germinare direttamente su provettoni contenenti soluzioni a diversa concentrazione dei vari composti (solvente: acqua di fonte), seguendosi attentamente l'allungamento radicale. Dopo 2 4 giorni dall'inizio dell'esperienza, vengono eseguiti controlli citologici nei bulbi che hanno presentato durante il trattamento un, sia pur minimo, allungamento dei primordi radicali e al termine dei controlli tutti i bulbi della serie vengono trasferiti su acqua di fonte, dopo aver marcato con inchiostro di china tutti i primordi radicali che avevano dato segni di allungamento nelle soluzioni. Il comportamento di questi primordi radicali e di quelli che, non avendo reagito al trattamento, iniziano il loro allungamento nell'acqua di fonte, viene seguito macroscopicamente e, in alcuni casi, controllato citologicamente.

II. RISULTATI. – In tutte le serie di esperienze con i vari composti si nota che soluzioni giacenti al di sopra della concentrazione-limite per il

(4) F. D'AMATO e M. G. AVANZI, *Reazioni di natura auxinica ed effetti rizogeni in «Allium Cepa L.». Studio cito istologico sperimentale*. «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., 55, 161 213 (1948).

(5) F. D'AMATO, *On the pre prophase inhibition of mitosis in root meristems*. «Caryologia» (in corso di pubblicazione).

potere mitoinibitore pre profasico non permettono alcuna – o solo una minima – distensione dei primordi radicali, per una evidentemente troppo tossica azione che interferisce con i normali processi distensivi delle membrane e che si dimostra letale dopo 2–3 giorni di trattamento (impossibilità di ripresa di tutti i primordi radicali, allorchè il bulbo viene riportato su acqua di fonte).

La concentrazione-limite, invece, si identifica macroscopicamente con una leggera distensione dei primordi radicali e microscopicamente con l'assenza di stadi mitotici nel meristema o con la presenza di sole poche profasi le quali, col prolungarsi del trattamento, vengono indotte alla reversione o ancora con un buon numero di mitosi in tutti gli stadi, le quali sono destinate a subire, in prosieguo di tempo, l'effetto letale del trattamento. Esperimenti di ripresa in acqua mostrano che, se il trattamento non si prolunga molto a lungo, i primordi radicali che avevano mostrato distensione riprendono – talora lentamente – l'allungamento; dopo trattamenti di più lunga durata, invece, la inibizione è permanente (effetto letale) e si accrescono solo le radici provenienti dai primordi della cerchia esterna, che non avevano dimostrato reazione distensiva nella soluzione.

Concentrazioni al di sotto del valore-limite del potere mito-inibitore, infine, permettono un normale svolgimento delle mitosi, la frequenza di queste ultime essendo sempre maggiore fino al raggiungimento dei valori normali (concentrazione inattiva). Riassumiamo qui di seguito le principali osservazioni, fatte con le sostanze finora studiate:

Cloridrato di pervitina. 0,05 mol/l : evidente ritardo della distensione (dopo 3 giorni lunghezza massima dei primordi radicali: 3 mm.), qualche rarissimo stadio di profase, metafase e anafase (5 6 per apice). Il trasferimento in acqua dopo 4 giorni impedisce la ripresa nei primordi che avevano dato segni di distensione nella soluzione;

0,02–0,01 mol/l : nessuna o scarsa influenza sui fenomeni distensivi, minore allungamento rispetto ai controlli per minor numero di mitosi svolgentisi nel meristema.

Solfato di benzedrina. 0,05 mol/l : evidente ritardo nella distensione (dopo 2 giorni primordi lunghi al massimo 2 mm.), mitosi nei vari stadi non rare, ma in presenza di spiccato effetto tossico, denunciato da intense picnosi (liquefazione a gocce della cromatina) nei nuclei quiescenti e forte agglutinazione cromosomica (effetto letale dopo 3 giorni);

0,02 0,01 mol l : leggera influenza sulla distensione, frequenza delle mitosi ancora molto bassa, ma in assenza di azioni tossiche microscopicamente rilevabili.

P-aminobenzoato di sodio. 0,03 mol l : distensione minima (1 1 1 2 mm. dopo 4 giorni). Per ripresa in acqua di fonte fuoriescono e si allungano normalmente o quasi soltanto i primordi della cerchia più esterna che non avevano affatto reagito al trattamento chimico;

0,01 mol/l : ritardo della distensione (lunghezza primordi dopo 3 giorni: 2 mm.) ; numero delle mitosi scarso, progressiva intensa distruzione

– nei giorni successivi – di intere aree del periblema secondo il tipo già noto per questa sostanza [3];

0,005–0,002 mol/l : allungamento radicale minore che nei controlli per rallentato ritmo mitotico nei meristemi e, per la soluzione 0,005 mol, ritardo della distensione.

Anestesina. 0,0024 mol/l : leggera influenza sulla distensione; nessun segno di mitosi nei meristemi; effetto tossico rilevantesi con una leggera contrazione di tutto il nucleo e la coartazione di alcune zone del reticolo nucleare (cfr. D'Amato 1947 per la CrO_3) [6]. Per trasferimento in acqua dopo 24 ore di trattamento normale ripresa dell'allungamento radicale; dopo 36 ore incapacità alla ripresa in tutti o quasi tutti i primordi che avevano reagito e normale sviluppo dei primordi della cerchia esterna;

0,0012 mol/l : come per la precedente concentrazione, ma potere mitoinibitore minore. Compiutosi il ciclo mitotico in pochi nuclei dopo circa 50 ore dall'inizio del trattamento, nessuna cellula entra più in mitosi;

0,0006 mol/l : nessun effetto.

Nicotamide. 0,2 mol/l : nessun segno di distensione. Per trasferimento in acqua dopo trattamento di tre giorni non si ha ripresa in nessun primordio radicale (effetto letale);

0,1–0,05 mol/l : scarsissima distensione. Per ripresa in acqua dopo 2 e 3 giorni nella soluzione si allungano solo i primordi che non mostrarono segni di distensione (cerchia esterna);

0,02 mol/l : continua l'influenza sulla distensione (primordi 3 mm. dopo 2 giorni); solo qualche profase nel meristema. Per ripresa in acqua si allungano normalmente sia i primordi della cerchia esterna sia quelli che reagirono e il ritmo mitotico diviene ben presto normale;

0,01 mol/l : nulla o scarsissima influenza sulla distensione (radici fino a 5 mm. dopo 2 giorni); mitosi con frequenza minore che nei controlli.

Acido 2,4-diclorofenossiacetico. 0,0002 – 0,00002 mol/l : nessun segno di distensione dopo 3 giorni; nessuna ripresa per trasferimento in acqua (effetto letale);

0,00001 mol/l : dopo 2 giorni lunghezza primordi 2 mm.; mitosi normali, ma in numero scarso; lento allungamento in seguito a ripresa in acqua dopo 3 giorni di trattamento;

0,000005 mol/l : (= 1 mgr./l) : dopo 2 giorni lunghezza primordi 3 mm.; mitosi come nel precedente trattamento; rapidissimo allungamento nel corso della ripresa in acqua ed evidente mito-stimolazione nei meristemi.

2,4-diclorofenossiacetato di sodio. 0,0005-0,00005 mol/l : dopo 4 giorni lunghezza massima primordi 1–2 mm.; assenza di stadi mitotici e impossibilità di ripresa in tutti i primordi;

0,00002 0,00001 mol/l : dopo 3 giorni lunghezza massima primordi 2 mm.; assenza di mitosi in presenza di avvelenamento nucleare tipo CrO_3;

(6) F. D'AMATO, *Studi sull'agglutinazione cromosomica* (« *stickiness* ») *in* « *Allium Cepa* » *e altre Monocotiledoni.* « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., *54*, 316-353 (1947).

0,000005 mol/l (ca. 1 mgr./l): dopo 3 giorni lunghezza primordi 3 mm.; mitosi numerosissime (mito-stimolazione ?) e normali.

Acido fenilacetico. Questo composto, pure essendo capace di indurre C-mitosi totale in alcune concentrazioni, è un tipico inibitore pre-profasico, impedendo – nelle radici in rapida crescita – l'entrata in profase dei nuclei quiescenti ad una concentrazione di circa 0,0005 mol/l (D'Amato, inedito). Negli esperimenti per diretta germinazione si è notato:

0,002 mol/l: dopo 3 giorni lunghezza massima primordi 2 mm.; nessun segno di mitosi; incapacità alla ripresa dei primordi che avevano mostrato distensione;

0,001 mol/l: dopo 3 giorni lunghezza primordi 3 mm.; qualche eccezionalissima mitosi; normale allungamento per ripresa in acqua;

0,0005 mol/l (= 68 mgr./l): dopo 3 giorni lunghezza primordi 4 mm.; mitosi in numero leggermente minore che nei controlli.

Essenza di senape F. U. In radici in rapida crescita il potere inibitore pre-profasico giace a 2 mgr./l. (D'Amato e Avanzi, inedito). Nelle presenti esperienze si è notato:

8 mgr./l: dopo 2 giorni radici lunghe fino a 7 mm.; solo profasi e profasi-metafasi, alcune delle quali in reversione; normale ripresa dell'allungamento in acqua di fonte;

4 mgr./l: dopo 2 giorni lunghezza radici fino a 10 mm.; mitosi numerose, ma meno frequenti che nei controlli.

Tiogamma. Soluzione satura: dopo 2 giorni nessuno o scarso effetto sulla distensione e C-tumori già presenti; C-mitosi totale in tutte le cellule e primi nuclei $4n$. Dopo 6 giorni: continua la C-mitosi totale e sono già presenti cellule a $8n$ e qualcuna a $16n$ cromosomi; le cellule già altamente poliploidi della porzione basale del meristema sono in avanzata parenchimatizzazione; stimolazione mitotica e C mitosi nelle cellule pericicliche;

soluzione 1/2 satura: come nella precedente, ma assenza di C-tumori; gli stessi fenomeni citologici. Dopo 4-5 giorni, per l'abbassarsi di « forza » della soluzione, lenta ripresa dell'allungamento radicale e presenza di non poche anafasi bipolari;

soluzione 1/5 satura: allungamento radicale minore che nei controlli; C mitosi parziale (fusi multipolari) di tipo reiterativo, originante cellule a molti nuclei di dimensioni assai diverse.

Colchicina. 0,03 %: gli stessi fenomeni macroscopici e citologici descritti per il tiogamma in soluzione satura, a parte una più attiva capacità poliploidizzante (C-metafasi a 64 C paia dopo 4 giorni e cellule a $32n$ cromosomi dopo 6 giorni). I fenomeni sono perfettamente paragonabili a quelli indotti nelle radici in rapida crescita da soluzioni 0,01 % [1].

III. Discussione. – I risultati finora conseguiti permettono di svolgere le seguenti considerazioni, alcune delle quali non sono ancora conclusive richiedendo nuove osservazioni e più particolareggiate analisi:

1° Il metodo d'indagine usato permette una precisa e sicura dissociazione dei due effetti essenziali che contraddistinguono l'attività mito-inibitrice degli agenti chimici: effetto mito-inibitore pre-profasico ed effetto inibitore del fuso cariocinetico o C mitotico. *È lecito supporre che*, nonostante la perfetta uniformità morfologica del fenomeno, *l'azione inibitrice esplicata sul fuso cariocinetico dai tipici C-mitotici sia diversa da quella degli inibitori pre-profasici, la quale potrebbe anche essere una azione tossica massiva.*

2° Dalla distinzione dei due effetti inibitori deriva, quindi, una più precisa impostazione dei problemi generali della mito-inibizione da una parte e della C-mitosi dall'altra. *Così l'anestesina, ritenuta come tipico C-mitotico dal Gavaudan* (7), *è, invece, un tipico inibitore pre-profasico.*

3° La inibizione pre-profasica rappresenta, – sempre tenuta nel debito conto la variabilità individuale – una tipica reazione-soglia, definita da particolari concentrazioni limite. *Essa è, entro determinati limiti di tempo, una reazione vitale di ritardo dell'entrata in cariocinesi dei nuclei quiescenti.*

4° *I valori-limite dell'effetto inibitore pre-profasico nelle esperienze per diretta germinazione sono sempre più elevati di quelli fissati per le radici in rapida crescita* (si confrontino i presenti dati con quelli dei nostri precedenti lavori (2), (3)). Alcune apparenti eccezioni riguardano composti da noi studiati in un periodo di accertata minore reattività dei bulbi agli agenti chimici (3), (4).

5° Per le sostanze di crescita è possibile dimostrare, anche con le presenti esperienze, una netta indipendenza dei fenomeni distensivi dall'intensità del processo cariocinetico; fatto già noto nella letteratura per radici in rapido sviluppo (4), (8). *Per gli altri agenti inibitori pre-profasici è generalmente evidente una, talora forte, depressione dei fenomeni distensivi, che si accompagna all'assenza e alla scarsezza delle mitosi nel meristema.*

6° È evidente una netta differenza in reattività dei primordi radicali della cerchia più esterna rispetto ai rimanenti; ciò riconferma quanto già dimostrato in trattamenti sperimentali su bulbi possedenti radici in rapida crescita (4).

(7) P. GAVAUDAN, *Pharmacodynamie de l'inhibition de la caryocinèse.* Le Francois, Paris (1947).

(8) F. M. GEROLA, *Azione antimitotica dei prodotti del metabolismo fungino.* « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. 8ª, 3, 124-129 (1947).

Biologia. — *Considerazioni sul determinismo della meiosi*[*]. Nota di GIUSEPPE MONTALENTI, presentata[**] dal Socio G. COTRONEI.

Ricerche eseguite nell'Istituto di Genetica di Napoli[1] hanno dimostrato che le grosse cellule ghiandolari con nucleo poliploide che circondano i testicoli di *Asellus aquaticus* (cellule follicolari) elaborano una secrezione assai ricca di acido ribonucleico (RN) o forse costituita da acido RN puro. Questa sostanza esce dalle cellule follicolari sotto forma di granuli che vengono immessi fra gli spermatociti in evoluzione, i quali li riassorbono. Si è potuto constatare che, durante un intero ciclo spermatogenetico, vi sono due ondate di secrezione, i cui massimi corrispondono rispettivamente agli stadi di lepto–zigotene e di diplotene–telofase I. E si è visto che il citoplasma delle cellule germinali si carica di acido RN, il quale poi gradualmente scompare da questa sede. Sono stati inoltre descritti gli aspetti dei nuclei e del citoplasma delle cellule follicolari durante i vari stadi dell'attività di secrezione; ma questo argomento esula dallo scopo di questa Nota.

Altre ricerche[2] hanno messo in evidenza che le mono e le difosfatasi alcaline degli acidi nucleici si trovano soltanto nel nucleo poliploide delle cellule follicolari e nel nucleo delle cellule germinali; non nel citoplasma dei due tipi di cellule nè sui granuletti di acido RN. Poichè si ritiene probabile che questi enzimi prendano parte al metabolismo degli acidi nucleici[3] si può considerare come molto verosimile che l'acido RN emesso dalle cellule follicolari e assorbito dalle cellule germinali venga chimicamente metabolizzato soltanto in due punti del suo tragitto: all'inizio, cioè nei nuclei follicolari, e alla fine, cioè nei nuclei delle cellule germinali. Qui, probabilmente, i nucleotidi vengono utilizzati per la sintesi dell'acido desossiribonucleico (DN) che costituisce la cromatina. L'aumento della quantità dell'acido DN nel nucleo degli spermatociti è infatti dimostrato dalle misure del Caspersson[4].

Osservazioni in parte analoghe a quelle qui riassunte si trovano nella bibliografia. Nei testicoli di molti insetti si trovano elementi (cellule apicali, cellule di Verson) di natura secretoria, a cui era stata attribuita una funzione

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli e il Centro di Citologia Genetica del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) G. VITAGLIANO, « La Ricerca Scient. », vol. 18, p. 840 (1948); G. VITAGLIANO e M. DE NICOLA, « Nature », vol. 162, p. 966 (1948).

(2) M. DE NICOLA, « La Ricerca Scient. », vol. 18, p. 1019 (1948) e lavoro in collaborazione con G. VITAGLIANO citato nella Nota (1).

(3) J. BRACHET e R. JEENER, « C. R. Soc. Biol. », vol. 140, p. 1121 (1946); R. JEENER, « Actual. Biochim. » (Desoer, Liège), n. 10, p. 88; G. MONTALENTI e M. DE NICOLA, « Experientia », vol. 4, p. 314 (1948).

(4) T. CASPERSSON, « Arch. f. experim. Zellforsch. », vol. 22 p. 655 (1939); Id., « Chromosoma, vol. I, p. 147 (1939–40).

di « nutrizione » delle spermatogonie. In molti casi sono stati descritti corpicciuoli basofili, spesso indicati come mitocondri, che vengono fagocitati, o assorbiti dagli elementi germinali [5]. Naturalmente resta da dimostrare che tali secrezioni contengono acido RN, ma ciò appare molto verosimile; per alcuni casi (Ortotteri) è stato accertato (ricerche inedite di B. Battaglia).

Il Brachet [6] a cui si deve il metodo (usato anche nelle ricerche della Vitagliano) per mettere in evidenza l'acido RN, ha descritto una progressiva diminuzione del contenuto in acido RN nel citoplasma, man mano che procede la spermatogenesi, dallo stadio di spermatogonie in poi, in topo, coniglio, cavallette e planarie. Non ha invece osservato la condizione – molto evidente in *Asellus* – di « ricaricamento » di acido RN allo approssimarsi della metafase I meiotica. Nè si è chiesto donde venisse l'acido RN alle cellule germinali.

Il Painter [7] ha compiuto osservazioni analoghe nel processo di formazione del granello pollinico in *Rhoeo*. Egli ha messo in evidenza come particolari elementi, le cellule del *tapetum*, siano ricchissimi di acido RN. Durante le fasi meiotiche il Painter osserva la stessa diminuizione progressiva del contenuto di acido RN nelle cellule germinali trovato dal Brachet negli animali. Nel periodo post-meiotico poi, le cellule del *tapetum* si disfanno e mettono in libertà una notevole quantità di acido RN, che viene assorbito dal granello pollinico e utilizzato, secondo l'interpretazione dell'autore, per la sintesi delle proteine che deve avvenire durante l'accrescimento del granello. Benchè non sia stato notato dal Painter, non è improbabile che le cellule del *tapetum* forniscano acido RN alle cellule germinali prima o durante il processo meiotico, come avviene in *Asellus*.

Tralascio altre ricerche di Painter e Reindorp [8] che si riferiscono all'ovogenesi di *Drosophila*, perchè su questo processo, più complicato della spermatogenesi, non intendo qui soffermarmi.

Nell'Istituto di Genetica di Napoli si vanno ora estendendo le ricerche su altri animali, appartenenti a gruppi zoologici diversi, e dai risultati preliminari ottenuti si rileva che un meccanismo di rifornimento di acido RN alle cellule germinali maschili analogo a quello dimostrato in *Asellus*, esiste con tutta probabilità in molti altri organismi, seppure con modi alquanto differenti. Vi sono cioè – a quanto pare – cellule che hanno l'ufficio di elaborare acido RN e di metterlo a disposizione degli elementi germinali.

Se le ricerche ora in corso dimostrassero veramente la generalità di questo fenomeno per la gametogenesi maschile, si potrebbero istituire interessanti considerazioni. Le quali appunto, in forma ipotetica, intendo sviluppare in questa Nota.

(5) Citerò solo un lavoro recente dove si trovano numerose indicazioni bibliografiche: H. L. CARLSON, « Journ. of. Morphol. », vol. 77, p. 141 (1945).

(6) J. BRACHET, « Arch. de Biol. », vol. 53, p. 207 (1942).

(7) T. S. PAINTER, « Bot. Gaz. », vol. 105, p. 58 (1940).

(8) T. S. PAINTER e E. REINDORP, « Chromosoma », vol. I, p. 276 (1939).

Ci si potrebbe domandare cioè se l'abbondanza di acido RN fornito dall'esterno non sia la causa, o almeno una delle cause dell'instaurarsi del processo meiotico. In bibliografia si trovano parecchi accenni favorevoli ad una simile ipotesi.

Premesso che non si sa quasi nulla sulle cause che determinano l'inizio della mitosi e tanto meno su quelle che provocano un processo cariocinetico così particolare qual'è la meiosi, si vede però, da una rapida scorsa alla bibliografia, che fenomeni meiotici più o meno completi possono avvenire anche in cellule somatiche. Vari casi sono stati descritti specialmente nei vegetali. Ciò significa evidentemente, che la capacità di entrare in meiosi non è esclusiva delle cellule germinali, ma può, in circostanze che non sono ancora state determinate, rivelarsi anche in cellule somatiche.

Casi di meiosi somatica furono descritti da M. A. Brown [9] nel cotone e da Battaglia e Dolcher, e da Battaglia [10] in *Sambucus*. Processi meiotici completi o incompleti si riscontrano qui in gruppi di cellule di natura secretoria, che si trovano nella parte basale di ciascuno dei tre canali stilari. Non si hanno notizie sul contenuto in acido RN in queste cellule, ma due fatti sembrano indicare che esso sia elevato; l'affermazione del Battaglia che il citoplasma assume colore azzurro con il bleu di toluidina (che sia basofilo si rileva anche dalla microfotografia); il fatto che il Painter [11] trova nel pistillo di *Rhoeo*, lungo il canale stilare, cellule con citoplasma ricco di acido RN. Per analogia, in attesa di ulteriori ricerche, si può pensare che anche in *Sambucus* sia così.

Altre cellule somatiche in cui sono stati descritti appaiamento di cromosomi e figure simili alle meiotiche sono le cellule cancerigne [12] e precisamente quelle del tipo A di Caspersson e Sandersson [13], le quali, appunto, sono caratterizzate da abbondanza di acido RN nel citoplasma.

Infine, un dato molto importante è quello che si rileva da un lavoro di Huskins [14] ove si legge che M. Kodani, trattando apici radicali di cipolle con ribonucleato di sodio, ha ottenuto « chromosome pairing and reduction divisions, similar in essential respects to those of the germ cells ». Casi simili Huskins trova anche in altri tessuti vegetali in cui la mitosi viene stimolata dal trattamento con indolo 3 acetico.

(9) M. A. Brown, « Amer. Jour. Bot. », vol. 34, p. 384 (1947); non ho potuto consultare questo lavoro.

(10) E. Battaglia e T. Dolcher, « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », vol. 53, nn. 3-4 (1947); E. Battaglia, ibid., vol. 54 (1947).

(11) Loc. cit., p. 62 e fig. 9.

(12) C. Barigozzi e L. Cusmano, « Boll. Soc. Ital. Biol. Speriment. », vol. XXII, p. 518 (1946); Id., « Nature », vol. 159, p. 505 (1947); ivi sono indicati i reperti dei precedenti autori.

(13) T. Caspersson e L. Sandersson, « Acta Radiol. », Suppl. n. 46, Stockholm, 1942; v. anche R. E. Stowel, « Sympos. of the Soc. for Experim. Biol. », vol. I: Nuclei acid, Cambridge, p. 190 (1947).

(14) L. C. Huskins, « Nature », vol. 161, p. 80 (1948); Id., « Roy. Soc. of Canada », Sect. V, June 1948. Il lavoro di Kodani a cui si accenna è indicato com e *in press*.

Da tutte queste osservazioni, per ora alquanto frammentarie (tra le quali l'esperimento citato dal Huskins ha certamente molto peso) si ricava l'impressione che un abbondante approvvigionamento di acido RN proveniente dall'esterno sia carattere comune alle cellule germinali di tipo maschile subito prima o durante la meiosi. Perciò si può avanzare l'ipotesi – che può servire come direttiva per le indagini future – che *l'abbondanza di acido* RN *proveniente da fonti esterne alla cellula, sia una causa dell'instaurazione del processo meiotico.*

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Oreste Mattirolo

tenuta (*) dal Socio G. GOLA

Il 3 dicembre 1947 si spegneva a Torino, dove era nato nel 1856 e dove aveva svolto la maggior parte della sua vita operosa, il Socio Nazionale ORESTE MATTIROLO.

Appassionato di studi naturalistici e provvisto di censo, aveva conseguito nel 1876 la laurea in scienze naturali e quella in medicina nel 1879, guidato in questo indirizzo da Michele Lessona, il quale aveva fatto rilevare al giovane naturalista quanto più larga e profonda fosse la preparazione di uno studioso che avesse seguìto con spirito naturalistico anche la vita dell'uomo sano e dell'ammalato. Così, ben preparato agli studi naturalistici, si affacciò alla vita di botanico nell'Orto Botanico di Torino. Ma la sua mente non si contentava di un indirizzo di studi quale allora si svolgeva presso il maggior numero di scuole, e che appariva in via di profondo rivolgimento negli istituti germanici; e verso i quali si rivolgeva l'attenzione del mondo colto. A Strasburgo, De Bary avviava i suoi allievi allo studio di nuovi argomenti e di nuovi metodi della biologia vegetale ed aveva attirato attorno a sè giovani di alto valore, i quali poi, in Germania e fuori, ebbero parte preminente negli studi botanici del loro paese: basti ricordare i nomi di Klebs e di Bower.

Mattirolo vi andò nel 1879 e vi rimase poi tre semestri; ivi incontrò Romualdo Pirotta, e nacque la fraterna amicizia che legò per la vita i due valenti botanici.

Fu in questo Istituto che il Mattirolo ebbe proposto dal De Bary lo studio di alcuni licheni, stati raccolti nel Congo dagli esploratori germanici che nello spirito espansionistico del nuovo impero andavano, esploratori, per il mondo.

(*) Testo pervenuto all'Accademia il 14 dicembre 1948.

Egli trovò tra questi che la *Cora Pavonia* differiva da tutte le altre forme licheniche conosciute per avere basidi non aschi, ponendo così, colla scoperta dei Basidiolicheni, il suggello definitivo alla lunga e ancora aperta controversia sulla natura simbiotica dei Licheni.

Fu questa una delle più alte benemerenze scientifiche del Mattirolo; ma frutto non minore della sua permanenza a Strasburgo fu l'avere appreso i metodi moderni di ricerca, lo spirito della fine indagine istologica, e la tecnica che per molti anni pose la scienza germanica all'avanguardia dei progressi della Biologia.

Giunto a Torino colla nomea del grande successo riportato, divenuto nel 1881 assistente all'Orto Botanico, vi portò questo nuovo spirito di ricerca mentre, sopravvenuto il Gibelli alla cattedra di Botanica, si istituiva un centro di indagine tra i più vivaci che si potessero avere allora in Italia.

Divenne libero docente nel 1882, straordinario di botanica nel 1889 a Torino, e poi nel 1891 a Bologna, e quivi ordinario nel 1894; passò a Firenze nel 1898 e tornò a Torino nel 1900.

La *forma mentis* abbozzata a Strasburgo si rivelò ben presto nei suoi lavori. Lo studio dei funghi lo attrasse in modo particolare non tanto se rivolto alla loro determinazione sistematica, quanto ai problemi connessi al loro sviluppo; non lo studio dell'organismo giunto all'acme del suo ciclo biologico, quanto le fasi successive che si verificano nella sua morfologia.

Così, mentre Saccardo e la sua numerosa scuola onoravano l'Italia colla prodigiosa attività di descrizione e sistemazione delle innumerevoli specie fungine che per la prima volta passavano sotto lo sguardo degli studiosi, Mattirolo ne indagava i processi evolutivi, e la dipendenza tra il loro sviluppo e le condizioni ambientali. Fu questo il motivo di frequentissimi rapporti tra i due grandi micologi, i quali, ciascuno all'indirizzo preferito, portarono alto il nome della botanica italiana in questo campo.

Basta leggere la corrispondenza frequentissima scambiata fra i due micologi per vedere quanto profonda stima reciproca, quanta complementarità di indirizzi informasse l'opera dei due colleghi.

Del 1882 è uno studio sulla *Peziza sclerotiorum*, del 1886 quello sullo sviluppo di due ipocreacei, ai quali seguirono quelli sulla *Cyphella* e sulla *Pleospora*.

Ma altri argomenti si affacciavano e attraevano l'attenzione del giovane botanico: nel 1885 si occupò della struttura e dello sviluppo dei tegumenti seminali delle leguminose, dei quali rilevò particolari caratteristiche che sono ancora oggi base delle nostre conoscenze su questo argomento. È un problema che lo interessò per lungo tempo e per il quale si associò con un giovane botanico, che poi salì a meritata rinomanza, il Buscalioni, col quale indagarono profondamente il problema del tegumento seminale delle leguminose in monografie di fondamentale importanza.

Nel 1883 si andavano sviluppando i problemi relativi alle simbiosi dei vegetali; lo studio dei tubercoli radicali delle leguminose attrasse il Mattirolo, che vi dedicò in seguito importanti ricerche. Ma soprattutto nel campo

della simbiosi sono da ricordare le ricerche sulla micorrizia; non tanto per l'apporto che vi potè portare la sua pubblicazione del 1887, quanto per il fatto che tale argomento lo condusse allo studio di un particolare gruppo biologico di funghi, i tartufi, espressione di un singolare tipo di vita ipogea.

Il problema dei funghi ipogei, a qualunque categoria sistematica essi appartenessero, lo attrasse ininterrottamente da allora in poi; tartufi mangerecci e tartufi velenosi, ascomiceti e gasteromiceti, di ogni paese e di ogni forma furono oggetto di un'appassionata ricerca.

Dopo quella soprariordata, ben trentasette pubblicazioni, fino al 1942, dimostrano il suo interessamento e la sua competenza per tale gruppo biologico di funghi. Si ebbero così memorie fondamentali per la conoscenza morfologica e sistematica della flora ipogea d'Italia, del Portogallo, di Francia e del Congo, dell'Uraguay e della Libia, vôlti alla critica sistematica, come la revisione delle collezioni di Vittadini, o alla tossicologia: vôlti ai rapporti micorrizici colle piante superiori e alle possibilità applicative, come il rimboschimento e la produzione dei tartufi mangerecci.

A questi lavori si aggiungano non poche ricerche sopra i gasteromiceti, i quali mostrano notevoli affinità morfologiche e biologiche colle forme fungine, che dalla vita epigea passano alla ipogea.

Sull'argomento dei funghi ipogei il Mattirolo assunse una posizione centrale, generalmente riconosciutagli; i lavori sono importanti non solo per la compiutezza della ricerca, ma anche per il fine spirito critico che animò la sua opera.

Oltre a questi campi di stretta specializzazione il Mattirolo mostrò il suo valore di micologo nelle importanti raccolte di funghi da lui studiate e pubblicate, come quelle fatte nella spedizione del Duca degli Abruzzi nelle Terre polari (1903), sul Ruwenzori (1908), nei viaggi eseguiti da altri naturalisti italiani in Africa (Pampanini, Stefanini, Negri).

Ma la figura scientifica del Mattirolo non si identifica solo in questo tipo di ricerche. Se egli nella scuola di De Bary aveva appreso i metodi della moderna biologia, non aveva dimenticato il suo spirito di latino, ed era sempre stato *un naturae curiosus*.

Egli aveva iniziato la sua vita di botanico alla scuola di Delponte, che curava specialmente l'organografia e la speciografia; ma aveva veduto sorgere la fine indagine micologica, quella anatomica e poi quella sempre più delicata che richiede l'istologia; in seguito il lavoro d'indagine si era esteso ai problemi fisiologici. Egli soleva spesso dolersi di non aver potuto formarsi delle basi di conoscenze chimiche e matematiche, delle quali comprendeva tutta l'importanza. E se ai nuovi indirizzi di coltura non era sufficientemente preparato per affrontare problemi coll'autorità che gli era possibile in altri campi, egli seguiva con vivo interesse quanto vedeva concretarsi in nuovi problemi; e cogli allievi era affettuoso consigliere e guida e aiuto, nel favorire mezzi di studio, nell'insegnare la prudenza e la esattezza della ricerca, e nell'incoraggiare.

Di tanti dei nuovi argomenti che si affacciavano all'attenzione degli studiosi troviamo l'eco delle sue pubblicazioni; la doppia fecondazione endospermica, la riviviscenza della Grimaldia, ecc.

La sua larghezza di idee, la elevata posizione sociale raggiunta, lo ponevano a contatto con tante diverse attività estranee alla Scuola, le quali però gli proponevano argomenti di osservazione e di meditazione; e estremamente varia risulta nell'elenco delle sue pubblicazioni la risonanza di questi argomenti che erano a lui proposti: di botanica medica, di botanica alimentare, di reperti di carattere floristico, di sistematica, di frutticoltura, di botanica agraria, di argomenti storici e artistici, nei quali avevano parte o i botanici o i vegetali.

Rapidamente egli si aggiornava su questioni le più varie e ne uscivano Note di largo interesse, le quali contribuivano a spargere intorno la notorietà di quest'uomo singolare, aperto a tutte le idee e prodigo di aiuti e di consigli a quanti si rivolgevano a lui. E quanto dedicava della sua esperienza e della sua autorità ai suoi allievi di ogni grado, che egli seguiva e aiutava nella non facile strada! « Purchè si lavori » era una frase che egli frequentemente pronunciava favorendo, a quanti domandavano a lui, la disponibilità di uno strumento o di un libro o di un mezzo di studio che difficoltà dei tempi non sempre rendevano facili ad aversi. E seguiva con vivo interesse il procedere dei giovani sulla strada della scienza; quanto spesso si vantava di avere « scoperto » e avviato alla scienza il nostro compianto Lionello Petri di cui egli aveva scorto le singolari attitudini nella discussione di una tesina di laurea.

Riconoscimento di ogni genere attestarono quanto largamente fosse apprezzata l'opera di quest'Uomo che nella sua instancabile operosità svolta per oltre 60 anni, fino a che lo permisero le forze fisiche, sparse intorno a sè una luce di sapere e di intelligente bontà, nella Famiglia e nella scuola, negli scritti e nelle parole, nella vita pubblica e nel laboratorio, dove egli apriva il suo animo a rivelare mille doti ammirevoli che solo una lunga comunità di intenti poteva lasciare scorgere. E in mezzo alle distinzioni sociali, accademiche, politiche che accompagnarono il salire di quest'Uomo in ogni ambiente nel quale ebbe a trovarsi, tenne sempre immutata la sua linea di bontà e di cordialità, di signorilità e di austera condotta; che sempre ammirò le conquiste del sapere da chiunque esse fossero state raggiunte.

Nella vita famigliare, nelle salde amicizie, nella ammirata venerazione degli allievi, egli trovò conforto alle infinite difficoltà delle quali la vita è intessuta. Una gloriosa istituzione scientifica come è la nostra Accademia può ascrivere a suo onore l'avere avuto tra i suoi membri un Uomo che ha così bene meritato della scienza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Silvestri offre in omaggio all'Accademia e illustra brevemente quattro suoi lavori. Due di questi, rispettivamente dal titolo « Descriptio novi Japygidae (Insecta diplura) in Angola reperti » e « Diplopodum Penicillitorum (Arthropoda – Myriopoda) specierum novarum descriptio », sono stati pubblicati a cura dei Servizi Culturali della « Companhia de Diamantes de Angola », mentre dei rimanenti l'uno, intitolato « Sur les Japygidae (Insecta, Diplura) de Belgique » è un estratto del « Bull. et Ann. Soc. Entom. de Belgique», 84, IX–X, 1948, l'altro, dal titolo «Descrizione di nuovi diplopodi penicellati », è un estratto dal Bollettino del Laboratorio Entomologico Agrario di Portici, vol. IX, 1948.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare rilievo alcuni studi di parassitologia del Socio Straniero Clifford Dobell.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Silvestri, Chiarugi, Semerano, Cotronei, Picone, Bompiani, Vernoni, Quilico, Bianchi (a nome del Collega Gb. Dal Piaz), Bonino, Armellini e Marotta.

Il Segretario accademico dà lettura delle Note pervenute all'Accademia.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Amerio A., Osservazioni alla Nota di Radicati e Gamba su « un nuovo metodo per misurare la velocità della luce ».

Andreotti A., Sulle corrispondenze fra due curve birazionalmente distinte a moduli generali e sui modelli minimi dei loro prodotti (pres. dal Socio F. Severi).

Bonino G. B. e Scrocco E., Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – VI. Energie medie di risonanza ed energie minime di eccitazione elettronica nelle forme naftochinoniche (pres. dal Socio G. B. Bonino).

Cavallini D., Sull'ossidazione dell'acido fenilpiruvico e p–ossifenilpiruvico con acido ascorbico (pres. dal Corrisp. G. Vernoni).

Gagliardo E., Contributo alle conoscenze sul metodo dell'ione pilota in polarografia quantitativa (pres. dal Corrisp. G. Semerano).

Giannuzzi A. M., Sopra la doppia L 2052 del Catalogo di Aitken (pres. dal Socio G. Armellini).

Lenti C., Inibitori di fenolossidasi nel fegato e nel pancreas (pres. dal Socio A. Herlitzka).

Malaroda R., Condizioni tettoniche della zona di Prestine (media Valcamonica) (pres. dal Corrisp. Gb. Dal Piaz).

Penso G. e Ortali V., Isolamento e studio di fagi attivi sui micobatteri (pres. dal Corrisp. D. Marotta).

Quilico A., Panieri L. e Visconti N., Ricerche sulla fermentazione citrica con mutanti artificiali (pres. dal Corrisp. A. Quilico).

Riedel A., Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio (pres. dal Corrisp. Gb. Dal Piaz).

Zelion N., Sul calcolo numerico degli autovalori (pres. dal Socio M. Picone).

Il Socio Miolati presenta per la pubblicazione una sua Memoria intitolata « Di alcune funzioni della chimica organica e di atomi avalenti in molecole. – Saggio su nuovi aspetti della chimica organica ».

Il Socio Picone presenta una Memoria del professore polacco Jan G. Mikusinski dal titolo: « Une nouvelle justification du calcul de Heaviside ». Sarà nominata una apposita Commissione che riferirà su detta Memoria.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Beccari, anche a nome dei Soci Silvestri e Cotronei, legge la relazione sulla Memoria del dott. Lodovico Caporiacco dal titolo « Le specie e sottospecie del genere « Euscorpius » vivente in Italia e in alcune zone extraitaliane », con la quale si propone la pubblicazione della Memoria stessa. La proposta, messa ai voti, è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Sergi dà notizie della recente scoperta (2 ottobre 1948) del cranio di un primate fossile (gen. Pro consul) nell'isola di Rusinga (Lago Vittoria), avvenuta per opera della consorte del direttore del Museo di Nairobi dottore Leakey, organizzatore delle ricerche nel Kenia. Valendosi di alcune fotografie pubblicate nell'« East Africa Standard », giornale di Nairobi, ed in « Nature » rileva che è particolarmente importante l'osso frontale, che per la sua morfologia umanoide indica un particolare sviluppo del cervello e più specialmente del lobo frontale. Si tratta evidentemente di una forma evoluta di antropomorfo vissuta nel Miocene, che ancora è ben lontana dalle forme umane le più primordiali come appare dalle sue caratteristiche facciali. Il fossile è stato affidato allo studio del prof. Le Gros Clarke dell'Istituto Anatomico di Oxford. Questo nuovo rinvenimento si aggiunge a tutti quegli altri che in questi ultimi tempi sono venuti a documentare la presenza in Africa di svariati tipi di antropomorfi quando ancora l'uomo non era apparso. Per la ricerca di questi primati così interessanti gli Americani hanno svolto nel 1948 importanti opere di scavo in diversi territori africani.

Il Presidente ringrazia il Collega Sergi per l'interessante comunicazione.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 dicembre 1948.

DOBELL Clifford. — *An improved method for testing the action of Emetine and other chemicals on «Entamoeba histolytica» in cultures.* Estr. da «Annales de la Société Belge de Médecine Tropicale», 1947, Décembre.

— *The common Flagellate of the human mouth «Triconomas tenax» (O. F. M.): its discovery and its nomenclature.* Estr. da «Parassitology», vol. XXXI, 1939, n. 1.

— *J. J. Drbohlav.* Estr. da «Nature», vol. CLVIII, 1946.

— *Richard von Hertwig.* Estr. da «Proceedings of the Linnean Society of London», session 150, a. 1938.

— *H. S. Jennings.* Estr. da «Nature», vol. CLIX, 1947.

— *The Kincardine Papers.* Estr. da «Notes and Records of the Royal Society of London», vol. IV, n. 2.

— *C. A. Kofoid.* Estr. da «Nature», vol. CLX, 1947.

— *Vilém Lambl (1824–1895).* A portrait and biographical note. Estr. da «Parassitology», vol. XXXII, 1940, n. 1.

— *Researches on the intestinal protozoa of monkeys and man.* X. *The life-history of «Dientamoeba fragilis»: observations, experiments, and speculations.* Estr. da «Parassitology», vol. XXXII, 1940, n. 4.

DOBELL Clifford. — *Researches on the intestinal protozoa of monkeys and man.* XI. *The cytology and life-history of «Endolimax nana».* Estr. da «Ornitology», vol. XXXV, 1943, n. 3.

— *Michal Siedlecki (1873–1940). A founder of moderne knowledge of the Sporozoa* Estr. da «Parassitology», vol. XXXIII, 1941, n. 1.

— *Some new methods for studying intestinal amoebae and other protozoa.* Estr. da «Parassitology», vol. XXXIV, 1942, n. 1.

— *On «Teranympha» and other monstrous latin parasites.* Estr. da «Parassitology», vol. XXXI, 1939, n. 2.

— *F. Vejdovsky.* Estr. da «Nature», vol. CLVI, 1945.

Elenco delle pubblicazioni di Federico Sacco, dottore in Scienze, già professore di geologia e di paleontologia all'Università di Torino, 1884–1948. Torino, Checchini, 1948, Pp. 30, in-8°.

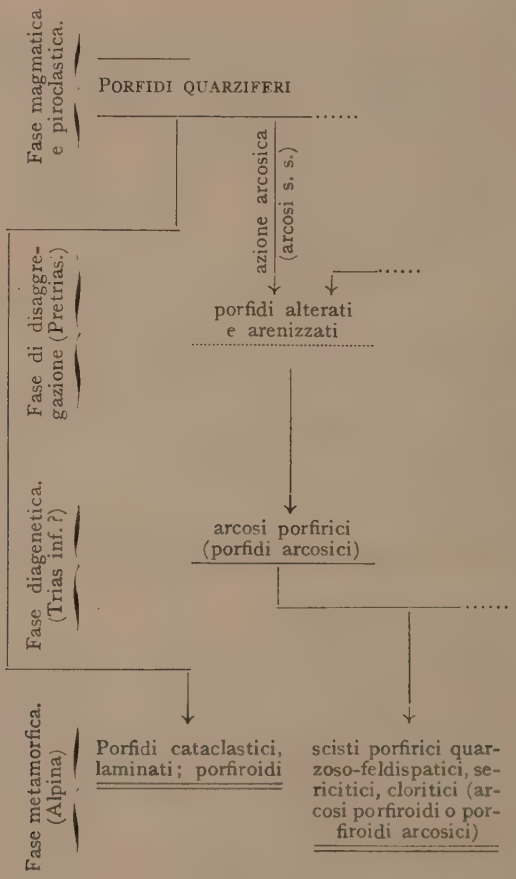
SACCO Federico. — Vedi: *Elenco delle pubblicazioni di Federico Sacco.*

TONIOLO Antonio Renato. — *Compendio di geografia generale.* 5ª ed. riveduta e ampliata con indice analitico. Milano-Messina, Casa Ed. G. Principato, 1948. Pp. XVI–520, in-8°, con figg. e tavv.

U. B.

ERRATA CORRIGE

Nella Nota di S. CONTI, *Sulle «besimauditi» delle Alpi Liguri*, fasc. 3–4, nella Tavola a p. 170, al lato sinistro si deve leggere:



INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

AGENO M. e CHIOZZOTTO M. – Sull'assorbimento di elettroni di 17 MeV, in materiali di diverso numero atomico, *401*.

AGOSTINELLI C. – Sulla integrazione dell'equazione integro-differenziale che regge il fonomeno della diffusione dei neutroni termici, *140*.

ALIBRANDI A. – Sulla presumibile natura riflessa della epilessia idiopatica, *88*.

AMERIO L. – Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota I, *313*.

ANDREATTA C. – La tettonica « a vortici » nei monti della Val di Sole, *60*.

ANDREOTTI A. – Sulle corrispondenze fra due curve birazionalmente distinte a moduli generali e sui modelli minimi dei loro prodotti, *375*.

ARDY C., vedi LOMBROSO C.

ARMELLINI G. – Sui numeri perfetti. Nota II, *109*.

— Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi di un assorbimento del flusso gravitazionale attraverso i mezzi materiali, *288*.

ASCENZI A. – Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale II. Sulla birifrangenza totale, *100*.

— Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell osso umano normale. – III. Sulla birifrangenza di forma e la birifrangenza propria, *171*.

ASCOLI G. – Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione. Nota I, *280*.

B

BAIADA E. – Una relazione trigonometrica e la velocità di gruppo, *355*.

BALDUCCI D. – Studi sull'effetto della vitamina « P » e del dicumarolo sulla formazione della protrombina, *91*.

BARGONI N. – Sull ossidazione dell'acido piruvico nell'« Escherichia Coli », *412*,

BAROZZI F. – Sul bilancio di potenza in una rete elettrica ad *m* morsetti in regime sinusoidale di correnti, *385*.

BASSI A. – Sopra l'indipendenza di alcuni invarianti topologici, *235*.

BERTOLANI M. – I costituenti minori delle antimoniti, *435*.

BIANCHI G. – Ricerche sui fenomeni di scarica agli elettrodi ad altissima densità di corrente, *423*.

BIOCCA E. e TARANTINO E. – Ricerche comparative sull'azione tossica per via muscolare e per via orale del curaro, della stricnina e dello iodo-metilato di stricnina. Nota IV, *97*.

BONINO G. B. e MARINANGELI A. M. – Ricerche sulla teoria delle soluzioni concentrate di elettroliti forti. – VI. Dipendenza dalla temperatura di grandezze che intervengono nel calcolo degli abbassamenti crioscopici, *298*.

BONINO G. B. e ROLLA M. – Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – III. Sulla densità della nuvola elettronica p_z nelle forme para-benzochinoidi, *220*.

— — Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – V. Indici di legame negli orto e parabenzochinoni, *294*.

BORDONI P. G. – Moti alla Cardano di un bipendolo, *147*.

C

CARAFA M. – Sul prolungamento analitico, *127*.

CERUTI A. – L'azione di alcuni cationi e dell'acqua sul condrioma isolato in vitro, *452*.

CHIOZZOTTO M., vedi AGENO M.

COLONNA M. – Ricerche nella serie dei diaza-fenantreni: « Cation-alocromia di chinoline e diaza-fenantren-derivati », *50*.

CONFORTO F. – Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da

congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, *369*.

CONTI S. – Sulle « besimauditi » delle Alpi Liguri, *165*.

COTUGNO N. e MENGOTTI-MARZOLLA C. – Approssimazione per eccesso della più bassa frequenza di una piastra ellittica omogenea incastrata, *324*.

D

DALLA VOLTA V. – Sull'isometria di calotte superficiali, *381*.

D'AMATO F. – Prime osservazioni sulla inibizione pre-profasica della cariocinesi nei meristemi radicali, *460*.

D'ANCONA U. – Prime osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali sulla gonade dell'anguilla, *82*.

DEMICHELIS F. – Sullo spessore dello strato di sbarramento nei raddrizzatori a ossidulo di rame, *397*.

F

FANTAPPIÈ L. – I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato, *329*.

FENCHEL W. – Estensioni di gruppi discontinui e trasformazioni periodiche delle superficie, *326*.

FICHERA G. – Teorema d'esistenza per il problema biiperarmonico, *319*.

FINZI B. – Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio-tempo, *203*.

FRERI M. – Sulla molecola dell'acido butirrico normale e sul legame idrogeno, *161*.

G

GANDOLFI R. – La faglia dello Staffora. Sue caratteristiche in rapporto al sistema di fratture nel Vogherese, *67*.

GARELLI C. M. e SACERDOTE G. – Determinazioni di una scala di sensazioni visive, *403*.

GEROLA F. M. e VANNINI E. – L'importanza del pH nella colorazione con verde di metile-pironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleinico, *77*.

GHIZZETTI A. – Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti, *344*.

GIORGI G. – Relatività dei fenomeni fisici. *216*.

GODEAUX L. – Points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, *243*.

GOLA G. – Commemorazione del Socio Oreste Mattirolo, *469*.

GOLAB S. – Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici, *120*.

H

HIEKE O. – Sulla presenza di basalti limburgitici nell'Africa Orientale, *70*.

K

KRALL G. – Dinamica ed aerodinamica dei fili – III. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili, *197*.

— Dinamica ed aerodinamica dei fili. – IV. Problemi non lineari delle vibrazioni acustiche, *285*.

L

LENTI C. – Sulla glicolisi nel cervello, *419*.

LEONARDI P. – Nuove ricerche geologiche nel gruppo della Marmolada (Dolomiti), *56*.

— Una nuova forma werfeniana del Cadore: « Myophoria costata Zenk. n. var. ognibeni », *433*.

LOMBROSO C. e ARDY C. – Sugli autolizzati proteici. – I. Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici in cani in via di accrescimento, *181*.

— — Sugli autolizzati proteici. – II. Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici o di peptoni in cani adulti, *257*.

LONGO C. – Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi asintotiche, *19*.

M

MAHLER K. – Sui determinanti minimi delle sezioni di un corpo convesso. *251*

MAJORANA Q. – Sulla relatività di Alberto Einstein, *211*.

MALVANO R. – Guida d'onda dielettrica a sezione rettangolare compresa tra due piani metallici paralleli, *155*.

MANACORDA T. – Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. Nota I, *14*.

— Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. Nota II, *143*.

MANNINO G. – Applicazione del procedimento indicato dal prof. Silva allo studio della flessione dell'astrospettrografo IV di Potsdam, *253*.

MARINANGELI A. M., vedi BONINO G. B.

MENGOTTI-MARZOLLA C., vedi COTUGNO N.

MONTALENTI G. – Considerazioni sul determinismo della meiosi, *466*.

N

NICOLINI T. – Perturbazioni e discontinuità nel moto polare, *392*.

O

OBRECHKOFF N. – Sur quelques inégalités pour les dérivées des fonctions et les différences des suites, *21*.

P

PACELLA G. B. – Su una proprietà della meccanica dei corpi continui e una deduzione geometrica della legge di Hooke, *31*.

PAGNI M. – Sui coefficienti di Fourier di una funzione di funzione, *363*.

PEISINO G. – Le osservazioni delle stelle doppie con micrometri a birifrangenza e un tipo di micrometro progettato e costruito all'Osservatorio di Collurania, *42*.

PELLEGRINO F. – Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari, *333*.

PERRI T. – La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris », Nota III, *442*.

PREDONZAN A. – Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme, *238*.

PURIFICATO A. – Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson, *348*.

R

ROLLA M., vedi BONINO G. B.

S

SABAN G. – Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate, *24*.

— Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle congruenze rettilinee, *134*.

SACERDOTE G., vedi GARELLI C. M.

SACCO F. – La Serpentinizzazione, *11*.

SCARPA O. – Sulla validità della equazione di Gibbs-Helmholtz per le pile di concentrazione, *226*.

SCHIAVINATO G. – Studi geologico – petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in alta Val Camonica. – II. Formazioni metamorfiche associate agli scisti del Tonale, *427*.

SEGRE B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota IV, *3*.

— Intorno ad un problema del Lebesgue sui gruppi di punti associati, *187*.

— Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. Nota I, *193*.

— Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. Nota II, *275*.

SERGI S. – I piegamenti della base nei paleantropi di Saccopastore e del Monte Circeo, *306*.

SILVESTRI F. – Prima notizia sull'esistenza di una specie di « Embia » (Insecta Embioptera), a maschio alato, nel Comune di Roma, nuova per l'Italia, *12*.

— Distribuzione del genere « Synxenus » Silv. (Diplopoda-Penicillata), *303*.

STANKIEWICZ L. – Sul calcolo della deformazione della piastra poggiata su suolo elastico, *339*.

STEFANELLI A. – Regolazioni duplicative dell'allungato in embrioni di « Rana esculenta », *448*.

T

TARANTINO E., vedi BIOCCA. E.

TORALDO DI FRANCIA G. – Sulla forma intrinseca della trasformazione dell'interferenza inversa, *48*.

TORTORICI M. – Rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento e segmento

obiettivo in geometria piana iperbolica. *116*.

V

VACCARO G. – Sopra alcune singolarità di ipersuperficie algebriche, *247*.

VANNINI E., vedi GEROLA F. M.

VERGNANO A. M. – Osservazioni meridiane di Urano effettuate nel 1946–1947, *37*.

VILLA M. – Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Nota I, *122*.

— Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Nota II, *231*.

Z

ZWIRNER G. – Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota II, *113*.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Una relazione trigonometrica e la velocità di gruppo. E. BAIADA, *355*.
— Sui coefficienti di Fourier di una funzione di funzione. M. PAGNI, *363*.
Analisi matematica. — Sulla integrazione dell'equazione integro-differenziale che regge il fenomeno della diffusione dei neutroni termici. C. AGOSTINELLI, *140*.
— I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato. L. FANTAPPIÈ, *329*.
— Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti. A. GHIZZETTI, *344*.
— Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari. F. PELLEGRINO, *333*.
— Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson. A. PURIFICATO, *348*.
Antropologia. — I piegamenti della base nei paleantropi di Saccopastore e del Monte Circeo. S. SERGI, *313*.
Astrofisica. — Applicazione del procedimento indicato dal prof. Silva allo studio della flessione dell'astrospettrografo IV di Potsdam. G. MANNINO, *253*.
Astronomia. — Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi di un assorbimento del flusso gravitazionale attraverso i mezzi materiali. G. ARMELLINI, *288*.
— Perturbazioni e discontinuità nel moto polare. T. NICOLINI, *392*.
— Le osservazioni delle stelle doppie con micrometri a birifrangenza e un tipo di micrometro progettato e costruito all'Osservatorio di Collurania. G. PEISINO, *42*.
— Osservazioni meridiane di Urano effettuate nel 1946-1947. A. M. VERGNANO, *37*.

B

Biologia. — Prime osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali sulla gonade dell'anguilla. U. D'ANCONA, *82*.
— L'importanza del pH nella colorazione con verde di metile-pironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleinico. F. M. GEROLA e E. VANNINI, *77*.
— Considerazioni sul determinismo della meiosi. G. MONTALENTI, *466*.
— La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». Nota III. T. PERRI, *442*.
— Regolazioni duplicative dell'allungato in embrioni di « Rana esculenta ». A. STEFANELLI, *448*.

C

Calcolo numerico. — Approssimazione per eccesso della più bassa frequenza di una piastra ellittica omogenea incastrata. N. COTUGNO e C. MENGOTTI-MARZOLLA, *324*.
— Sul calcolo della deformazione della piastra poggiata su suolo elastico. L. STANKIEWICZ, *339*.
Chimica. — Sull'ossidazione dell'acido piruvico nell'« Escherichia Coli ». N. BARGONI, *412*.
— Ricerche nella serie dei diaza-fenantreni: « Cation-alocromia di chinoline e diaza-fenantren-derivati » M. COLONNA, *50*.
— Sulla molecola dell'acido butirrico normale e sul legame idrogeno. M. FRERI, *161*.
— Sulla glicosi nel cervello. C. LENTI, *419*.
Chimica-fisica. — Ricerche sulla teoria delle soluzioni concentrate di elettroliti forti. – VI. Dipendenza dalla temperatura di grandezze che intervengono nel calcolo degli abbassamenti crioscopici. G. B. BONINO e A. M. MARINANGELI, *293*.
Chimica organica. — Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – V. Indici di legame negli orto e parabenzochinoni. G. B. BONINO e M. ROLLA, *294*.
— Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – III. Sulla densità della nuvola

elettronica p_z nelle forme para–benzochinoidi. G. B. BONINO, e M. ROLLA, *220*.

Citologia sperimentale. — L'azione di alcuni cationi e dell'acqua sul condrioma isolato in vitro. A. CERUTI, *452*.

— Prime osservazioni sulla inibizione preprofasica della cariocinesi nei meristemi radicali. F. D'AMATO, *460*.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Oreste Mattirolo. G. GOLA, *469*.

Comunicazioni varie, *474*.

E

Elettrochimica. — Ricerche sui fenomeni di scarica agli elettrodi ad altissima densità di corrente. G. BIANCHI, *423*.

— Sulla validità della equazione di Gibbs–Helmholtz per le pile di concentrazione. O. SCARPA, *226*.

Errata corrige, — *476*.

F

Fisica. — Sull'assorbimento di elettroni di 17 MeV, in materiali di diverso numero atomico. M. AGENO e M. CHIOZZOTTO, *401*.

— Sullo spessore dello strato di sbarramento nei raddrizzatori a ossidulo di rame. F. DEMICHELIS, *397*.

— Determinazioni di una scala di sensazioni visive. C. M. GARELLI, G. SACERDOTE, *403*.

— Relatività dei fenomeni fisici. G. GIORGI, *216*.

— Sulla relatività di Alberto Einstein. Q. MAJORANA, *211*.

— Guida d'onda dielettrica a sezione rettangolare compresa tra due piani metallici paralleli. R. MALVANO, *155*.

— Sulla forma intrinseca della trasformazione dell'interferenza inversa. G. TORALDO DI FRANCIA, *48*.

Fisica matematica. — Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. Nota I. T. MANACORDA, *14*.

— Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. Nota II. T. MANACORDA, *143*.

Fisiologia. — Sulla presumibile natura riflessa della epilessia idiopatica. A. ALIBRANDI, *88*.

G

Geologia. — La tettonica « a vortici » nei monti della Val di Sole. C. ANDREATTA, *60*.

— Sulle « besimauditi » delle Alpi Liguri. S. CONTI, *165*.

— La faglia dello Staffora. Sue caratteristiche in rapporto al sistema di fratture nel Vogherese. R. GANDOLFI, *67*.

— Nuove ricerche geologiche nel gruppo della Marmolada (Dolomiti). P. LEONARDI, *56*.

— La Serpentinizzazione. F. SACCO, *11*.

Geometria. — Sulle corrispondenze fra due curve birazionalmente distinte a moduli generali e sui modelli minimi dei loro prodotti. A. ANDREOTTI, *475*.

— Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione. Nota I. G. ASCOLI, *280*.

— Sull'isometria di calotte superficiali. V. DALLA VOLTA, *381*.

— Estensioni di gruppi discontinui e trasformazioni periodiche delle superficie, W. FENCHEL, *326*.

— Points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. L. GODEAUX, *243*.

— Alcuni teoremi dellâ teoria degli oggetti geometrici. S. GOLAB, *120*.

— Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi–asintotiche. C. LONGO, *19*.

— Rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento e segmento obiettivo in geometria piana iperbolica. M. TORTORICI, *116*.

— Sopra alcune singolarità di ipersuperficie algebriche, G. VACCARO, *247*.

Geometria dei numeri. — Sui determinanti minimi delle sezioni di un corpo convesso. K. MAHLER, *251*.

M

Matematica. — Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico Nota I. L. AMERIO, *314*.

— Sopra l'indipendenza di alcuni invarianti topologici. A. BASSI, *235*.

— Sul prolungamento analitico. M. CARAFA, *127*.
— Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie. F. CONFORTO, *369*.
— Teorema d'esistenza per il problema biiperarmonico. G. FICHERA, *319*.
— Sur quelques inégalités pour les dérivées des fonctions et les différence des suites. N. OBRECHKOFF, *21*.
— Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme. A. PREDONZAN, *238*.
— Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate. G. SABAN, *24*.
— Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle congruenze rettilinee. G. SABAN, *134*.
— Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota IV. B. SEGRE, *3*.
— Intorno ad un problema del Lebesgue sui gruppi di punti associati. B. SEGRE, *187*.
— Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. Nota I. B. SEGRE, *193*.
— Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. Nota II. B. SEGRE, *275*.
— Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Nota I. M. VILLA, *122*.
— Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Nota II. M. VILLA, *231*.
— Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota II. G. ZWIRNER, *113*.

Meccanica. — Sul bilancio di potenza in una rete elettrica ad *m* morsetti in regime sinusoidale di correnti. F. BAROZZI, *385*.
— Moti alla Cardano di un bipendolo. P. G. BORDONI, *147*.
— Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio–tempo. B. FINZI, *203*.
— Dinamica ed Aerodinamica dei fili. – III. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili. G. KRALL, *197*.
— Dinamica ed aerodinamica dei fili. – IV. Problemi non lineari delle vibrazioni acustiche. G. KRALL, *285*.
— Su una proprietà della meccanica dei corpi continui e una deduzione geometrica della legge di Hooke. G. B. PACELLA, *31*.

Mineralogia. — I. costituenti minori delle antimoniti. M. BERTOLANI, *435*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia *271, 475*.

P

Paleontologia. — Una nuova forma werfeniana del Cadore: «Myophoria costata Zenk. n. var. ognibeni». P. LEONARDI, *433*.
Patologia. — Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – II. Sulla birifrangenza totale. A. ASCENZI, *100*.
— Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – III. Sulla birifrangenza di forma e la birifrangenza propria. A. ASCENZI, *171*.
— Studi sull'effetto della vitamina «P» e del dicumarolo sulla formazione della protrombina. D. BALDUCCI, *91*.
— Ricerche comparative sull'azione tossica per via muscolare e per via orale del curaro, della stricnina e dello iodo–metilato di stricnina. Nota IV. E BIOCCA e E. TARANTINO, *97*.

Personale Accademico, *262*.
Petrografia. — Sulla presenza di basalti limburgitici nell'Africa Orientale. O. HIEKE, *70*.
— Studi geologici–petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in alta Val Camonica. – II. Formazioni metamorfiche associate agli scisti del Tonale. G. SCHIAVINATO, *427*.

Plichi suggellati, *263*.
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, *266*.
Presentazione di libri, *263, 473*.
Presentazione di Note e Memorie, *264, 473*.

R

Relazioni di Commissioni, *474*.

S

Scienza della Alimentazione. — Sugli autolizzati proteici. – I. Modificazioni del

metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici in cani in via di accrescimento. C. LOMBROSO e C. ARDY, *181*.

— Sugli autolizzati proteici. – II. Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici o di peptoni in cani adulti. C. LOMBROSO e C. ARDY, *257*.

T

Teoria dei numeri. — Sui numeri perfetti. Nota II. G. ARMELLINI, *109*.

Z

Zoologia. — Prima notizia sull'esistenza di una specie di « Embia » (Insecta Embioptera), a maschio alato, nel Comune di Roma, nuova per l'Italia. F. SILVESTRI, *12*.

— Distribuzione del genere « Synxenus » Silv. (Diplopoda-Penicillata). F. SILVESTRI, *303*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1–2

FERIE 1948 (LUGLIO–AGOSTO)

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Proprietà algebriche ed aritmetiche di forme cubiche. Nota IV . . Pag. 3
SACCO F. La Serpentinizzazione 11
SILVESTRI F. – Prima notizia sull'esistenza di una specie di « Embia » (Insecta Embioptera), a maschio alato, nel Comune di Roma, nuova per l'Italia 12

NOTE PRESENTATE DA SOCI

MANACORDA T. – Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) . . . . . Pag. 14
LONGO C. – Sopra una classe di varietà che ammettono varietà subordinate quasi-asintotiche (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 19
OBRECHKOFF N. – Sur quelques inégalités pour les dérivées des fonctions et les différences des suites (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 21
SABAN G. – Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 24
PACELLA G. B. – Su una proprietà della meccanica dei corpi continui e una deduzione geometrica della legge di Hooke (pres. dal Socio *G. Abetti*) 31
VERGNANO A. M. – Osservazioni meridiane di Urano effettuate nel 1946–1947 (pres. dal Socio *G. Cecchini*) 37
PEISINO G. – Le osservazioni delle stelle doppie con micrometri a birifrangenza e un tipo di micrometro progettato e costruito all'Osservatorio di Collurania (pres. dal Socio *L. Carnera*) 42
TORALDO DI FRANCIA G. – Sulla forma intrinseca della trasformazione dell'interferenza inversa (pres. dal Socio *G. Abetti*) 48
COLONNA M. – Ricerche nella serie dei diaza-fenantreni: «Cation-alocromia di chinoline e diaza-fenantren-derivati» (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 50
LEONARDI P. – Nuove ricerche geologiche nel gruppo della Marmolada (Dolomiti) (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 56
ANDREATTA C. – La tettonica « a vortici » nei monti della Val di Sole (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 60
GANDOLFI R. – La faglia dello Staffora. Sue caratteristiche in rapporto al sistema di fratture nel Vogherese (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 67
HIEKE O. – Sulla presenza di basalti limburgitici nell'Africa Orientale (pres. dal Socio *A. Bianchi*) 70
GEROLA F. M. e VANNINI E. – L'importanza del pH nella colorazione con verde di metile-pironina, usata da Brachet per la localizzazione istochimica dell'acido ribonucleinico (pres. dal Socio *G. Gola*) 77

D'Ancona U. – Prime osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali sulla gonade dell'anguilla (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . . . Pag. 82
Alibrandi A. – Sulla presumibile natura riflessa della epilessia idiopatica (pres. dal Socio *C. Ciaccio*) 88
Balducci D. – Studi sull'effetto della vitamina « P » e del dicumarolo sulla formazione della protrombina (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 91
Biocca E. e Tarantino E. – Ricerche comparative sull'azione tossica per via muscolare e per via orale del curaro, della stricnina e dello iodo-metilato di stricnina. Nota IV (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 97
Ascenzi A. – Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – II. Sulla birifrangenza totale (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 100

FASCICOLO 3-4.

Ferie 1948 (Settembre-ottobre)

NOTE DI SOCI

Armellini G. – Sui numeri perfetti. Nota II . . . . . Pag. 109

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Zwirner G. — Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve spaziali. Nota II (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) . . . . . Pag. 113
Tortorici M. – Rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento e segmento obiettivo in geometria piana iperbolica (pres. dal Corrisp. *C. Mineo*) 116
Golab S. – Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 120
Villa M. – Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Nota I (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 122
Carafa M. – Sul prolungamento analitico (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 127
Saban G. – Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle congruenze rettilinee (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 134
Agostinelli C. – Sulla integrazione dell'equazione integro-differenziale che regge il fenomeno della diffusione dei neutroni termici (pres. dal Socio *U. Amaldi*) . . . 140
Manacorda T. – Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 143
Bordoni P. G. – Moti alla Cardano di un bipendolo (pres. dal Socio *A. Signorini*) 147
Malvano R. – Guida d'onda dielettrica a sezione rettangolare compresa tra due piani metallici paralleli (pres. dal Socio *E. Perucca*) 155
Freri M. – Sulla molecola dell'acido butirrico normale e sul legame idrogeno (pres. dal Corrisp. *L. Amerio*) 161
Conti S. – Sulle « besimauditi » delle Alpi Liguri (pres. dal Socio *G. Rovereto*) . . 165
Ascenzi A. – Contributo allo studio delle proprietà ottiche dell'osso umano normale. – III. Sulla birifrangenza di forma e la birifrangenza propria (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 171
Lombroso C. e Ardy C. – Sugli autolizzati proteici. – I. Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici in cani in via di accrescimento (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 181

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Intorno ad un problema del Lebesgue sui gruppi di punti associati Pag. 187
SEGRE B. – Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. Nota I 193
KRALL G. – Dinamica ed Aerodinamica dei fili. – III. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili 197
FINZI B. – Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio-tempo 203
MAJORANA Q. – Sulla relatività di Alberto Einstein 211
GIORGI G. – Relatività dei fenomeni fisici 216
BONINO G. B. e ROLLA M. – Contributo allo studio delle strutture elettroniche dei chinoni e delle forme chinoidi. – III. Sulla densità della nuvola elettronica p_ξ nelle forme para-benzochinoidi (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 220
SCARPA O. – Sulla validità della equazione di Gibbs-Helmholtz per le pile di concentrazione 226

NOTE PRESENTATE DA SOCI

VILLA M. – Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. Nota II (pres. dal Socio *L. Berzolari*) . . . . . Pag. 231
BASSI A. – Sopra l'indipendenza di alcuni invarianti topologici (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 235
PREDONZAN A. – Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 238
GODEAUX L. – Points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 243
VACCARO G. – Sopra alcune singolarità di ipersuperficie algebriche 247
MAHLER K. – Sui determinanti minimi delle sezioni di un corpo convesso (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 251
MANNINO G. – Applicazione del procedimento indicato dal prof. Silva allo studio della flessione dell'astrospettrografo IV di Potsdam (pres. dal Socio *G. Silva*) . . 253
LOMBROSO C. e ARDY C. – Sugli autolizzati proteici. – II. Modificazioni del metabolismo gassoso in seguito all'introduzione parenterale od orale di autolizzati proteici o di peptoni in cani adulti (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 257

Personale accademico 262
Plichi suggellati 263
Presentazione di libri 263
Presentazione di note e memorie 264
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei. 266
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella Seduta del 13 novembre 1948 271

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1948.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Sulle V_n contenenti più di $\infty^{n-k} S_k$. Nota II . . . . . Pag. 275
ASCOLI G. – Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione 280
KRALL G. – Dinamica ed aerodinamica dei fili. – IV. Problemi non lineari delle vibrazioni acustiche. 285
ARMELLINI G. – Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi di un assorbimento del flusso gravitazionale attraverso i mezzi materiali 288
BONINO G. B. e ROLLA M. – Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – V. Indici di legame negli orto- e para-benzochinoni (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 294
BONINO G. B. e MARINANGELI A. M. – Ricerche sulla teoria delle soluzioni concentrate di elettroliti forti. – VI. Dipendenza dalla temperatura di grandezze che intervengono nel calcolo degli abbassamenti crioscopici (pres. dal Socio *G. B. Bonino*). 298
SILVESTRI F. – Distribuzione del genere « Synxenus » Silv. (Diplopoda-Penicillata) . . 303
SERGI S. – I piegamenti della base nei paleantropi di Saccopastore e del Monte Circeo 306

NOTE PRESENTATE DA SOCI

AMERIO L. – Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 313
FICHERA G. – Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico (pres. dal Socio *M. Picone*) 319
COTUGNO N. e MENGOTTI-MARZOLLA C. – Approssimazione per eccesso della più bassa frequenza di una piastra ellittica omogenea incastrata (pres. dal Socio *M. Picone*) 324
FENCHEL W. – Estensioni di gruppi discontinui e trasformazioni periodiche delle superficie (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 326
FANTAPPIÈ L. – I funzionali derivati del determinante e del nucleo risolvente di un nucleo dato (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 329
PELLEGRINO F. – Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 333
STANKIEWICZ L. – Sul calcolo della deformazione della piastra poggiata su suolo elastico (pres. dal Socio *M. Picone*) 339
GHIZZETTI A. – Su un particolare problema misto per un'equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti (pres. dal Socio *M. Picone*) 344
PURIFICATO A. – Su un particolare sistema di funzioni ortogonali e su un procedimento di sommazione analogo a quello di Poisson (pres. dal Socio *M. Picone*) 348
BAIADA E. – Una relazione trigonometrica e la velocità di gruppo (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 355
PAGNI M. – Sui coefficienti di Fourier di una funzione di funzione (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 363
CONFORTO F. – Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie (pres. dal Socio *F. Severi*) 369

ANDREOTTI A. – Sulle corrispondenze fra due curve birazionalmente distinte a moduli generali e sui modelli minimi dei loro prodotti (pres. dal Socio *F. Severi*) Pag. 375
DALLA VOLTA V. – Sull'isometria di calotte superficiali (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 381
BAROZZI F. – Sul bilancio di potenza in una rete elettrica ad *m* morsetti in regime sinusoidale di correnti (pres. dal Socio *L. Lombardi*) 385
NICOLINI T. – Perturbazioni e discontinuità nel moto polare (pres. dal Socio *L. Carnera*) 392
DEMICHELIS F. – Sullo spessore dello strato di sbarramento nei raddrizzatori a ossidulo di rame (pres. dal Socio *E. Perucca*). 397
AGENO M. e GHIOZZOTTO M. – Sull'assorbimento di elettroni di 17 MeV, in materiali di diverso numero atomico (pres. dal Socio *G. C. Trabacchi*) 401
GARETTI C. M. e SACERDOTE G. – Determinazioni di una scala di sensazioni visive (pres. dal Corrisp. *R. Deaglio*) 403
BARGONI N. – Sull'ossidazione dell'acido piruvico nell'Escherichia Coli (pres. dal Socio *A. Herlitzka*). 412
LENTI C. – Sulla glicosi nel cervello (pres. dal Socio *A. Herlitzka*) 419
BIANCHI G. – Ricerche sui fenomeni di scarica agli elettrodi ad altissima densità di corrente (pres. dal Socio *O. Scarpa*) 423
SCHIAVINATO G. – Studi geologico-petrografici sulla regione compresa fra Ponte di Legno, Passo del Tonale e Passo di Gavia in alta Val Camonica. – II. Formazioni metamorfiche associate agli scisti del Tonale (pres. dal Socio *A. Bianchi*) . 427
LEONARDI P. – Una nuova forma werfeniana del Cadore: « Myophoria costata Zenk. n. var. ognibeni » (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 433
BERTOLANI M. – I costituenti minori delle antimoniti (pres. dal Corrisp. *G. Carobbi*) . 435
PERRI T. – La determinazione di arti soprannumerari in « Bufo vulgaris ». Nota III (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 442
STEFANELLI A. – Regolazioni duplicative dell'allungato in embrioni di « Rana esculenta » (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 448
CERUTI A. – L'azione di alcuni cationi e dell'acqua sul condrioma isolato in vitro (pres. dal Corrisp. *C. Cappelletti*) 452
D'AMATO F. – Prime osservazioni sulla inibizione pre-profasica della cariocinesi nei meristemi radicali (pres. dal Socio *A. Chiarugi*) 460
MONTALENTI G. – Considerazioni sul determinismo della meiosi (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 466

COMMEMORAZIONI

GOLA G. – Commemorazione del Socio Oreste Mattirolo . . . . . Pag. 469

Presentazione di libri 473
Presentazione di note e memorie 473
Relazioni di Commissioni 474
Comunicazioni varie 474
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 dicembre 1948 475

Errata corrige 476
Indice per Autori 479
Indice per materie 483
Indici dei fascicoli 487